

Акустические моды в He I и He II в присутствии переменного электрического поля

М.Д. Томченко

*Институт теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова НАН Украины
ул. Метрологическая, 14-б, г. Киев, 03680, Украина
E-mail: mtomchenko@bitp.kiev.ua*

Статья поступила в редакцию 4 октября 2019 г., опубликована онлайн 24 марта 2020 г.

Путем решения уравнений обычной и двухжидкостной гидродинамики исследованы колебательные моды в изотропных неполярных диэлектриках He I и He II в присутствии переменного электрического поля $\mathbf{E} = E_0 \mathbf{i}_z \sin(k_0 z - \omega_0 t)$. Между электрическим полем и колебаниями плотности возникает «зацепление», поскольку градиент плотности приводит к спонтанной поляризации \mathbf{P}_s , а электрическая сила содержит член $(\mathbf{P}_s \nabla) \mathbf{E}$. Анализ показывает, что скорости волн первого и второго звуков, распространяющихся вдоль \mathbf{E} , изменяются согласно формуле $u_j \approx c_j + \chi_j E_0^2$ (где $j = 1, 2$; c_j — скорость j -го звука при $E_0 = 0$, а χ_j — константа). Найдено, что поле \mathbf{E} совместно с волной первого (второго) звука (ω, k) должны создавать в He II гибридные акустоэлектрические (теплоэлектрические) волны плотности $(\omega + l\omega_0, k + lk_0)$, где $l = \pm 1, \pm 2, \dots$. Амплитуды акустоэлектрических волн и величина $|u_1 - c_1|$ ничтожно малы, но при определенных ω и ω_0 должны резонансно возрастать. Первый резонанс, по-видимому, соответствует распаду фотона на два фонона с отдачей импульса всей жидкости. Поэтому в спектре электромагнитного сигнала должна наблюдаться узкая линия поглощения, подобно эффекту Мессбауэра.

Ключевые слова: первый звук, второй звук, спонтанная поляризация, диэлектрик.

1. Введение

Хорошо известно, что внешнее электрическое поле \mathbf{E}^{ext} поляризует изотропный диэлектрик [1,2]. Мерой такой поляризации является диэлектрическая проницаемость ϵ . Кроме того, изотропный неполярный диэлектрик может поляризоваться спонтанно. Теоретически исследовалась спонтанная поляризация, связанная с ускорением [3–8] и градиентом плотности [3,5,9,10–12]. Градиент плотности приводит к спонтанной поляризации ввиду того, что два неполярных атома поляризуют друг друга [13–15]. В работе [16] показано, как спонтанную поляризацию изотропного неполярного диэлектрика нужно учитывать в уравнениях Максвелла для среды.

Электрические свойства таких изотропных неполярных диэлектриков, как He I и He II, исследовались экспериментально в ряде работ. В эксперименте Рыбалко найдено, что стоячая полуволна второго звука в He II сопровождается электрическим сигналом [17]. Этот эффект подтвержден в последующих экспериментах [18–20]. Предложено множество теоретических объяснений эффекта Рыбалко, разной степени

правдоподобности [3,7,8,10,21–25]. Аналогичный эффект для первого звука был предсказан теоретически [23,24] и затем найден экспериментально [26]. Попытка объяснить этот эффект сделана также в [8]. Отметим, что для первого и второго звуков электрический сигнал не наблюдался при $T > T_\lambda$. Это естественно для второго звука (который не существует при $T > T_\lambda$), но странно для первого. Отметим также, что в экспериментах с электромагнитным резонатором, погруженным в He II, наблюдалась сверхузкая линия поглощения на ротонной частоте [27,28]. Предложено несколько моделей для объяснения этой линии [29–31].

В работе [17] есть упоминание о наблюдении волны второго звука, индуцированной переменным электрическим полем. Однако в недавнем эксперименте такой эффект не обнаружен [32]. Ниже теоретически исследовано влияние внешнего переменного электрического поля \mathbf{E}^{ext} на колебательные моды He I и He II. Показано, что наличие поля \mathbf{E}^{ext} должно приводить к нескольким интересным эффектам. В разделах 2 и 3 приведены расчеты, а физические следствия и эксперименты рассмотрены в разд. 4.

2. Несверхтекучий жидкий диэлектрик (He I)

Рассмотрим изотропный неполярный жидкий диэлектрик, находящийся в переменном электрическом поле. Движение идеальной жидкости описывается уравнениями [33,34]

$$\rho \partial \mathbf{v} / \partial t + \rho (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \mathbf{F}, \quad (1)$$

$$\partial \rho / \partial t + \text{div} (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (2)$$

где ρ — плотность, p — давление, \mathbf{v} — скорость, \mathbf{F} — немеханическая сила на единицу объема. В нашем случае сила \mathbf{F} вызвана электрическим полем \mathbf{E} :

$$\mathbf{F} = \nabla \left[\frac{E^2}{8\pi} \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right] - \frac{E^2}{8\pi} \nabla \varepsilon + \quad (3)$$

$$+ (\mathbf{P}_s \nabla) \mathbf{E} + (a-1) \nabla (\mathbf{P}_s \mathbf{E}) + \frac{1}{2} \text{rot} (\mathbf{P}_s \times \mathbf{E}).$$

Здесь первые два члена получены Гельмгольцем (см. [1]), остальные связаны со спонтанной поляризацией и найдены в [16]; a — параметр из формулы $\mathbf{P}_s(r) = \text{const} \cdot \rho^a \nabla \rho$ [3,5,9,10–12]. Будем рассматривать только неполярные жидкости и газы, тогда диэлектрическая проницаемость ε удовлетворяет формуле Клаузиуса–Моссотти [2] $(\varepsilon - 1)/(\varepsilon + 2) = (4\pi/3)n\beta$ (здесь β — поляризуемость молекулы, и $n = \rho/m$). Для газов и некоторых жидкостей, включая He I и He II, ε близка к 1 [35]. Тогда $\rho \partial \varepsilon / \partial \rho \approx \varepsilon - 1$, и формула (3) приобретает вид

$$\mathbf{F} = \frac{\varepsilon - 1}{8\pi} \nabla E^2 + (\mathbf{P}_s \nabla) \mathbf{E} + (a-1) \nabla (\mathbf{P}_s \mathbf{E}) + \frac{1}{2} \text{rot} (\mathbf{P}_s \times \mathbf{E}). \quad (4)$$

Как отмечалось выше, спонтанная поляризация \mathbf{P}_s изотропного неполярного диэлектрика может быть связана с ускорением и градиентом плотности. Заметим, что известные нам расчеты поляризации из-за ускорения довольно грубые [3–8]. Движение элемента объема жидкого диэлектрика в акустической волне сопровождается как ускорением, так и градиентом плотности. Если вычесть из полной поляризации вклад, связанный с градиентом плотности, получим ту часть поляризации, которая обусловлена собственно ускорением. Стоит отметить, что в известных нам работах не показано, что эта часть отлична от нуля. Согласно оценкам [5], она должна быть много меньше поляризации, обусловленной градиентом плотности. Это связано с тем, что электронная оболочка неполярного атома трудно растяжима. Ввиду этого *возможной поляризацией из-за ускорения будем пренебрегать*.

Поляризация из-за градиента плотности исследовалась теоретически в работах [3,5,9–12]. Ее можно аккуратно оценить [5,9,11,12] на основе формулы для взаимной поляризации двух неполярных атомов [13–15]. Дополнительно необходимо усреднить по различным

конфигурациям атомов, что приводит к следующим формулам [5]:

$$\mathbf{P}_s(\mathbf{r}) = \xi \nabla n(\mathbf{r}), \quad \xi \approx \zeta (7/3) d_0 \bar{r}_0 (n(\mathbf{r})/n_0)^a, \quad (5)$$

где $a = 1$, $\bar{r}_0 = n_0^{-1/3}$ — среднее межатомное расстояние, $d_0 = -D_7 |e| (a_B^8 / \bar{r}_0^7)$, $a_B = \hbar^2 / (me^2)$ — борковский радиус, D_7 — атомная константа [13–15], и $\zeta \approx 7,5$ для He II [5]. Для He I и He II значения ζ должны быть близкими, так как ζ зависит от парной корреляционной функции $g(r)$ [5], а последняя почти не зависит от температуры при $T = 1-4,27$ К [36]. Заметим, что значение ξ найдено в [5] с неправильным знаком. В формуле (5) учтено соотношение $S_7 \approx 15(n/n_0)^{4/3}$ (см. уравнения (28), (29) из [5]) и предполагается, что отклонения концентрации $n(\mathbf{r})$ от средней n_0 малы.

Спонтанная поляризация (5) обусловлена взаимодействием атомов и поэтому существует при любой температуре: в He II, He I и газообразном гелии высокой температуры.

Найдем влияние внешнего поля $\mathbf{E}^{\text{ext}} = E_0 \mathbf{i}_z \sin(k_0 z - \omega_0 t)$ на колебательные моды жидкости. Полное поле \mathbf{E} в (4) есть сумма $\mathbf{E}^{\text{ext}} + \mathbf{E}^{\text{own}}$, где \mathbf{E}^{own} — поле, созданное диполями диэлектрика. Грубо можно считать, что $\mathbf{E}^{\text{own}} \sim \mathbf{P}$, где $\mathbf{P} = \mathbf{P}_i + \mathbf{P}_s$ и $\mathbf{P}_i = (\varepsilon - 1)\mathbf{E}/4\pi$ — индуцированная поляризация [16]. Поскольку для жидкого ^4He $(\varepsilon - 1)/(4\pi) \approx 0,0045$ [35], полем, созданным индуцированными диполями, можно пренебречь по сравнению с \mathbf{E}^{ext} . Ниже мы увидим, что поле, созданное спонтанными диполями, тоже мало. Поэтому полагаем $\mathbf{E} \approx \mathbf{E}^{\text{ext}}$.

Сила (4) содержит три члена, в которых поле \mathbf{E} «зацепляется» за \mathbf{P}_s . Поскольку $\mathbf{P}_s \sim \nabla n(\mathbf{r})$, электрическое поле должно создавать в среде некоторую волну плотности. Считаем ее слабой, а отклонения параметров системы от невозмущенных — малыми. Поэтому будем искать их в линейном приближении. Пусть невозмущенная система характеризуется параметрами ρ_0 , $p_0 = \text{const}$ и $\mathbf{v}, \mathbf{E} = 0$. Для возмущенной системы считаем скорость \mathbf{v} ненулевой и малой и положим $\rho = \rho_0 + \rho'$, $p = p_0 + p'$, $\mathbf{E} = E_0 \mathbf{i}_z \sin(k_0 z - \omega_0 t)$. Учтем, что идеальная жидкость движется адиабатически ($s = \text{const}$), поэтому $p' = \left. \frac{\partial p'}{\partial \rho} \right|_s \rho' = c_1^2 \rho'$, где c_1 — скорость звука [33,34]. Вначале положим в (4) $\mathbf{P}_s = 0$. Из уравнений (1), (4) следует, что скорость должна быть направлена вдоль поля \mathbf{E} : $\mathbf{v} = v \mathbf{i}_z$. Оставляя в (1), (2) только линейные по ρ' , p' и v слагаемые, находим уравнения для малых возмущений:

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} + c_1^2 \frac{\partial \rho'}{\partial z} = \frac{\varepsilon - 1}{8\pi} \frac{\partial E^2}{\partial z}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v}{\partial z} = 0. \quad (7)$$

Полагаем $v = \tilde{v} \cos(kz - \omega t + \alpha)$, $\rho' = \tilde{\rho} \cos(kz - \omega t + \alpha)$.
 При $\mathbf{E} = 0$ уравнения (6), (7) дают

$$-kc_1^2 \tilde{\rho} + \omega \rho_0 \tilde{v} = 0, \quad (8)$$

$$\omega \tilde{\rho} - k \rho_0 \tilde{v} = 0, \quad (9)$$

откуда следует закон дисперсии звука: $\omega^2 = c_1^2 k^2$. При $\mathbf{E} = E_0 \mathbf{i}_z \sin(k_0 z - \omega_0 t)$ уравнения (6), (7) содержат вынуждающую силу. Соответствующее ей решение имеет вид $v = \tilde{v}_{0,2} \cos(2k_0 z - 2\omega_0 t)$, $\rho' = \tilde{\rho}_{0,2} \cos(2k_0 z - 2\omega_0 t)$. Тогда

$$-2k_0 c_1^2 \tilde{\rho}_{0,2} + 2\omega_0 \rho_0 \tilde{v}_{0,2} = \frac{\varepsilon - 1}{8\pi} E_0^2 k_0, \quad (10)$$

$$2\omega_0 \tilde{\rho}_{0,2} - 2k_0 \rho_0 \tilde{v}_{0,2} = 0, \quad (11)$$

откуда находим амплитуды:

$$\tilde{\rho}_{0,2} = \rho_0 \frac{k_0}{\omega_0} \tilde{v}_{0,2}, \quad \tilde{v}_{0,2} = \frac{\varepsilon - 1}{16\pi \rho_0} \frac{E_0^2 k_0 \omega_0}{\omega_0^2 - c_1^2 k_0^2}. \quad (12)$$

Теперь учтем в (4) члены с \mathbf{P}_s . В этом случае (2) по-прежнему приводит к (7), а линеаризованное уравнение (1) с силой (4) принимает вид

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} + c_1^2 \frac{\partial \rho'}{\partial z} = \frac{\varepsilon - 1}{8\pi} \frac{\partial E^2}{\partial z} + \frac{a \xi}{m} \frac{\partial \rho'}{\partial z} \frac{\partial E}{\partial z} + \frac{(a - 1) \xi}{m} E \frac{\partial^2 \rho'}{\partial z^2}. \quad (13)$$

Любая реальная жидкость имеет ненулевую температуру. Поэтому в ней есть ансамбль тепловых фононов, в том числе фононы, движущиеся вдоль поля \mathbf{E} . Последние создают волны плотности вида $\rho' = \tilde{\rho} \cos(kz \pm \omega t + \alpha)$, где $\omega > 0$. Будем рассматривать только волну $\rho' = \tilde{\rho} \cos(kz - \omega t + \alpha)$, считая, что ω может быть положительным и отрицательным. Для такой волны правая часть (13) сводится к виду

$$\begin{aligned} & \frac{\varepsilon - 1}{8\pi} E_0^2 k_0 \sin(k_{0,2} z - \omega_{0,2} t) - \\ & - \frac{\xi E_0 \tilde{\rho}}{2m} (akk_0 + (a - 1)k^2) \sin(k_{1,1} z - \omega_{1,1} t + \alpha) - \\ & - \frac{\xi E_0 \tilde{\rho}}{2m} (akk_0 - (a - 1)k^2) \sin(k_{1,-1} z - \omega_{1,-1} t + \alpha), \quad (14) \end{aligned}$$

здесь и ниже используются обозначения $k_{l,i} = lk + ik_0$, $\omega_{l,i} = l\omega + i\omega_0$. Это показывает, что ρ' нужно искать в виде

$$\begin{aligned} \rho' = & \tilde{\rho}_{1,0} \cos(k_{1,0} z - \omega_{1,0} t + \alpha) + \tilde{\rho}_{0,2} \cos(k_{0,2} z - \omega_{0,2} t) + \\ & + \tilde{\rho}_{1,1} \cos(k_{1,1} z - \omega_{1,1} t + \alpha) + \tilde{\rho}_{1,-1} \cos(k_{1,-1} z - \omega_{1,-1} t + \alpha). \end{aligned}$$

Если подставить это разложение в правую часть (13), последняя сгенерирует несколько новых гармоник. Их тоже нужно учесть в решениях для ρ' , v . Затем снова

подставляем ρ' , v в (7), (13), и так далее. Окончательно находим, что решение уравнений (7), (13) нужно искать в виде

$$\begin{aligned} \rho' = & \sum_{i=1,2,\dots} \tilde{\rho}_{0,i} \cos(k_{0,i} z - \omega_{0,i} t) + \\ & + \sum_{i=0,\pm 1,\pm 2,\dots} \tilde{\rho}_{1,i} \cos(k_{1,i} z - \omega_{1,i} t + \alpha), \quad (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v = & \sum_{i=1,2,\dots} \tilde{v}_{0,i} \cos(k_{0,i} z - \omega_{0,i} t) + \\ & + \sum_{i=0,\pm 1,\pm 2,\dots} \tilde{v}_{1,i} \cos(k_{1,i} z - \omega_{1,i} t + \alpha), \quad (16) \end{aligned}$$

где фаза α — произвольное действительное число. Подставим разложения (15), (16) в уравнения (7), (13) и учтем (14). Тогда (7), (13) принимают форму

$$\begin{aligned} \sum_{l,i} A_{l,i} \sin(k_{l,i} z - \omega_{l,i} t + q_l \alpha) = 0, \\ \sum_{l,i} B_{l,i} \sin(k_{l,i} z - \omega_{l,i} t + q_l \alpha) = 0, \quad (17) \end{aligned}$$

где l, i пробегает значения $l = 0, 1; i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (но случай $l = i = 0$ исключен), при этом $q_0 = 0, q_1 = 1$. Уравнения (17) удовлетворяются, если $A_{l,i} = 0$ и $B_{l,i} = 0$ для всех l, i . В результате (7) приводит к уравнениям

$$A_{l,i} \equiv \omega_{l,i} \tilde{\rho}_{l,i} - k_{l,i} \rho_0 \tilde{v}_{l,i} = 0, \quad (18)$$

а из (13) следуют уравнения

$$B_{0,1} \equiv \rho_0 \omega_0 \tilde{v}_{0,1} - c_1^2 k_0 \tilde{\rho}_{0,1} + \frac{\xi E_0}{2m} \tilde{\rho}_{0,2} (2ak_0^2 - (a - 1)4k_0^2) = 0, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} B_{0,2} \equiv & \rho_0 2\omega_0 \tilde{v}_{0,2} - c_1^2 2k_0 \tilde{\rho}_{0,2} - \frac{\varepsilon - 1}{8\pi} E_0^2 k_0 + \\ & + \frac{\xi E_0}{2m} \tilde{\rho}_{0,1} (ak_0^2 + (a - 1)k_0^2) + \frac{\xi E_0}{2m} \tilde{\rho}_{0,3} (a3k_0^2 - (a - 1)9k_0^2) = 0, \quad (20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{0,j} \equiv & \rho_0 \omega_{0,j} \tilde{v}_{0,j} - c_1^2 k_{0,j} \tilde{\rho}_{0,j} + \\ & + \frac{\xi E_0}{2m} \tilde{\rho}_{0,j-1} (ak_0 k_{0,j-1} + (a - 1)k_{0,j-1}^2) + \\ & + \frac{\xi E_0}{2m} \tilde{\rho}_{0,j+1} (ak_0 k_{0,j+1} - (a - 1)k_{0,j+1}^2) = 0, \quad (21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{1,0} \equiv & \rho_0 \omega \tilde{v}_{1,0} - c_1^2 k \tilde{\rho}_{1,0} + \\ & + \frac{\xi E_0}{2m} \tilde{\rho}_{1,-1} [ak_0 (k - k_0) + (a - 1)(k - k_0)^2] + \\ & + \frac{\xi E_0}{2m} \tilde{\rho}_{1,1} [ak_0 (k + k_0) - (a - 1)(k + k_0)^2] = 0, \quad (22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_{1,i} &\equiv \rho_0 \omega_{1,i} \tilde{v}_{1,i} - c_1^2 k_{1,i} \tilde{\rho}_{1,i} + \\
 &+ \frac{\xi E_0}{2m} \tilde{\rho}_{1,i-1} [ak_0 k_{1,i-1} + (a-1)k_{1,i-1}^2] + \\
 &+ \frac{\xi E_0}{2m} \tilde{\rho}_{1,i+1} [ak_0 k_{1,i+1} - (a-1)k_{1,i+1}^2] = 0, \quad (23)
 \end{aligned}$$

где $j = 3, 4, \dots$, $i = \pm 1, \pm 2, \dots$. Для уравнений (18)–(23) и подобных уравнений следующего раздела малым параметром является безразмерная величина

$$\vartheta = \frac{\xi E_0 k_0}{m c_1^2}. \quad (24)$$

Даже при сильных полях E_0 имеем $\vartheta \ll 1$ для характерных k_0 . Малость ϑ обеспечивает сходимость ряда (15). Удобно для каждой гармоники ввести фазовую скорость $u_{l,i} = \omega_{l,i}/k_{l,i}$. Тогда (18) принимает вид

$$\tilde{v}_{l,i} = u_{l,i} \tilde{\rho}_{l,i} / \rho_0. \quad (25)$$

Система уравнений (19)–(25) разделяется на две независимые системы: для гармоник $(0, i)$ и гармоник $(1, i)$. В уравнениях (19)–(21) выразим $\tilde{v}_{0,i}$ через $\tilde{\rho}_{0,i}$ с помощью (25). Находим решения для гармоник $(0, 1)$, $(0, 2)$, $(0, 3)$:

$$\tilde{\rho}_{0,2} \approx \frac{\varepsilon - 1}{16\pi} \frac{E_0^2}{c^2 - c_1^2}, \quad \tilde{v}_{0,2} = \frac{c \tilde{\rho}_{0,2}}{\rho_0}, \quad (26)$$

$$\tilde{\rho}_{0,1} \approx \frac{\xi E_0 k_0 (a-2)}{m(c^2 - c_1^2)} \tilde{\rho}_{0,2}, \quad \tilde{v}_{0,1} = \frac{c \tilde{\rho}_{0,1}}{\rho_0}, \quad (27)$$

$$\tilde{\rho}_{0,3} \approx \frac{\xi E_0 k_0 (2/3 - a)}{m(c^2 - c_1^2)} \tilde{\rho}_{0,2}, \quad \tilde{v}_{0,3} = \frac{c \tilde{\rho}_{0,3}}{\rho_0}, \quad (28)$$

где $c = \omega_0/k_0$ — скорость света в диэлектрике. Основной является мода $(0, 2)$, остальные моды слабые: $\tilde{\rho}_{0,1} \sim \tilde{\rho}_{0,3} \sim \vartheta \tilde{\rho}_{0,2}$, $\tilde{\rho}_{0,4} \sim \vartheta^2 \tilde{\rho}_{0,2}$, $\tilde{\rho}_{0,5} \sim \vartheta^3 \tilde{\rho}_{0,2}$, и т.д. Причем в амплитуды $\tilde{\rho}_{0,i} \sim \vartheta^{i-2}$ с $i \geq 4$ и $i \geq 6$ должны также давать вклад соответственно нелинейные слагаемые $\tilde{\rho}_{0,i_1} \tilde{v}_{0,i_2}$ и $\tilde{\rho}_{0,i_1} \tilde{v}_{0,i_2} \tilde{v}_{0,i_3}$ (из уравнений (1) и (2)), которыми мы пренебрегали. Решение (26) совпадает с (12).

При нулевой температуре в жидкости нет тепловых акустических волн, и электрическое поле генерирует только волны колебаний плотности типа $(0, i)$ (см. (26)–(28)), имеющие фазовую скорость, равную скорости света. Если при $T = 0$ создать акустическую волну искусственно, в системе должны дополнительно появиться гибридные моды, найденные ниже.

Рассмотрим цепочку уравнений (22), (23) для гармоник $(1, i)$. Положим $\tilde{v}_{1,i} = u_{1,i} \tilde{\rho}_{1,i} / \rho_0$ и $\omega_{1,i} = u_{1,i} k_{1,i}$, тогда (22), (23) принимают форму

$$\begin{aligned}
 \tilde{\rho}_{1,0} k(u^2 - c_1^2) &= -\frac{\xi E_0}{2m} \tilde{\rho}_{1,-1} [ak_0(k - k_0) + (a-1)(k - k_0)^2] - \\
 &- \frac{\xi E_0}{2m} \tilde{\rho}_{1,1} [ak_0(k + k_0) - (a-1)(k + k_0)^2], \quad (29)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\rho}_{1,i} k_{1,i} (u_{1,i}^2 - c_1^2) &= -\frac{\xi E_0}{2m} \tilde{\rho}_{1,i-1} [ak_0 k_{1,i-1} + (a-1)k_{1,i-1}^2] - \\
 &- \frac{\xi E_0}{2m} \tilde{\rho}_{1,i+1} [ak_0 k_{1,i+1} - (a-1)k_{1,i+1}^2], \quad (30)
 \end{aligned}$$

где $i = \pm 1, \pm 2, \dots$. Учитывая малость ϑ , находим из (30) рекуррентные соотношения

$$\tilde{\rho}_{1,i} \approx -\frac{\xi E_0 \tilde{\rho}_{1,i-1}}{2m} \frac{ak_0 k_{1,i-1} + (a-1)k_{1,i-1}^2}{(u_{1,i}^2 - c_1^2) k_{1,i}}, \quad (31)$$

$$\tilde{\rho}_{1,-i} \approx -\frac{\xi E_0 \tilde{\rho}_{1,-i+1}}{2m} \frac{ak_0 k_{1,-i+1} - (a-1)k_{1,-i+1}^2}{(u_{1,-i}^2 - c_1^2) k_{1,-i}} \quad (32)$$

($i = 1, 2, 3, \dots$), с помощью которых можно выразить все $\tilde{\rho}_{1,\pm i}$ через $\tilde{\rho}_{1,0}$. Величину $\tilde{\rho}_{1,0}$ считаем известной — это малые флуктуации плотности, связанные с тепловыми фононами (ω, k) .

Подставив $\tilde{\rho}_{1,\pm 1}$ (31), (32) в (29), находим формулу для скорости звука $u_{1,0} \equiv u$:

$$u^2 = c_1^2 + \chi \left(\frac{\xi E_0}{2m} \right)^2, \quad (33)$$

$$\begin{aligned}
 \chi &\approx \frac{[k_0 + (a-1)k][ak_0 - (a-1)k]}{u_{1,-1}^2 - c_1^2} + \\
 &+ \frac{[k_0 - (a-1)k][ak_0 + (a-1)k]}{u_{1,1}^2 - c_1^2}. \quad (34)
 \end{aligned}$$

При $a = 1$ получаем

$$\chi \approx \frac{k_0^2}{u_{1,-1}^2 - c_1^2} + \frac{k_0^2}{u_{1,1}^2 - c_1^2}. \quad (35)$$

Величины k_0 и ω_0 считаем положительными (этого всегда можно добиться в формуле $\mathbf{E} = E_0 \mathbf{i}_z \sin(k_0 z - \omega_0 t)$ выбором направления оси z). Также считаем положительной величину фоновной k в $\tilde{\rho}_{1,0} \cos(kz - \omega t + \alpha)$. При этом круговая частота $\omega = uk$ может быть как положительной, так и отрицательной, так как фазовая скорость u может иметь разный знак. Из (33) следуют два возможных решения:

$$u \approx \pm \left[c_1 + \frac{\chi}{2c_1} \left(\frac{\xi E_0}{2m} \right)^2 \right]. \quad (36)$$

Таким образом, мы нашли решения для малых колебаний плотности несверхтекучего жидкого диэлектрика, помещенного в переменное электрическое поле $\mathbf{E} = E_0 \mathbf{i}_z \sin(k_0 z - \omega_0 t)$.

Выше отмечалось, что электрическим полем \mathbf{E}_s , индуцированным спонтанными диполями, можно пренебречь. Это видно из формулы $\mathbf{E}_s \sim P_s = (\xi/m)\nabla\rho'$ и того, что основной вклад в ρ' дают $\tilde{\rho}_{1,0}$ и $\tilde{\rho}_{0,2}$ ($\tilde{\rho}_{0,2}$

приводит к $\mathbf{E}_s \sim (\xi/m)\nabla\tilde{\rho}_{0,2} \sim 9\frac{(\varepsilon-1)c_1^2}{8\pi c^2}\mathbf{E}^{\text{ext}} \ll \mathbf{E}^{\text{ext}}$,

$\tilde{\rho}_{1,0}$ дает $\mathbf{E}_s \sim (\xi/m)k\tilde{\rho}_{1,0}$). Так как плотность $\tilde{\rho}_{1,0}$ тепловых фононов с импульсом $(k_x, k_y, k_z) = (0, 0, k)$ очень мала, при не слишком малом E_0 выполняется $E_s \ll E_0$.

Полученные выше решения обладают интересными свойствами. Моды (0, 1), (0, 2), (0, 3) (26)–(28) соответствуют слабым колебаниям плотности с параметрами (ω_0, k_0) , $(2\omega_0, 2k_0)$, $(3\omega_0, 3k_0)$. Такие волны имеют фазовую скорость, равную скорости света в среде $c = c_v/\sqrt{\varepsilon\mu}$ (где c_v — скорость света в вакууме), которая на 6 порядков больше скорости звука. Моды $(1, \pm 1)$ — это гибридные акустоэлектрические моды. Они существуют, если есть фононная мода $\tilde{\rho}_{1,0} \cos(kz - \omega t + \alpha)$ и электрическое поле $\mathbf{E} = E_0 \mathbf{i}_z \sin(k_0 z - \omega_0 t)$. Фононы всегда существуют при $T > 0$. Согласно решениям, моды $(1, \pm 1)$ должны быть сильнее мод $(1, \pm 2)$. Акустоэлектрические моды («акуэлоны») $(1, \pm 1)$ имеют довольно необычные свойства. Мода $(1, 1)$ есть волна с частотой $\omega + \omega_0$ и волновым вектором $k + k_0$. Если $\omega_0 \sim \omega$, то $k_0 \ll k$ и $k + k_0 \approx k$. Поэтому при волновом векторе $k + k_0$, близком к k , частота $\omega + \omega_0$ может быть фактически любой из интервала $]\omega, 10^5\omega[$. В частности, при $10^2\omega \lesssim \omega_0 \lesssim 10^5\omega$ имеем $k + k_0 \approx k$ и $\omega + \omega_0 \approx \omega_0$. Такой акуэлон имеет длину волны, близкую к длине волны звука (фонона), и частоту, близкую к частоте электромагнитной волны (фотона). Подобные свойства и у моды $(1, -1)$.

Кроме того, решения $\tilde{\rho}_{1,i}$ и $\tilde{\rho}_{1,-i}$ (31), (32) характеризуются *параметрическим резонансом*, соответственно при

$$|u_{1,i}| = c_1(1+\delta), \quad \delta \rightarrow 0 \quad (37)$$

и

$$|u_{1,-i}| = c_1(1+\delta), \quad \delta \rightarrow 0. \quad (38)$$

При $i = 1$ выполнение любого из этих условий приводит также к резонансному увеличению величины χ (34). Как видно, резонанс возникает при совпадении фазовой скорости гибридной волны $u_{1,\pm i}$ со скоростью звука c_1 для среды без поля \mathbf{E} .

Вблизи точки резонанса (т.е. при $\delta \rightarrow 0$) решения (31), (32) неверны. Чтобы получить решение в этой области, нужно использовать методы теории нелинейных колебаний. При этом нужно учитывать вязкость в (1) и нелинейные члены в (1), (2) и в следующей из (1), (2) цепочке уравнений для $\tilde{\rho}_{1,\pm i}$. При таком подходе решения $\tilde{\rho}_{1,\pm i}$ и χ должны быть конечными в точке резонанса. Мы ограничимся решениями (31)–(35),

справедливыми для значений k , не слишком близких к точке резонанса. Поэтому будем считать $|\delta|$ малым ($|\delta| \ll 1$), но не слишком малым. При $|\delta| \ll 1$ из (35), (37) и (38) получаем

$$\chi \approx \frac{k_0^2}{2\delta \cdot c_1^2}. \quad (39)$$

Считаем $|\delta|$ не слишком малым, если $|\delta| \gg 9^2/16$.

В этом случае $\frac{|\chi| \left(\frac{\xi E_0}{2m}\right)^2}{2c_1} \ll c_1$ и $|u| \approx c_1$, согласно (33), (39).

Для мод $(1, 1)$ и $(1, -1)$ рассмотрим окрестность резонанса, соответствующую не слишком малому $|\delta|$. Условие (38) эквивалентно двум условиям: $u_{1,-1} = -c_1(1+\delta)$ или $u_{1,-1} = c_1(1+\delta)$. В первом случае фазовая скорость $u_{1,-1}$ отрицательна, а во втором — положительна. Пусть $u > 0$. Из первого условия следуют соотношения

$$k_{1,-1} \approx k \approx \frac{k_0 c}{2c_1}, \quad u \approx c_1, \quad \omega_{1,-1} \approx -\frac{\omega_0}{2}. \quad (40)$$

Из второго условия находим

$$k_{1,-1} \approx k \approx \zeta \frac{k_0 c}{\delta_I c_1}, \quad \delta_I = \frac{\chi}{2c_1^2} \left(\frac{\xi E_0}{2m}\right)^2 - \delta, \\ u \approx c_1, \quad \omega_{1,-1} \approx \zeta \frac{\omega_0}{\delta_I}, \quad (41)$$

где $\zeta = 1$. Поскольку $|\delta_I| \ll 1$, значение $k_{1,-1}$ (41) много больше, чем $k_{1,-1}$ (40). Для реалистичных электрических волн значения $k_{1,-1}$ (41) очень большие и должны выходить за область фононного спектра. Поэтому решение (41) не рассматриваем.

Условие (38) с $i = 2, 3, \dots$ приводит к решению (41) с $\zeta = 1$ и заменами $(1, -1) \rightarrow (1, -i)$, $k_0 \rightarrow ik_0$, и к решению (40) с заменами $(1, -1) \rightarrow (1, -i)$, $k_0 \rightarrow ik_0$:

$$k_{1,-i} \approx k \approx \frac{ik_0 c}{2c_1}, \quad u \approx c_1, \quad \omega_{1,-i} \approx -\frac{i\omega_0}{2}. \quad (42)$$

Формулы (42) описывают околорезонансное решение для мод $(1, -i)$ с $i = 1, 2, \dots$

При $u < 0$ условие (38) дает решения с $k < 0$ (что нефизично) и $k > 0$ (в последнем случае k слишком большие и выходят за фононную область).

Обратимся к условию (37). Его можно записать в виде $u_{1,i} = c_1(1+\delta)$ или $u_{1,i} = -c_1(1+\delta)$. В первом случае при $u > 0$ и $i = 1$ получаем решение (41) с $\zeta = -1$ и заменой $(1, -1) \rightarrow (1, 1)$. Здесь мы выходим за область фононного спектра. Аналогично при $i = 2, 3, \dots$ При $u < 0$ решение следующее:

$$k_{1,i} \approx k \approx \frac{ik_0c}{2c_1}, \quad u \approx -c_1, \quad \omega_{1,i} \approx \frac{i\omega_0}{2}. \quad (43)$$

Оно отличается от (42) знаками фазовых скоростей u и $u_{1,i}$. Значение χ в этом случае задается формулой (39), как и для решения (42). Второй случай, $u_{1,i} = -c_1(1 + \delta)$, возможен при $u < 0$. Но здесь решения характеризуются «зафонными» k .

Таким образом, мы нашли два околорезонансных решения: (42) и (43). Для наглядности рассмотрим их поведение при росте фонного волнового вектора k . Для k от наименьшего $k = \pi/L$ (L — длина резонатора) до $k = 10^5 k_0$ (предполагаем, что $10^5 k_0 > \pi/L$) имеем $|u_{1,\pm i}| \gg c_1$ при любом i , поэтому $\tilde{\rho}_{1,\pm i}$ и χ малые, а скорость звука есть $|u| \approx c_1$. Однако при $k \approx k_0c/(2c_1) \sim 10^6 k_0$ выполняется $|u_{1,\pm 1}| \approx c_1$, и величины $\tilde{\rho}_{1,\pm 1}$ и χ резонансно возрастают. В этом случае при $k < k_0c/(2c_1)$ для решений (42), (43) имеем $\delta, \chi > 0$, а при $k > k_0c/(2c_1)$ получаем $\delta, \chi < 0$. Поэтому, согласно (36), при $k < k_0c/(2c_1)$ энергия фонона $|\omega(k)|$ должна быть несколько больше величины c_1k , а при $k > k_0c/(2c_1)$ — несколько меньше c_1k . Вблизи точки $k \approx k_0c/(2c_1)$ эти отклонения могут быть большими, а в самой точке $k \approx k_0c/(2c_1)$ фонная дисперсионная кривая $|\omega(k)|$ должна претерпевать разрыв и амплитуда $|\tilde{\rho}_{1,-1}|$ (или $|\tilde{\rho}_{1,1}|$, в зависимости от знака u) должна резко возрасти. При этом скорость $u_{1,-1}$ (или $u_{1,1}$) сравнивается со скоростью звука c_1 . Т.е. в точке резонанса гибридная мода становится подобной фонону, а фонон — гибридной моде. При $k > k_0c/(2c_1)$ с ростом k выходим из области резонанса. Вблизи точек $k \approx ik_0c/(2c_1)$ ($i = 2, 3, \dots$) имеем резонансы для амплитуд $\tilde{\rho}_{1,\pm i}$.

3. Сверхтекучий жидкий диэлектрик (He II)

Рассмотрим аналогичную задачу для сверхтекучего He II. Уравнения гидродинамики He II описывают движение нормальной и сверхтекучей компонент [34,37]:

$$\partial J_i / \partial t + \sum_{j=1,2,3} \frac{\partial}{\partial r_j} (p \delta_{ij} + \rho_n v_{n,i} v_{n,j} + \rho_s v_{s,i} v_{s,j}) = F_i, \quad (44)$$

$$\partial \rho / \partial t + \text{div } \mathbf{J} = 0, \quad (45)$$

$$\partial (\rho s) / \partial t + \text{div} (\rho s \mathbf{v}_n) = 0, \quad (46)$$

$$\partial \mathbf{v}_s / \partial t + (\mathbf{v}_s \nabla) \mathbf{v}_s = -\nabla (\mu + \Omega), \quad (47)$$

где $\rho = \rho_s + \rho_n$, $\mathbf{J} = \rho_n \mathbf{v}_n + \rho_s \mathbf{v}_s$, и $\mathbf{F}/\rho = -\nabla \Omega$ — механическая сила на единицу массы. Сила на единицу массы, действующая на сверхтекучую компоненту, должна быть градиентом некоторой функции (согласно (47), это обеспечивает потенциальность движения сверхтекучей компоненты, $\text{rot } \mathbf{v}_s = 0$). Микроскопическое обоснование уравнений (44)–(47) предложено в [38].

Пусть равновесная система характеризуется параметрами $\rho_0, p_0, s_0, T_0 = \text{const}$, $\mathbf{v}_s = \mathbf{v}_n = 0$, $\Omega = 0$. Найдем колебательные моды системы в присутствии силы $\mathbf{F} = -\rho \nabla \Omega$. Как обычно, звуковую и тепловую волны рассматриваем как малые отклонения от равновесия. Поэтому \mathbf{v}_s и \mathbf{v}_n считаем малыми, а ρ, p, s и T — близкими к равновесным. Тогда от (44)–(47) можно перейти к линеаризованной системе

$$\partial \mathbf{J} / \partial t + \nabla p = -\rho \nabla \Omega, \quad (48)$$

$$\partial \rho / \partial t + \text{div } \mathbf{J} = 0, \quad (49)$$

$$\partial (\rho s) / \partial t + \rho s \cdot \text{div } \mathbf{v}_n = 0, \quad (50)$$

$$\partial \mathbf{v}_s / \partial t = -\nabla (\mu + \Omega). \quad (51)$$

Из (49)–(51) и термодинамического соотношения [34]

$$dp = \rho d\mu + \rho s dT + (\rho_n/2) d(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2, \quad (52)$$

в котором последним членом пренебрегаем, следует уравнение [37]

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{s^2 \rho_s}{\rho_n} \Delta T. \quad (53)$$

А (48), (49) приводят к уравнению [37]

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \Delta p + \rho \Delta \Omega. \quad (54)$$

Положим $\rho = \rho_0 + \rho'$, $p = p_0 + p'$, $s = s_0 + s'$, $T = T_0 + T'$, где ρ' , p' , s' , T' — малые. Тогда уравнения (53), (54) удобно записать в виде [37]

$$\frac{\partial s}{\partial p} \Big|_T \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + \frac{\partial s}{\partial T} \Big|_p \frac{\partial^2 T'}{\partial t^2} - \frac{s^2 \rho_s}{\rho_n} \Delta T' = 0, \quad (55)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial p} \Big|_T \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + \frac{\partial \rho}{\partial T} \Big|_p \frac{\partial^2 T'}{\partial t^2} - \Delta p' = \rho_0 \Delta \Omega. \quad (56)$$

Это основные уравнения, которые мы будем исследовать. Они отличаются от полученных Ландау [37] дополнительным членом $\rho_0 \Delta \Omega$, который позволит найти влияние электрического поля на колебательные моды.

Возмущения p' и T' в (55), (56) запишем в виде $p' = \tilde{p} \cos(kz - \omega t + \alpha)$, $T' = \tilde{T} \cos(kz - \omega t + \alpha)$ и используем соотношения [34]

$$\frac{\partial \rho}{\partial p} \Big|_T = \frac{C_p}{C_V c_1^2}, \quad \frac{\partial s}{\partial T} \Big|_p = \frac{C_p}{T}. \quad (57)$$

Тогда вместо (55), (56) получим

$$\left[\tilde{p} \left(-u^2 \frac{\partial s}{\partial p} \Big|_T \right) + \tilde{T} \left(\frac{s^2 \rho_s}{\rho_n} - u^2 \frac{C_p}{T} \right) \right] \times \\ \times k^2 \cos(kz - \omega t + \alpha) = 0, \quad (58)$$

$$\left[\tilde{p} \left(1 - \frac{u^2 C_p}{c_1^2 C_V} \right) + \tilde{T} \left(-u^2 \frac{\partial \rho}{\partial T} \Big|_p \right) \right] \times \\ \times k^2 \cos(kz - \omega t + \alpha) = \rho_0 \Delta \Omega, \quad (59)$$

где $u = \omega/k$. При $\Omega = 0$ из (58), (59) и формулы [34]

$$\frac{\partial \rho}{\partial T} \Big|_p \frac{\partial s}{\partial p} \Big|_T = \frac{C_p}{T c_1^2} \left(\frac{C_p}{C_V} - 1 \right) \quad (60)$$

следует известное уравнение для скоростей первого и второго звуков [34]:

$$\left(\frac{u^2}{c_1^2} - 1 \right) \left(\frac{u^2}{c_2^2} - 1 \right) + \frac{C_V}{C_p} - 1 = 0, \quad (61)$$

где

$$c_1^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} \Big|_s, \quad c_2^2 = \frac{\rho_s s^2 T}{\rho_n C_V}. \quad (62)$$

Теперь учтем электрическое поле $\mathbf{E} = E_0 \mathbf{i}_z \sin(k_0 z - \omega_0 t)$. Оно зависит только от координаты z и времени. Из симметрии задачи ясно, что для бесконечной системы величины ρ' , ρ' , s' , T' тоже должны зависеть только от z и t . Положим $\rho' = \tilde{\rho} \cos(kz - \omega t + \alpha)$. Тогда силу (4) можно представить в виде $\mathbf{F} = -\rho \nabla \Omega$, где

$$\Omega = -\frac{\varepsilon - 1}{16\pi\rho} E_0^2 (1 - \cos(2k_0 z - 2\omega_0 t)) - \frac{\xi E_0 k \tilde{\rho}}{2m\rho_0} \times \\ \times \left\{ \left(\frac{k_0}{k_{1,1}} + a - 1 \right) \cos(k_{1,1} z - \omega_{1,1} t + \alpha) + \right. \\ \left. + \left(\frac{k_0}{k_{1,-1}} - a + 1 \right) \cos(k_{1,-1} z - \omega_{1,-1} t + \alpha) \right\} \quad (63)$$

и $k_{1,-1} \neq 0$. При $k_{1,-1} = 0$ член $k_0/k_{1,-1} \times \cos(k_{1,-1} z - \omega_{1,-1} t + \alpha)$ нужно заменить на $k_0 z \times \sin(\omega_{1,-1} t - \alpha)$.

Решения для ρ' , p' , s' , T' ищем в виде разложений, аналогичных (15), (16). В этом случае Ω приобретает довольно громоздкий вид, который легко найти с помощью (63). Полученное Ω и разложения для ρ' , T' подставим в (55), (56) и учтем формулы (57). Тогда уравнения (55), (56) принимают соответственно форму:

$$\sum_{l,i} A_{l,i} \cos(k_{l,i} z - \omega_{l,i} t + q_l \alpha) = 0, \\ \sum_{l,i} B_{l,i} \cos(k_{l,i} z - \omega_{l,i} t + q_l \alpha) = 0, \quad (64)$$

где аналогично предыдущему разделу $l = 0, 1$; $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ($l = i = 0$ исключено), и $q_0 = 0$, $q_1 = 1$.

Уравнения (64) удовлетворяются при $A_{l,i} = 0$, $B_{l,i} = 0$ для всех l, i . Таким путем из (55) получаем

$$\tilde{T}_{l,i} = \tilde{\rho}_{l,i} \frac{u_{l,i}^2 \frac{\partial s}{\partial p} \Big|_T}{s^2 \frac{\rho_s}{\rho_n} - u_{l,i}^2 \frac{C_p}{T}}, \quad (65)$$

где $u_{l,i} = \omega_{l,i}/k_{l,i}$. А уравнение (56) приводит к следующей цепочке уравнений:

$$\tilde{\rho}_{0,1} \left(1 - \frac{u_{0,1}^2 C_p}{c_1^2 C_V} \right) - \tilde{T}_{0,1} \left(c_1^2 \frac{\partial \rho}{\partial T} \Big|_p \right) = \frac{\xi E_0}{2m} \tilde{\rho}_{0,2} 2k_0 \left(\frac{1}{1} - a + 1 \right), \quad (66)$$

$$\tilde{\rho}_{0,2} \left(1 - \frac{u_{0,2}^2 C_p}{c_1^2 C_V} \right) - \tilde{T}_{0,2} \left(c_1^2 \frac{\partial \rho}{\partial T} \Big|_p \right) = -\frac{\varepsilon - 1}{16\pi} E_0^2 + \\ + \frac{\xi E_0}{2m} \left[\tilde{\rho}_{0,1} k_0 \left(\frac{1}{2} + a - 1 \right) + \tilde{\rho}_{0,3} 3k_0 \left(\frac{1}{2} - a + 1 \right) \right], \quad (67)$$

$$\tilde{\rho}_{0,j} \left(1 - \frac{u_{0,j}^2 C_p}{c_1^2 C_V} \right) - \tilde{T}_{0,j} \left(c_1^2 \frac{\partial \rho}{\partial T} \Big|_p \right) = \\ = \frac{\xi E_0}{2m} \left[\tilde{\rho}_{0,j-1} k_{0,j-1} \left(\frac{1}{j} + a - 1 \right) + \tilde{\rho}_{0,j+1} k_{0,j+1} \left(\frac{1}{j} - a + 1 \right) \right], \quad (68)$$

$$\tilde{\rho}_{1,0} \left(1 - \frac{u_{1,0}^2 C_p}{c_1^2 C_V} \right) - \tilde{T}_{1,0} \left(c_1^2 \frac{\partial \rho}{\partial T} \Big|_p \right) = \\ = \frac{\xi E_0}{2m} \left[\tilde{\rho}_{1,-1} (k - k_0) \left(\frac{k_0}{k} + a - 1 \right) + \tilde{\rho}_{1,1} (k + k_0) \left(\frac{k_0}{k} - a + 1 \right) \right], \quad (69)$$

$$\tilde{\rho}_{1,i} \left(1 - \frac{u_{1,i}^2 C_p}{c_1^2 C_V} \right) - \tilde{T}_{1,i} \left(c_1^2 \frac{\partial \rho}{\partial T} \Big|_p \right) = \\ = \frac{\xi E_0}{2m} \left[\tilde{\rho}_{1,i-1} k_{1,i-1} \left(\frac{k_0}{k_{1,i}} + a - 1 \right) + \tilde{\rho}_{1,i+1} k_{1,i+1} \left(\frac{k_0}{k_{1,i}} - a + 1 \right) \right], \quad (70)$$

где $j = 3, 4, \dots$, $i = \pm 1, \pm 2, \dots$, и $u_{0,1} = u_{0,2} = \dots = u_{0,j} = c$. Уравнения (66)–(70) решаем как в разд. 2. Нужно в правую часть этих уравнений подставить

$$\tilde{\rho}_{l,i} = \frac{\partial \rho}{\partial p} \Big|_T \tilde{\rho}_{l,i} + \frac{\partial \rho}{\partial T} \Big|_p \tilde{T}_{l,i} = \frac{C_p}{c_1^2 C_V} \tilde{\rho}_{l,i} + \frac{\partial \rho}{\partial T} \Big|_p \tilde{T}_{l,i}, \quad (71)$$

и затем выразить $\tilde{T}_{l,i}$ через $\tilde{\rho}_{l,i}$ с помощью формулы (65). При малом ξ из (66)–(68) находим

$$\tilde{p}_{0,2} \approx \frac{\varepsilon - 1}{16\pi} \frac{E_0^2 C_V c_1^2}{C_p c^2}, \quad (72)$$

$$\tilde{p}_{0,1} \approx \frac{\xi E_0 k_0 (a-2)}{m c^2} \frac{C_V}{C_p} \tilde{p}_{0,2}, \quad (73)$$

$$\tilde{p}_{0,3} \approx \frac{\xi E_0 k_0 (2/3 - a)}{m c^2} \frac{C_V}{C_p} \tilde{p}_{0,2}. \quad (74)$$

Остальные $\tilde{p}_{0,j}$ очень малы: $\tilde{p}_{0,4} \sim \vartheta^2 \tilde{p}_{0,2}$, $\tilde{p}_{0,5} \sim \vartheta^3 \tilde{p}_{0,2}$, и так далее.

С помощью формул (65), (71) запишем (69), (70) в виде уравнений для $\tilde{p}_{1,i}$:

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{1,0} \frac{G_{1,0}}{C_p - \frac{u_{1,0}^2}{c_1^2}} = \\ = \frac{\xi E_0}{2m} \left[\tilde{p}_{1,-1} (k - k_0) \left(\frac{k_0}{k} + a - 1 \right) \frac{C_p (c_2^2 - u_{1,-1}^2)}{c_1^2 (c_2^2 C_V - u_{1,-1}^2 C_p)} + \right. \\ \left. + \tilde{p}_{1,1} (k + k_0) \left(\frac{k_0}{k} - a + 1 \right) \frac{C_p (c_2^2 - u_{1,1}^2)}{c_1^2 (c_2^2 C_V - u_{1,1}^2 C_p)} \right], \quad (75) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{1,i} \frac{G_{1,i}}{C_p - \frac{u_{1,i}^2}{c_1^2}} = \\ = \frac{\xi E_0}{2m} \left[\tilde{p}_{1,i-1} k_{1,i-1} \left(\frac{k_0}{k_{1,i}} + a - 1 \right) \frac{C_p (c_2^2 - u_{1,i-1}^2)}{c_1^2 (c_2^2 C_V - u_{1,i-1}^2 C_p)} + \right. \\ \left. + \tilde{p}_{1,i+1} k_{1,i+1} \left(\frac{k_0}{k_{1,i}} - a + 1 \right) \frac{C_p (c_2^2 - u_{1,i+1}^2)}{c_1^2 (c_2^2 C_V - u_{1,i+1}^2 C_p)} \right], \quad (76) \end{aligned}$$

где $i = \pm 1, \pm 2, \dots$, и введено обозначение

$$G_{l,i} = \left(\frac{u_{l,i}^2}{c_1^2} - 1 \right) \left(\frac{u_{l,i}^2}{c_2^2} - 1 \right) + \frac{C_V}{C_p} - 1. \quad (77)$$

При малом ϑ из (76) следуют рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{1,i} \approx \frac{\xi E_0}{2m} \tilde{p}_{1,i-1} k_{1,i-1} \left(\frac{k_0}{k_{1,i}} + a - 1 \right) \times \\ \times \frac{c_2^2 C_V - u_{1,i}^2 C_p}{c_2^2 C_V - u_{1,i-1}^2 C_p} \frac{c_2^2 - u_{1,i-1}^2}{c_1^2 c_2^2 G_{1,i}}, \quad (78) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{1,-i} \approx \frac{\xi E_0}{2m} \tilde{p}_{1,-i+1} k_{1,-i+1} \left(\frac{k_0}{k_{1,-i}} - a + 1 \right) \times \\ \times \frac{c_2^2 C_V - u_{1,-i}^2 C_p}{c_2^2 C_V - u_{1,-i+1}^2 C_p} \frac{c_2^2 - u_{1,-i+1}^2}{c_1^2 c_2^2 G_{1,-i}} \quad (79) \end{aligned}$$

($i = 1, 2, \dots$), позволяющие выразить $\tilde{p}_{1,\pm i}$ через $\tilde{p}_{1,0}$. Как и в разд. 2, величину $\tilde{p}_{1,0}$ считаем известной. Подставим $\tilde{p}_{1,1}$ (78) и $\tilde{p}_{1,-1}$ (79) в уравнение (75), сократим обе части уравнения на $\tilde{p}_{1,0}$ и найдем дисперсионное соотношение

$$G_{1,0} \equiv \left(\frac{u^2}{c_1^2} - 1 \right) \left(\frac{u^2}{c_2^2} - 1 \right) + \frac{C_V}{C_p} - 1 = \frac{\chi}{c_2^2} \left(\frac{\xi E_0}{2m} \right)^2, \quad (80)$$

где $u \equiv u_{1,0}$ и

$$\begin{aligned} \chi \approx \frac{c_2^2 - u^2}{c_1^4} \left\{ [k_0 + (a-1)k][ak_0 - (a-1)k] \frac{c_2^2 - u_{1,-1}^2}{c_2^2 G_{1,-1}} + \right. \\ \left. + [k_0 - (a-1)k][ak_0 + (a-1)k] \frac{c_2^2 - u_{1,1}^2}{c_2^2 G_{1,1}} \right\}. \quad (81) \end{aligned}$$

При $a = 1$ получаем

$$\chi \approx \frac{k_0^2}{c_1^4} (c_2^2 - u^2) \left\{ \frac{c_2^2 - u_{1,-1}^2}{c_2^2 G_{1,-1}} + \frac{c_2^2 - u_{1,1}^2}{c_2^2 G_{1,1}} \right\}. \quad (82)$$

Для жидкого ${}^4\text{He}$ величина $C_p/C_V - 1$ очень мала: $0 < C_p/C_V - 1 \lesssim 0,0005$ для температур He II и давлений $\lesssim 0,1$ атм [35,39]. Поэтому (80) удобно записать в виде

$$\left(\frac{u^2}{c_1^2} - 1 \right) \left(\frac{u^2}{c_2^2} - 1 \right) = 1 - \frac{C_V}{C_p} + \frac{\chi}{c_2^2} \left(\frac{\xi E_0}{2m} \right)^2 \equiv 2\delta_u, \quad (83)$$

где δ_u малое ($0 < \delta_u \ll 1$) при достаточно малом ϑ . Из (83) следуют решения для скоростей первого и второго звуков:

$$|u| \approx c_1 \left(1 + \frac{\delta_u}{c_1^2/c_2^2 - 1} \right), \quad (84)$$

$$|u| \approx c_2 \left(1 + \frac{\delta_u}{c_2^2/c_1^2 - 1} \right). \quad (85)$$

Мы нашли решения для малых колебаний давления в сверхтекучем диэлектрике, помещенном в электрическое поле $\mathbf{E} = E_0 \mathbf{i}_z \sin(k_0 z - \omega_0 t)$.

Проверим, переходят ли решения для He II в решения для He I при $\rho_s \rightarrow 0$ ($c_2 \rightarrow 0$). При $C_p = C_V$ и $c_2 \rightarrow 0$ из (80) следует (33). Полагая в (81) $c_2 \rightarrow 0$ и $u \rightarrow c_1$, легко видеть, что формула (81) переходит в (34). В действительности $C_p \neq C_V$, поэтому решения для He II не переходят точно в решения для He I. Это связано с тем, что первый звук в He II не вполне тождествен обычному звуку в He I.

Из формул (78), (79) и (81) следует, что величины $\tilde{p}_{1,\pm 1}$ и χ должны резонансно возрастать при $G_{1,\pm 1} \rightarrow 0$.

Чтобы найти решения в окрестности резонанса, положим $G_{1,-1} = 2\delta$ (или $G_{1,1} = 2\delta$). Как и в предыдущем разделе, считаем $|\delta|$ малым, но не слишком ($1 - C_V / C_p \ll |\delta| \ll 1$). Тогда условие $G_{1,-1} = 2\delta$ эквивалентно четырем возможным решениям для $u_{1,-1}$:

$$u_{1,-1} \approx \pm c_1 \left(1 + \frac{\delta_{1,-1}}{c_1^2 / c_2^2 - 1} \right), \quad (86)$$

$$u_{1,-1} \approx \pm c_2 \left(1 + \frac{\delta_{1,-1}}{c_2^2 / c_1^2 - 1} \right), \quad (87)$$

где $2\delta_{1,-1} = 2\delta + 1 - C_V / C_p$. Аналогично для условия $G_{1,1} = 2\delta$. При анализе этих решений нужно учесть, что в (84) и (85) фазовая скорость u может быть положительной и отрицательной. Таким путем для моды $\tilde{p}_{1,-1}$ находим следующие околорезонансные решения с положительным и не слишком большим (фононным) значением k :

$$k_{1,-1} \approx k \approx \frac{ck_0}{c_1 + c_2}, \quad \omega_{1,-1} \approx -\frac{c_1\omega_0}{c_1 + c_2}, \quad u_{1,-1} \approx -c_1, \quad u \approx c_2, \quad (88)$$

$$k_{1,-1} \approx k \approx \frac{ck_0}{c_1 - c_2}, \quad \omega_{1,-1} \approx -\frac{c_1\omega_0}{c_1 - c_2}, \quad u_{1,-1} \approx -c_1, \quad u \approx -c_2, \quad (89)$$

$$k_{1,-1} \approx k \approx \frac{ck_0}{c_1 + c_2}, \quad \omega_{1,-1} \approx -\frac{c_2\omega_0}{c_1 + c_2}, \quad u_{1,-1} \approx -c_2, \quad u \approx c_1, \quad (90)$$

$$k_{1,-1} \approx k \approx \frac{ck_0}{2c_2}, \quad \omega_{1,-1} \approx -\frac{\omega_0}{2}, \quad u_{1,-1} \approx -c_2, \quad u \approx c_2, \quad (91)$$

$$k_{1,-1} \approx k \approx \frac{ck_0}{c_1 - c_2}, \quad \omega_{1,-1} \approx \frac{c_2\omega_0}{c_1 - c_2}, \quad u_{1,-1} \approx c_2, \quad u \approx c_1, \quad (92)$$

$$k_{1,-1} \approx k \approx \frac{ck_0}{2c_1}, \quad \omega_{1,-1} \approx -\frac{\omega_0}{2}, \quad u_{1,-1} \approx -c_1, \quad u \approx c_1. \quad (93)$$

Резонанс (93) характеризуется также резонансным ростом величины $\chi \approx \frac{k_0^2 (c_1^2 - c_2^2)^2}{2\delta c_1^4 c_2^2}$ при $\delta \rightarrow 0$. В этом случае, согласно (83), (84) и (93), при $\delta \rightarrow 0$ резонансно изменяется скорость первого звука. Для решений (88) и (89) находим $\chi \approx -\frac{k_0^2}{c_1^2} (1 - C_V / C_p) [2\delta + 9^2 c_1^2 / (4c_2^2)]^{-1}$, здесь возможен резонанс для χ и скорости второго звука. Для решений (90)–(92) величина χ близка к константе при $\delta \rightarrow 0$ ($\chi \approx -k_0^2 / c_1^2$ для (90), (92) и

$$\chi \approx \frac{k_0^2 c_2^2}{(c_1^2 - c_2^2)^2} (1 - C_V / C_p) \left[1 - 9^2 \frac{c_1^4}{4(c_1^2 - c_2^2)^2} \right]^{-1} \text{ для (91)},$$

т.е. для χ нет резонанса.

Для моды $\tilde{p}_{1,1}$ получаем следующие околорезонансные решения:

$$k_{1,1} \approx k \approx \frac{ck_0}{c_1 + c_2}, \quad \omega_{1,1} \approx \frac{c_1\omega_0}{c_1 + c_2}, \quad u_{1,1} \approx c_1, \quad u \approx -c_2, \quad (94)$$

$$k_{1,1} \approx k \approx \frac{ck_0}{c_1 + c_2}, \quad \omega_{1,1} \approx \frac{c_2\omega_0}{c_1 + c_2}, \quad u_{1,1} \approx c_2, \quad u \approx -c_1, \quad (95)$$

$$k_{1,1} \approx k \approx \frac{ck_0}{2c_2}, \quad \omega_{1,1} \approx \frac{\omega_0}{2}, \quad u_{1,1} \approx c_2, \quad u \approx -c_2, \quad (96)$$

$$k_{1,1} \approx k \approx \frac{ck_0}{c_1 - c_2}, \quad \omega_{1,1} \approx -\frac{c_2\omega_0}{c_1 - c_2}, \quad u_{1,1} \approx -c_2, \quad u \approx -c_1, \quad (97)$$

$$k_{1,1} \approx k \approx \frac{ck_0}{2c_1}, \quad \omega_{1,1} \approx \frac{\omega_0}{2}, \quad u_{1,1} \approx c_1, \quad u \approx -c_1, \quad (98)$$

$$k_{1,1} \approx k \approx \frac{ck_0}{c_1 - c_2}, \quad \omega_{1,1} \approx \frac{c_1\omega_0}{c_1 - c_2}, \quad u_{1,1} \approx c_1, \quad u \approx c_2. \quad (99)$$

Функция $\chi(\delta)$ заметно изменяется при $\delta \rightarrow 0$ для ре-

шений (98) $\left(\chi \approx \frac{k_0^2 (c_1^2 - c_2^2)^2}{2\delta c_1^4 c_2^2} \right)$, и (99), (94)

($\chi \approx -\frac{k_0^2}{c_1^2} (1 - C_V / C_p) [2\delta + 9^2 c_1^2 / (4c_2^2)]^{-1}$). В последнем случае из-за малости величины $1 - C_V / C_p$ наблюдать рост χ вблизи резонанса ($\delta \rightarrow 0$) видимо сложно.

Если в формулах (88)–(93) и (94)–(99) заменить $k_0 \rightarrow ik_0$, $\omega_0 \rightarrow i\omega_0$, получим околорезонансные решения для $\tilde{p}_{1,-i}$ и $\tilde{p}_{1,i}$ соответственно ($i \geq 2$).

Отметим, что согласно (78), (79) величины $\tilde{p}_{1,i}$ и $\tilde{p}_{1,-i}$ ($i \geq 1$) должны резко возрастать также при $c_2^2 C_V - u_{1,i-1}^2 C_p \rightarrow 0$ и $c_2^2 C_V - u_{1,-i+1}^2 C_p \rightarrow 0$ соответственно (при этом для χ и других $\tilde{p}_{1,\pm i}$ нет резонанса). При $i = 2$ это приводит в решениям (90)–(92) и (95)–(97) (если в них заменить $k_0 \rightarrow (i-1)k_0$, $\omega_0 \rightarrow (i-1)\omega_0$, получим решения для $i > 2$). Таким образом, каждое из решений (90)–(92) и (95)–(97) соответствует двум близко расположенным резонансам. Чтобы их различить теоретически, нужно найти решения непосредственно в резонансных точках.

4. Основные физические следствия

Попытаемся понять физическую природу решений и обсудим, что можно наблюдать из найденных выше особенностей.

Оценим интенсивность найденных выше мод для He I (для He II результаты аналогичные). При малом ϑ из мод $(i\omega_0, ik_0)$ наиболее интенсивна мода $(2\omega_0, 2k_0)$. Это волна плотности, фазовая скорость которой равна скорости света. Для этой моды частота и волновой вектор в 2 раза больше значений для поля **E**. Будем считать критическим такое поле $E_0 = E_0^c$, для которого $\tilde{\rho}_{0,2} = 0,01\rho_0$ (при $E_0 > E_0^c$ возмущение плотности $\tilde{\rho}_{0,2}$ становится достаточно большим, так что наше приближение малых возмущений теряет силу). Используя параметры He II $\bar{\rho}_0 = 3,58 \text{ \AA}$, $d_0 \approx -1,88 \cdot 10^{-5} |e| \text{ \AA}$ [5], из формулы (26) находим $E_0^c \approx 3,4 \cdot 10^{10} \sqrt{\Gamma/\text{см}} / c \approx 10^{15} \text{ В/м}$. Это очень сильное поле. Для сравнения, в экспериментах [27,28] поле E_0 вблизи резонатора было на 11 порядков меньше. Из формул (27), (28) при $E_0 = E_0^c$, $a = 1$ и $L = 1 \text{ см}$ получаем $\tilde{\rho}_{0,1} \sim \tilde{\rho}_{0,3} \sim 10^{-21} \tilde{\rho}_{0,2}$ (при этом мы использовали резонансное $k_0 \approx 2c_1k/c$ и $k = \pi/L$, см. ниже).

Из гибридных мод $(\omega \pm i\omega_0, k \pm ik_0)$ наиболее интенсивны моды $(\omega \pm \omega_0, k \pm k_0)$. Из формулы (31) при $E_0 = E_0^c$, $a = 1$, $k_0 \approx 2c_1k/c$, $k = \pi/L$, $L = 1 \text{ см}$, и $|u_{1,1}| = c_1(1 + \delta)$ (резонанс для (1, 1)-моды) получаем $\tilde{\rho}_{1,1} \approx (-9/4\delta)\tilde{\rho}_{1,0} \approx (6 \cdot 10^{-10}/\delta)\tilde{\rho}_{1,0}$. Здесь видна также малость $|\delta|$: $\delta \approx -2,5 \cdot 10^{-9}$. Для резонанса (1, -1)-моды оценка аналогичная. То есть все гибридные волны намного слабее затравочной акустической волны $\tilde{\rho}_{1,0}$. Эти оценки показывают, что при реалистичных полях $E_0 \ll E_0^c$ все волны-спутники ($(0, i)$ -моды и $(1, i)$ -моды) чрезвычайно слабые. При этом $(1, i)$ -моды могут в принципе стать наблюдаемыми, если частота ω_0 очень близка к резонансной или если амплитуда $\tilde{\rho}_{1,0}$ затравочной акустической (или тепловой, для He II) волны (ω, k) искусственно сделана очень большой.

Для фазовой скорости u акустической волны в He I мы нашли, что $u^2 = c_1^2 + (\delta u)^2$, где $\delta u = \sqrt{\chi} \frac{\xi E_0}{2m}$. Оценка для использованных выше параметров дает $\delta u \approx c_1 9/\sqrt{8\delta} \sim 10^{-9} c_1/\sqrt{\delta}$ (вблизи резонанса). Такая величина может быть наблюдаемой (т.е. $\sim c_1$) только в малой окрестности точки резонанса. Для второго звука $\chi \sim 1 - C_T/C_p$, что подавляет δu . Как известно из теории колебаний [40], в точке резонанса амплитуда колебаний должна расти со временем до тех пор, пока рост не будет остановлен нелинейной вязкостью и нелинейными поправками, которыми мы пренебрегли при решении (1), (2). Кроме того, линейная вязкость приво-

дит к тому, что резонанс существует только при поле E_0 , большем некоторого порогового.

Вблизи резонансов гибридные моды $(\omega \pm \omega_0, k \pm k_0)$ резко усиливаются. А в резонансах они характеризуются фазовой скоростью, равной скорости первого или второго звука. Это естественно: энергия электрической волны легко переходит в энергию гибридной моды, если последняя подобна собственной моде системы. Таким образом, точка резонанса соответствует пересечению дисперсионных кривых звуковой и гибридной мод (см. рис. 1). В этом случае должно, по-видимому, происходить переакустизация (гибридизация) двух кривых. Чтобы выяснить это, следует аккуратно найти решения вблизи резонанса.

Поглощение энергии электромагнитной волны, происходящее при резонансном усилении гибридной моды, имеет квантовую природу. Из условий для резонанса можно попытаться установить характер процесса. Например, для резонансов (42) и (93) имеем $u_{1,-i} \approx -c_1$ и $u \approx c_1$, поэтому $\omega_{1,-i} \equiv \omega - i\omega_0 = uk - ick_0 = u_{1,-i}k_{1,-i} \approx u_{1,-i}k \approx -c_1k$ (здесь учтено, что $k_0 \ll k$), откуда $ichk_0 \approx 2c_1\hbar k$. Такое же уравнение получается и для резонансов (43), (98). При $i = 1$ получаем $ch\hbar k_0 \approx 2c_1\hbar k$. Это указывает на то, что такой резонанс соответствует распаду фотона с энергией $ch\hbar k_0$ на два фотона

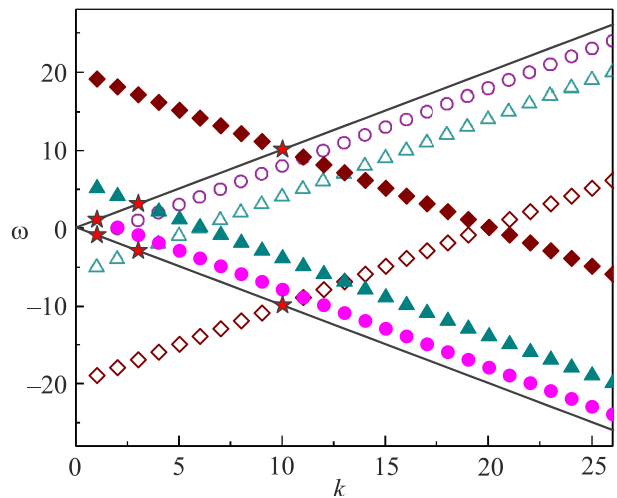


Рис. 1. Законы дисперсии $\omega_{1,\pm 1}(k_{1,\pm 1})$ гибридных мод (1, -1) и (1, 1) для He I при разных ω_0 : мода (1, -1) для $\omega_0 = 2\pi c_1/L$ (○), $\omega_0 = 6\pi c_1/L$ (△), и $\omega_0 = 20\pi c_1/L$ (◇); мода (1, 1) для $\omega_0 = 2\pi c_1/L$ (●), $\omega_0 = 6\pi c_1/L$ (▲), и $\omega_0 = 20\pi c_1/L$ (◆). Точки резонансов (★) соответствуют пересечению рассматриваемых мод (1, ±1) с акустическим законом дисперсии $\omega = \pm c_1 k$ (сплошные линии), характерным для среды без поля **E**. $\omega_{1,\pm 1}$ и $k_{1,\pm 1}$ приведены в безразмерных единицах, для которых $c_1 = 2\pi/L = 1$; значения ω_0 соответствуют формуле (104) с $i = 1$ и $j = 1, 3, 10$. В формуле $\omega_{1,\pm 1} = uk \pm ck_0$ полагаем $u = c_1$ для моды (1, -1) и $u = -c_1$ для моды (1, 1); при этом не учтено, что в точках резонанса значения $|u|$ должны заметно отличаться от c_1 .

с энергией $c_1\hbar k$ у каждого. Поскольку $k_0 \sim 10^{-6}k$, при малых $k \lesssim 10\pi/L$ закон сохранения импульса может выполняться лишь в случае, если фононы имеют импульсы $\hbar\mathbf{k}$ и $-\hbar\mathbf{k}$, а импульс фотона передается всей жидкости. Поэтому мы предполагаем, что резонансы (42), (93) при $i=1$ и малых k соответствуют следующим точным уравнениям:

$$c\hbar k_0 = u\hbar k + u\hbar k + P_{\text{liq}}^2/(2M), \quad (100)$$

$$\hbar\mathbf{k}_0 = \hbar\mathbf{k} - \hbar\mathbf{k} + \mathbf{P}_{\text{liq}} = \mathbf{P}_{\text{liq}}, \quad (101)$$

где $P_{\text{liq}}^2/(2M)$ и \mathbf{P}_{liq} — энергия и импульс жидкости как целого, M — масса жидкости, u — скорость первого звука в среде с полем \mathbf{E} . Такой процесс подобен эффекту Мессбауэра [41].

Эффект Мессбауэра наблюдался для кристаллов. В этом эффекте импульс передается всему кристаллу из-за жесткости последнего. В нашем случае импульс должен передаваться жидкости, которая не обладает жесткостью. Это, по-видимому, возможно ввиду того, что процесс квантовый и охватывает всю систему: поскольку λ фонона порядка размера системы L , а λ фотона много больше L .

Резонансы (42), (43), (93), и (98) с произвольным i соответствуют условиям

$$i\hbar k_0 = u\hbar k + u\hbar k + (P_{\text{liq}})^2/(2M), \quad (102)$$

$$i\hbar\mathbf{k}_0 = \hbar\mathbf{k} - \hbar\mathbf{k} + \mathbf{P}_{\text{liq}}. \quad (103)$$

Здесь i фотонов с одинаковыми импульсами превращаются в два фонона с противоположными импульсами, а импульс отдачи $i\hbar k_0$ передается жидкости как целому. Ясно, что процесс с $i \geq 2$ и обратный процесс с произвольным i должны быть маловероятными. Заметим, что поскольку поле \mathbf{E} имеет вид бегущей волны, импульсы всех фотонов должны быть направлены в одну сторону.

Условия для резонансов (88) и (94) при произвольных i приводят к соотношению $i\hbar k_0 \approx c_1\hbar k + c_2\hbar k$. Это можно трактовать как слияние i фотонов с образованием фонона и «кванта» тепловой волны, с импульсами $\hbar\mathbf{k}$ и $-\hbar\mathbf{k}$. Подобным образом, резонансы (89) и (99) дают соотношение $i\hbar k_0 + c_2\hbar k \approx c_1\hbar k$, которое можно трактовать как слияние i фотонов и «кванта» тепловой волны с образованием фонона. Физичность этих трактовок вызывает сомнение, поскольку тепловая волна является классической структурой — волной в газе квазичастиц. Однако стоит проверить экспериментально, нет ли в спектре электромагнитных волн линий поглощения при соответствующих ω_0 .

Другие резонансы соответствуют второму звуку: $u_{1,\pm i} \approx \pm c_2$. Рассмотрим резонансы для мод $(\omega \pm \omega_0, k \pm k_0)$ для Не II. Это решения (90)–(92) и (95)–(97). Их можно объединить в пары (90), (95); (91), (96); и

(92), (97). В каждой паре волны обладают одинаковым волновым вектором, а фазовые скорости волн отличаются только знаком. Сумма таких волн образует стоячую волну, если константы α для обеих волн близки (последнее возможно, если в системе много фононов или волн второго звука). Стоячая волна устойчива, если ее длина волны $\lambda = 2L/j$, где $j = 1, 2, 3, \dots$ и L — длина резонатора. Поэтому должно выполняться $k_{1,\pm 1} = 2\pi/\lambda = \pi j/L$, $|\omega_{1,\pm 1}| = c_2\pi j/L$. Из (90)–(92) следует, что в этом случае $\omega_0 = 2\pi j c_2/L$ или $\omega_0 = \pi j(c_1 \pm c_2)/L$. Учет резонансов для мод $(\omega \pm i\omega_0, k \pm ik_0)$ с $i > 1$ приводит к более общим формулам: $\omega_0 = 2\pi j c_2/(iL)$ или $\omega_0 = \pi j(c_1 \pm c_2)/(iL)$, $i = 1, 2, \dots$. Однако все эти резонансы подавляются множителями $c_2^2 C_V - u_{1,i}^2 C_p$ в (78) и $c_2^2 C_V - u_{1,-i}^2 C_p$ в (79), которые близки к нулю при $u_{1,\pm i} \approx c_2$ (условии, которое должно выполняться для второго звука). В эксперименте [32] проверялась полоса частот $\omega_0 = 2\pi j c_2/4L$, $j = 1-8$, включающая наши теоретические частоты $2\pi j c_2/(iL)$ с $j = 1, i = 1, 2, 3, 4$, и другие. При этом второй звук не зафиксирован. Такой результат согласуется с нашим анализом, учитывая отмеченное выше подавление и тот факт, что волна второго звука может существовать лишь при резонансных ω_0 (а в эксперименте [32] поиск таких узких полос ω_0 не проводился).

Для гибридных мод со скоростью первого звука ($u_{1,\pm 1} \approx \pm c_1$) такого подавления нет. Поэтому вблизи резонанса такие моды должны быть интенсивными. Из формул (88), (89), (93) и (94), (98), (99) находим, что соответствующая гибридной моде стоячая волна первого звука с $\lambda = 2L/j$ возможна при $k_{1,\pm 1} = \pi j/L \approx k$, $|\omega_{1,\pm 1}| = c_1\pi j/L$, $\omega_0 = 2\pi j c_1/L$ (или $\omega_0 = \pi j(c_1 \pm c_2)/L$). Учет резонансов для мод $(\omega \pm i\omega_0, k \pm ik_0)$ с $i > 1$ приводит к следующим формулам для Не II:

$$\omega_0 = 2\pi j c_1/(iL) \approx 2\omega/i, \quad (104)$$

или

$$\omega_0 = \pi j(c_1 \pm c_2)/(iL) \approx (\omega_1 \pm \omega_2)/i, \quad (105)$$

где $i, j = 1, 2, \dots$. Для Не I справедливо только соотношение (104). Соотношения (104), (105) между частотами характерны для параметрического резонанса [40]. Таким образом, если частота электрического поля близка к значению (104) или (105), акустический датчик должен фиксировать слабый первый звук с частотой $|\omega_{1,\pm i}| = c_1\pi j/L$, равной $i\omega_0/2$ или $i\omega_0 c_1/(c_1 \pm c_2)$. С ростом i ширина $\Delta\omega$ резонанса обычно сильно уменьшается [40] (для наших решений $\Delta\omega_{i,j} \sim |\mathcal{G}^i| \omega_{i,j}^{\text{res}}$; хотя учет малых нелинейных поправок, включая трение, обычно сильно влияет на $\Delta\omega_{i,j}$ и может увеличить ее на много порядков). Поэтому наблюдать можно видимо только резонансы с $i=1$. Для j такого ограничения нет. Но в эксперименте лучше вначале искать моды с небольшими j ($\lesssim 10$), поскольку стоячие волны с такими j более устойчивы. Например, частоте $\omega_0 = 2\pi c_1/L$

соответствует формула (104) с $i, j = 1$, или $i, j = 2$, и так далее. В этом случае должна возникать волна первого звука с $\omega = c_1\pi/L$ и очень слабые волны с $\omega = j c_1\pi/L$ ($j = 2, 3, \dots$). Наибольшее усиление должна получать гибридная мода, соответствующая самой точке резонанса. Амплитуды $\tilde{\rho}_{1,\pm i}$ в точке резонанса мы не нашли. Если в точке резонанса $\tilde{\rho}_{1,\pm 1} \gg \tilde{\rho}_{1,0}$, тогда гибридная волна с $\omega = c_1\pi/L$ достаточно интенсивна и может быть наблюдаемой.

Заметим, что поскольку гибридные моды всегда сопровождают акустическую (или тепловую) моду (1, 0), их можно рассматривать как «шубу», в которую «одежда» акустическая (тепловая) волна в присутствии электрического поля $\mathbf{E} = E_0 \mathbf{i}_z \sin(k_0 z - \omega_0 t)$. Мы рассматривали только акустические моды, бегущие вдоль поля \mathbf{E} . Ясно, что для мод, распространяющихся не вдоль \mathbf{E} , также должны возникать гибридные волны-спутники. Скорее всего, для них тоже существуют резонансы. Нейтрон, пролетающий сквозь жидкость, должен рожать именно одетый фонон. Поэтому из спектра рассеяния нейтронов мы найдем закон дисперсии одетых фононов. В этом случае \mathbf{k} фонона должен квантоваться как обычно, так как закон квантования определяется граничными условиями. Но энергия одетого фонона должна отличаться от энергии «голого» согласно формуле $E^{\text{phon}}(k) = E_n^{\text{phon}}(k) + \alpha_1(k)E_0 + \alpha_2(k)E_0^2 + \dots$, где $E_n^{\text{phon}} = c_1 k$ — энергия голого фонона, а константы α_j можно найти из микроскопического расчета. Последние должны быть ничтожно малыми (кроме случаев, когда k и k_0 являются резонансными) и не должны влиять на теплоемкость системы.

Формулы (104), (105) получены на основе классического подхода разд. 2 и 3. Квантовые формулы (102), (103) приводят к условию

$$\omega_0 = \frac{2\pi j u}{iL} \left[1 + \frac{u \hbar k}{Mc^2} \right], \quad (106)$$

где $k = \pi j/L$ и предполагается, что \mathbf{k} и \mathbf{k}_0 сонаправлены. Отличие формул (104) и (106) связано в основном с отличием значений u и c_1 (это скорости одетого и голого фононов, соответственно), поскольку поправка $u \hbar k / (Mc^2)$ ничтожно мала для макроскопического тела. Согласно нашему анализу, вблизи резонансов значение u должно заметно отличаться от c_1 . Тем не менее мы думаем, что формулы (104) и (106) описывают один и тот же резонанс. Отличие этих формул может быть связано с тем, что классический подход разд. 2, 3 несколько искажает точные квантовые решения.

В общем случае, когда в формулах (102), (103) \mathbf{k} и \mathbf{k}_0 не сонаправлены, вместо (106) получим

$$\omega_0 = \frac{2k_{j_x, j_y, j_z} u}{i} \left[1 + \frac{u \hbar k_{j_x, j_y, j_z}}{Mc^2} \right], \quad (107)$$

где $k_{j_x, j_y, j_z} = \pi \sqrt{\frac{j_x^2}{L_x^2} + \frac{j_y^2}{L_y^2} + \frac{j_z^2}{L_z^2}}$, $j_x, j_y, j_z = 0, 1, 2, 3, \dots$

, L_x, L_y, L_z — размеры системы (выше мы полагали $L_z = L$). Вероятности соответствующих процессов могут быть очень малыми. Наблюдение таких линий поглощения означало бы наблюдение дискретного энергетического спектра квантовой жидкости, $E = \hbar u k_{j_x, j_y, j_z}$. Такой спектр пока не наблюдался, хотя дискретные спектры отдельных атомов получены более 100 лет назад.

Резонансы (104)–(106) можно наблюдать также путем измерения электрического сигнала, поскольку мода ($\omega \pm i\omega_0, k \pm ik_0$) должна генерировать электрическое поле, удовлетворяющее уравнениям [1]

$$\text{div } \mathbf{D} = 0, \quad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}_s \quad (108)$$

(последнее найдено в [16]). Для бесконечной системы, свойства которой зависят только от координаты z , уравнения (108) имеют решение $\mathbf{D} = D_0 \mathbf{i}_z$, $\varepsilon E \mathbf{i}_z = D_0 \mathbf{i}_z - 4\pi P_s \mathbf{i}_z$, где $D_0 = \text{const}$. Учитывая (5), ясно, что волна плотности должна индуцировать волну поля \mathbf{E} с теми же ω, k . Поэтому резонанс для волны плотности ($\omega \pm i\omega_0, k \pm ik_0$) должен сопровождаться электрическим полем \mathbf{E} той же частоты $\omega_{1,\pm i}$ и с тем же волновым вектором $k_{1,\pm i}$ (см. формулы (42), (43) для He I и (88), (89), (93), (94), (98), (99) для He II; чтобы получить решения с $i \geq 2$ для He II, нужно заменить в формулах $k_0 \rightarrow ik_0$, $\omega_0 \rightarrow i\omega_0$; при этом ω_0 дается формулами (104) или (105)). Аналогично можно попытаться задетектировать моду (0, 2) (согласно оценкам разд. 2,

эта мода создает поле $\mathbf{E}_s \sim 9 \frac{(\varepsilon - 1)c_1^2}{8\pi c^2} E_0 \mathbf{i}_z$ с частотой $2\omega_0$). Эти свойства показывают также, что очень слабая «шуба» должна быть у фонона и в отсутствии внешнего поля \mathbf{E} . Поскольку фонон создает колебания плотности, что приводит к спонтанной поляризации среды и электрическому полю.

Важно, что волновой вектор фонона при нулевых граничных условиях квантуется по закону $k = \pi j/L$ [42,43], который *совпадает* с использованным выше условием $\lambda = 2L/j$ для стоячей волны первого звука. Поэтому это условие должно выполняться.

Мы не выписывали решения для резонансов с большими значениями $|k_{1,i}|$ (за исключением (41)). Не исключено, однако, что они экспериментально реализуемы при очень больших λ электрической волны.

Выше мы нашли решения для колебательных мод бесконечной системы, т.е. без учета границ. Одномерное поле $\mathbf{E} = E_0 \mathbf{i}_z \sin(k_0 z - \omega_0 t)$ можно создать только в резонаторе с размерами $L_z \ll L_x, L_y$. Если это не выполняется, то поле \mathbf{E} должно зависеть от трех координат [16,44], и решения должны отличаться от получен-

ных выше. Поскольку границы изменяют частоту второго звука только на 2–10% [20,32], мы ожидаем, что и найденные выше решения для частот изменятся при учете границ не сильно. А если выполняется $L_z \ll L_x, L_y$, наши решения должны быть верны с хорошей точностью.

Если эксперимент подтвердит эти решения, интересно было бы выяснить, выполняется ли соотношение $a = 1$.

5. Заключение

Согласно данному исследованию, внешнее поле $\mathbf{E} = E_0 \mathbf{i}_z \sin(k_0 z - \omega_0 t)$ в присутствии фононов (или температурных волн, для He II) должно создавать в неполярном жидком диэлектрике набор гибридных акусто-электрических или тепло-электрических волн (акуэлоны/«теплоэлоны»), который сопровождает каждую волну первого (второго) звука. Такие волны-спутники очень слабые и ненаблюдаемые. Но при определенных частотах фонона (ω) и поля \mathbf{E} (ω_0) одна из волн-спутников должна резонансно усиливаться и может быть наблюдаемой. Согласно нашим решениям, гибридная волна должна быть интенсивной в случае, если ω_0 очень близка к резонансной $\omega_{i,j}^{\text{res}}$: $|\omega_0 - \omega_{i,j}^{\text{res}}| \equiv \Delta\omega_{i,j} \sim |\mathcal{G}^i| \omega_{i,j}^{\text{res}}$. При этом поле \mathbf{E} должно быть достаточно сильным, чтобы имелось много квантов поля с частотами в интервале $[\omega_{i,j}^{\text{res}} - \Delta\omega_{i,j}, \omega_{i,j}^{\text{res}} + \Delta\omega_{i,j}]$.

Резонансы имеют параметрический характер. По-видимому, на энергиях $\hbar\omega_{i,j}^{\text{res}}$, равных удвоенным энергиям нижних энергетических уровней системы (см. (104), (107)), в спектре электромагнитного излучения должны наблюдаться линии поглощения. Наблюдение таких линий означало бы наблюдение дискретной структуры энергетического спектра жидкости. Это представляет особый интерес, так как такая структура напрямую не наблюдалась, хотя никто не сомневается в ее существовании. При этом резонансы должны соответствовать поглощению одного или нескольких квантов электромагнитного поля с отдачей импульса всей жидкости, подобно эффекту Мессбауэра. Раньше эффект Мессбауэра наблюдался лишь в кристаллах, насколько мы знаем.

Найдены резонансные частоты, а также значения амплитуд вдали от резонансов. Важно найти амплитуды в точках резонанса, учитывая в уравнениях малые нелинейные поправки, включая трение. Такие решения соответствовали бы реальным системам. Основной вопрос — сохранятся ли найденные выше особенности и будут ли они наблюдаемыми.

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Физматлит, Москва (2005).
2. И.Е. Тамм, *Основы теории электричества*, Физматлит, Москва (2003).
3. L.A. Melnikovsky, *J. Low Temp. Phys.* **148**, 559 (2007).

4. В.Д. Нацик, *ФНТ* **33**, 1319 (2007) [*Low Temp. Phys.* **33**, 999 (2007)].
5. M.D. Tomchenko, *J. Low Temp. Phys.* **158**, 854 (2010).
6. С.И. Шевченко, А.С. Рукин, *ФНТ* **36**, 748 (2010) [*Low Temp. Phys.* **36**, 596 (2010)].
7. V.P. Mineev, *J. Low Temp. Phys.* **162**, 686 (2011).
8. И.Н. Адаменко, Е.К. Немченко, *ФНТ* **43**, 1295 (2017) [*Low Temp. Phys.* **43**, 1038 (2017)].
9. В.Д. Нацик, *ФНТ* **34**, 625 (2008) [*Low Temp. Phys.* **34**, 493 (2008)].
10. С.И. Шевченко, А.С. Рукин, *Письма в ЖЭТФ* **90**, 46 (2009).
11. С.И. Шевченко, А.С. Рукин, *ФНТ* **36**, 186 (2010) [*Low Temp. Phys.* **36**, 146 (2010)].
12. И.Н. Адаменко, Е.К. Немченко, *ФНТ* **42**, 335 (2016) [*Low Temp. Phys.* **42**, 258 (2016)].
13. W. Byers Brown and D.M. Whisnant, *Mol. Phys.* **25**, 1385 (1973).
14. D.M. Whisnant and W. Byers Brown, *Mol. Phys.* **26**, 1105 (1973).
15. V.M. Loktev and M.D. Tomchenko, *J. Phys. B* **44**, 035006 (2011).
16. M.D. Tomchenko, *Ukr. J. Phys.* **64**, 509 (2019).
17. А.С. Рыбалко, *ФНТ* **30**, 1321 (2004) [*Low Temp. Phys.* **30**, 994 (2004)].
18. A.S. Rybalko, V.A. Tikhiiy, A.S. Neoneta, and K.R. Zhekov, arXiv:1108.1272 [cond-mat.other].
19. T.V. Chagovets, *Physica B* **488**, 62 (2016).
20. H. Yayama, Y. Nishimura, H. Uchiyama, H. Kawai, J.-P. van Woensel, and A.G. Hafez, *Fiz. Nizk. Temp.* **44**, 1386 (2018) [*Low Temp. Phys.* **44**, 1090 (2018)].
21. K.V. Grigorishin and B.I. Lev, *Ukr. J. Phys.* **53**, 645 (2008).
22. Е.Д. Гутлянский, *ФНТ* **35**, 956 (2009) [*Low Temp. Phys.* **35**, 748 (2009)].
23. Э.А. Пашицкий, А.А. Гурин, *ЖЭТФ* **138**, 1103 (2010).
24. M.D. Tomchenko, *Phys. Rev. B* **83**, 094512 (2011).
25. Ю.М. Полуэктов, А.С. Рыбалко, *ФНТ* **39**, 992 (2013) [*Low Temp. Phys.* **39**, 770 (2013)].
26. T.V. Chagovets, *J. Low Temp. Phys.* **187**, 383 (2017).
27. A. Rybalko, S. Rubets, E. Rudavskii, V. Tikhiiy, S. Tarapov, R. Golovashchenko, and V. Derkach, *Phys. Rev. B* **76**, 140503(R) (2007).
28. А.С. Рыбалко, С.П. Рубец, Э.Я. Рудавский, В.А. Тихий, Ю.М. Полуэктов, Р.В. Головащенко, В.Н. Деркач, С.И. Тарапов, О.В. Усатенко, *ФНТ* **35**, 1073 (2009) [*Low Temp. Phys.* **35**, 837 (2009)].
29. V.M. Loktev and M.D. Tomchenko, *Ukr. J. Phys.* **56**, 49 (2011).
30. Э.А. Пашицкий, В.И. Пентегов, *ЖЭТФ* **142**, 305 (2012).
31. V.D. Khodusov and A.S. Naumovets, *Condens. Matter Phys.* **15**, 43601 (2012).
32. J.-P. van Woensel, H. Yayama, *Fiz. Nizk. Temp.* **45**, 434 (2019) [*Low Temp. Phys.* **45**, 376 (2019)].
33. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Наука, Москва (1988).

34. С. Паттерман, *Гидродинамика сверхтекучей жидкости*, Мир, Москва (1978).
35. Б.Н. Есельсон, В.Н. Григорьев, В.Г. Иванцов, Э.Я. Рудаковский, Д.Н. Саникадзе, И.А. Сербин, *Свойства жидкого и твердого гелия*, Издательство стандартов, Москва (1978).
36. E.C. Svensson, V.F. Sears, A.D.B. Woods, P. Martel, *Phys. Rev. B* **21**, 3638 (1980).
37. Л. Ландау, *ЖЭТФ* **11**, 592 (1941).
38. Н.Н. Боголюбов, *К вопросу о гидродинамике сверхтекучей жидкости*, препринт Р-1395, ОИЯИ, Дубна (1963).
39. E.R. Grilly, *Phys. Rev.* **149**, 97 (1966).
40. Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский, *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, Физматлит, Москва (1958).
41. R.L. Mössbauer, *Z. Phys.* **151**, 124 (1958).
42. M.A. Cazalilla, *EPL* **59**, 793 (2002).
43. M.D. Tomchenko, *Ukr. J. Phys.* **64**, 250 (2019).
44. A.N. Morozovska, E.A. Eliseev, and M.D. Glinchuk, *Physica B* **387**, 358 (2007).

Акустичні моди в He I та He II у присутності змінного електричного поля

М.Д. Томченко

Шляхом розв'язання рівнянь звичайної та дворідинної гідродинаміки досліджено коливальні моди в ізотропних неполярних діелектриках He I та He II у присутності змінного електричного поля $\mathbf{E} = E_0 \mathbf{i}_z \sin(k_0 z - \omega_0 t)$. Між електричним полем та коливаннями густини виникає «зачеплення», оскільки градієнт густини приводить до спонтанної поляризації \mathbf{P}_s , а електрична сила містить член $(\mathbf{P}_s \nabla) \mathbf{E}$. Аналіз показує, що швидкості хвиль першого та другого звуків, які розповсюджуються вздовж \mathbf{E} , змінюються відповідно до формули $u_j \approx c_j + \chi_j E_0^2$ (де $j = 1, 2$; c_j — швидкість j -го звуку при $E_0 = 0$, а χ_j — константа). Також знайдено, що поле \mathbf{E} сукупно зі звуковою (тепловою) хвилею (ω, k) повинні створювати в

He II гібридні акустоелектричні (теплоелектричні) хвилі густини $(\omega + l\omega_0, k + lk_0)$, де $l = \pm 1, \pm 2, \dots$. Амплітуди акустоелектричних хвиль та величина $|u_1 - c_1|$ дуже малі, але мають резонансно зростати за певних значень ω та ω_0 . Перший резонанс імовірно відповідає розпаду фотона на два фонони з віддачею імпульсу всій рідині. Тому в спектрі електромагнітного сигналу має спостерігатись вузька лінія поглинання, подібно до ефекту Мессбауера.

Ключові слова: перший звук, другий звук, спонтанна поляризація, діелектрик.

Acoustic modes in He I and He II in the presence of an alternating electric field

M.D. Tomchenko

By solving the equations of ordinary and two-fluid hydrodynamics, we study the oscillatory modes in isotropic nonpolar dielectrics He I and He II in the presence of an alternating electric field $\mathbf{E} = E_0 \mathbf{i}_z \sin(k_0 z - \omega_0 t)$. The electric field and oscillations of the density become “coupled,” since the density gradient causes a spontaneous polarization \mathbf{P}_s , and the electric force contains the term $(\mathbf{P}_s \nabla) \mathbf{E}$. The analysis shows that the field \mathbf{E} changes the velocities of first and second sounds, propagating along \mathbf{E} , by the formula $u_j \approx c_j + \chi_j E_0^2$ (where $j = 1, 2$; c_j is the velocity of the j -th sound for $E_0 = 0$, and χ_j is a constant). We have also found that the field \mathbf{E} jointly with a wave of the first (second) sound (ω, k) should create in He II hybrid acousto-electric (thermo-electric) density waves $(\omega + l\omega_0, k + lk_0)$, where $l = \pm 1, \pm 2, \dots$. The amplitudes of acousto-electric waves and the value of $|u_1 - c_1|$ are negligibly small, but should resonantly increase at certain ω and ω_0 . The first resonance apparently corresponds to the decay of a photon into two phonons with the momentum recoil to the whole liquid. Therefore, a narrow absorption line should be observed in the spectrum of the electromagnetic signal, like the Mössbauer effect.

Keywords: first sound, second sound, spontaneous polarization, dielectric.