

Эволюция фононных пучков конечных размеров в сверхтекучем гелии

Р.В. Вовк, К.Э. Немченко

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, пл. Свободы, 4, г. Харьков, 61022, Украина
E-mail: rvvovk2017@gmail.com

Статья поступила в редакцию 12 декабря 2019 г., опубликована онлайн 24 марта 2020 г.

Рассмотрен нелинейный этап эволюции анизотропных пучков высокоэнергетических и низкоэнергетических фононов, представляющих собой практически одномерные в фазовом пространстве взаимодействующие системы. Проведены анализ результатов наблюдений и теоретическое рассмотрение пространственной и временной эволюции этих систем в общем случае, когда они ограничены в продольном и поперечном направлениях. В результате система уравнений для параметров пучка сведена к одному нелинейному уравнению, которое описывает как продольную, так и поперечную эволюцию пучка. Численное решение этого уравнения позволило объяснить характерные особенности движения и деформации пучков, которые наблюдаются в эксперименте, а также определить основные параметры и этапы эволюции пучков.

Ключевые слова: сверхтекучий гелий, распространение фононов, пучок фононов, тепловые импульсы.

1. Введение

Особенности фононного спектра сверхтекучего гелия позволяют создавать в нем уникальные долгоживущие, практически одномерные в фазовом пространстве системы фононов. Временная и пространственная эволюция таких систем демонстрирует целый ряд необычных физических явлений, например таких, как рождение фононов с высокой энергией $\epsilon > 10$ К (h-фононов) системой фононов с низкой эффективной температурой $T = 1$ К (l-фононов) [1–8] или распространения пучков l-фононов на необычно большие расстояния без изменения формы и размеров пучка [9–14].

Первое теоретическое описание явлений, происходящих в таких пучках [15–18], послужило поводом для экспериментов, в которых были обнаружены новые, столь же необычные физические явления.

Так, например, в достаточно широких пучках наблюдалось образование температурного плато в поперечном сечении пучка («горячее пятно»), а в достаточно длинных — насыщение сигнала h-фононов [14]. При взаимодействии двух пучков обнаружено создание «горячей линии» и необычная фокусировка фононов [19,20].

Некоторые из этих явлений получили физическое объяснение, но целый ряд из них удалось объяснить только качественно или для приближенной геометрии. В частности, в работе [21] исследовано распределение плотности энергии анизотропного «фононного листа» при его распространении в сверхтекучем ^4He .

Для полного понимания приведенных в [21] экспериментальных результатов необходимо создание теории эволюции фононного импульса в процессе его распространения от нагревателя к детектору с учетом генерации высокоэнергетических h-фононов. Следует отметить, что теоретическая модель эволюции холодного l-фононного импульса [22] позволила объяснить некоторые особенности необычной формы наблюдаемого углового распределения l-фононов. В работе [23] предложено развитие этой теории на случай осевой симметрии, более близкой к реальной экспериментальной ситуации по сравнению с плоским случаем.

2. Структура фононных пучков

Рассмотрим случай реального трехмерного пучка, ограниченного по всем направлениям, что полностью соответствует геометрии экспериментов, результаты которых описаны в [21]. В частности, размеры инжектированного в гелий фононного импульса определяются площадью золотой пленки-нагревателя (1×1 мм) и длительностью импульса (50–300 нс) нагревателя.

При нулевом давлении фононы с энергиями менее 10 К (и средней эффективной температурой в равновесии 1 К), называемые l-фононами, взаимодействуют главным образом посредством быстрых трехфононных (ЗРР) процессов [24]. Характерное время этих процессов настолько мало, что локальное равновесие в системе l-фононов достигается практически мгновенно по

отношению ко всем остальным временным масштабам рассматриваемой системы. Такое равновесие определяется локальной бозе-эйнштейновской функцией распределения при температуре 0,7–1 К и типичной входной мощности нагревателя 12,5 мВт. Трехфононные процессы рассеяния являются малоугловыми (при этой температуре характерный угол $\theta_{3PP} \approx 10^\circ$). Взаимодействие между фононами быстро увеличивает ширину 1-фононного пучка на эту величину, после чего его дальнейшее расширение происходит значительно медленнее. Таким образом, можно считать, что в любой точке пучка все 1-фононы движутся в узком конусе угловой ширины θ_{3PP} . Такая сильно анизотропная неоднородная фононная система может быть описана локально-равновесной функцией распределения Бозе–Эйнштейна с температурой $T(\mathbf{r}, t)$, зависящей от радиуса-вектора \mathbf{r} и времени t , а также вектором $\mathbf{s}(\mathbf{r}, t)$, направленным вдоль оси конуса, занимаемого фононными импульсами:

$$n(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \frac{\Theta(\mathbf{p}\mathbf{s}/p - \cos\theta_{3PP})}{\exp(\varepsilon/T) - 1}, \quad (1)$$

где $\Theta(x)$ — тета-функция Хевисайда. Длина вектора $\mathbf{s}(\mathbf{r}, t)$ равна единице внутри пучка и нулю вне пучка фононов.

Связь энергии и импульса $\varepsilon = \varepsilon(p)$ фононов представляется в виде линейной функции со слабым отклонением от линейности $\psi(p)$ [24]:

$$\varepsilon(p) = cp[1 + \psi(p)]. \quad (2)$$

Наряду с быстрым 3PP-рассеянием в системе существует гораздо более медленное четырехфононное 4PP-взаимодействие, которое приводит к созданию h-фононов в случае, если температура 1-фононов превышает 0,7 К. В противоположность 1-фононам, для h-фононов функция $\psi(p) < 0$, поэтому в силу законов сохранения энергии и импульса h-фононы не принимают участие в 3PP-процессах.

3. Система уравнений и начальные условия

Предположим, что изначально вектор $\mathbf{s}(\mathbf{r}, t = 0)$ направлен вдоль оси \mathbf{z} , которая совпадает с направлением распространения импульса. Температура $T(\mathbf{r}, t = 0)$ не равна нулю внутри импульса. В дальнейшем эволюция импульса определяется функциями $\mathbf{s}(\mathbf{r}, t)$ и $T(\mathbf{r}, t)$, которые должны удовлетворять законам сохранения энергии и импульса. В результате получаем систему четырех уравнений для четырех требуемых функций $\mathbf{s}(\mathbf{r}, t)$ и $T(\mathbf{r}, t)$. Линеаризация этой системы относительно малого параметра $\zeta_p = 1 - \cos\theta_{3PP}$ позволяет перейти к эквивалентной системе из трех независимых уравнений при условии $\mathbf{s}^2(\mathbf{r}) \equiv 1$ в случае, если $\mathbf{s}(\mathbf{r}) \neq 0$. Таким образом, необходимо решить систему из трех нелинейных диффе-

ренциальных уравнений в частных производных для переменных s_x, s_y и плотности энергии $\rho = T^4$ [22]:

$$\frac{\partial \rho}{c \partial t} + \left[1 - \frac{\zeta_p}{2} + \varphi \right] \frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho s_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho s_y) - \frac{\partial}{2 \partial z} \left[\rho (s_x^2 + s_y^2) \right] = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{c \partial t} (\rho s_x) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho s_x) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho \left(\frac{\zeta_p}{2} + s_x^2 \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} (\rho s_x s_y) = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{c \partial t} (\rho s_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho s_y) + \frac{\partial}{\partial y} \left[\rho \left(\frac{\zeta_p}{2} + s_y^2 \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} (\rho s_x s_y) = 0, \quad (5)$$

где величина

$$\varphi = \frac{1}{4} \frac{d}{dT} \left(\frac{1}{T^2} \frac{d}{dT} \chi(T) \right) \quad (6)$$

выражается через функцию

$$\chi(T) = \frac{c^4}{3! \zeta(4)} \int_0^\infty \psi(p) \frac{p^3 dp}{\exp(cp/T) - 1}, \quad (7)$$

которая определяется отклонением спектра (2) от линейного (функцией $\psi(p)$). В (7) $\zeta(4)$ — дзета-функция Римана 4-го порядка.

Эта система трех уравнений для трех независимых переменных должна быть дополнена начальными условиями:

$$s_x(\mathbf{r}, t = 0) = 0, \quad s_y(\mathbf{r}, t = 0) = 0, \quad T(\mathbf{r}, t = 0) = T_0 \mathbf{s}^2(\mathbf{r}). \quad (8)$$

Здесь T_0 — начальная температура пучка. Последнее условие соответствует тому, что и температура, и вектор направления движения \mathbf{s} одновременно равны нулю в тех точках, где отсутствуют фононы.

Еще одно начальное условие накладывается на существование фононного пучка в области пространства, ограниченной поперечными и продольными размерами пучка:

$$\mathbf{s}^2(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1, & 0 \leq z \leq l_p = ct_p, \quad |x| < d/2, \quad |y| < d/2 \\ 0, & \text{в других случаях} \end{cases}. \quad (9)$$

Здесь d — поперечный размер пучка, который определяется размером нагревателя, l_p — длина пучка, которая задается длительностью теплового импульса t_p .

3.1. Предельные случаи

В работе [22] рассмотрен случай зависимости функций только от координаты x и времени t . Решение такой задачи позволило изучить эволюцию фононного импульса вдоль оси x , перпендикулярной направлению его распространения. Это приближение применимо для

длинных импульсов, достаточно протяженных в направлениях z и y , в которых можно не учитывать приведенные зависимости.

В этом случае из симметрии задачи следует, что $s_y = 0$ и уравнение (5) обращается в тождество. Уравнения (3) и (4) совпадают по форме с одномерными динамическими уравнениями, описывающими процесс изотермического расширения газа в вакууме. Это дает возможность получить точное решение такой системы. В случае начального прямоугольного импульса такое решение показывает, что в системе сразу возникают волны разрежения, которые движутся по направлению к центру импульса со скоростью

$$c_0 = c\sqrt{\zeta_p/2}. \quad (10)$$

В центральной области пучка фононов вектор \mathbf{s} располагается параллельно оси z , поэтому первоначальная температура T_0 сохраняется здесь относительно длительное время, пока две волны разрежения не встречаются в точке $x = 0$. Наличие такого «горячего пятна» позволяет объяснить ряд экспериментальных фактов.

В более поздний момент времени, когда волны разрежения появляются в центре импульса, температура в центре начинает монотонно спадать по закону

$$\frac{2ct}{L_x} = \frac{T_0^2}{T^2} I_0 \left(2 \ln \frac{T_0}{T} \right), \quad (11)$$

где $L_x = d/2$ — начальная ширина импульса вдоль оси x ; I_0 — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка.

В работе [23] исследован случай осевой симметрии, более приближенный к экспериментальной ситуации по сравнению с плоским случаем. В случае осевой симметрии из системы (3)–(5) получено

$$\frac{\partial \rho}{c \partial t} + \left[1 - \frac{\zeta_p}{2} + \varphi \right] \frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{\partial}{r \partial r} (r \rho s_r) - \frac{\partial}{2 \partial z} (\rho s_r^2) = 0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial}{c \partial t} (\rho s_r) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho s_r) + \frac{\zeta_p}{2} \frac{\partial \rho}{\partial r} + \frac{\partial}{r \partial r} (r \rho s_r^2) = 0, \quad (13)$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Если искомые функции зависят от радиуса r и времени t , уравнения по форме совпадают с газодинамическими уравнениями для изотермического расширения газа в вакуум. Такая система уравнений не имеет точного аналитического решения. Анализ приближенных решений этой системы уравнений показал, что скорость волны разрежения равна скорости, полученной для плоского случая (10). Кроме того, сохраняются все главные физические особенности эволюции импульса, такие как наличие волн разрежения, отражение волн и образование «горячего пятна».

3.2. Общей случай

Для решения системы (3)–(5) в более общей геометрии удобно перейти в систему отсчета, которая движется относительно гелия практически вместе с пучком фононов со скоростью c , а также пренебречь слагаемыми, квадратичными по малым отклонениям вектора \mathbf{s} от оси пучка. В этом случае система (3)–(5) может быть представлена в следующем виде:

$$\frac{\partial \rho}{c \partial t} + \left[-\frac{\zeta_p}{2} + \varphi \right] \frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho s_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho s_y) = 0, \quad (14)$$

$$\frac{\partial}{c \partial t} (\rho s_x) + \frac{\zeta_p}{2} \frac{\partial}{\partial x} \rho = 0, \quad (15)$$

$$\frac{\partial}{c \partial t} (\rho s_y) + \frac{\zeta_p}{2} \frac{\partial}{\partial y} \rho = 0. \quad (16)$$

После вычисления второй производной по времени от первого уравнения в этой системе приходим к уравнению для плотности энергии ρ :

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + v(\rho) \frac{\partial^2 \rho}{\partial z \partial t} - c_0^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \rho = 0. \quad (17)$$

Здесь введена зависящая от плотности энергии скорость распространения нелинейных возмущений вдоль пучка

$$v(\rho) = c \left(\varphi(\rho) - \frac{\zeta_p}{2} \right), \quad (18)$$

а величина c_0 , приведенная в (10), описывает скорость движения линейных и нелинейных возмущений в поперечном направлении. Нелинейные режимы продольной эволюции бесконечно широкого пучка и поперечной релаксации в бесконечно длинных пучках подробно описаны в работе [22].

В уравнении (17) использовано приближение, которое дает правильные качественные ответы для поперечной релаксации и при этом позволяет исследовать эволюцию пучков практически любой начальной геометрии.

На рис. 1 приведены результаты расчетов в рамках модели (17) эволюции пучка с характерными для экспериментов [21] параметрами $d = 1$ мм, $\zeta_p = 0,02$, $T_0 = 1$ К и длительностью 50 мкс. Это пример самого короткого пучка, который, в частности, был рассмотрен в работе [22] для случая бесконечного в поперечном направлении пучка.

Положения пучка показаны в системе отсчета, которая движется вместе с пучком со скоростью c . На рисунке приведены зависимости для трех моментов времени, которые соответствуют трем различным расстояниям от нагревателя, пройденным пучком. Сплошными линиями показаны значения плотности энергии на оси

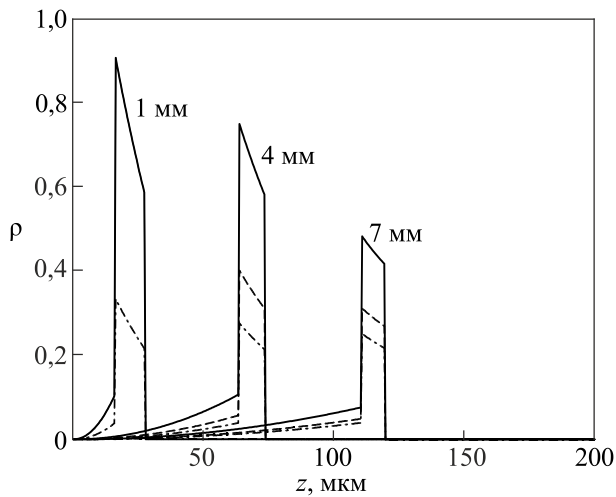


Рис. 1. Результаты решения уравнения (17) для короткого пучка длительностью 50 мкс для различных значений пройденных расстояний от нагревателя.

пучка ($x = 0$ и $y = 0$), штриховые линии — значения плотности энергии на линии с координатами $x = 0,7 d/2$ и $y = 0$, штрихпунктирные линии соответствуют координатам $x = d/2$ и $y = 0$.

На рис. 2 приведены характерные примеры эволюции плотности энергии пучка в поперечном направлении для тех же пройденных расстояний. Видно, что характерное температурное плато в таком коротком пучке может сохраняться до расстояний порядка 4 мм.

В качестве длинных пучков рассмотрен пучок длительностью 300 мкс — максимальной из рассмотренных в работе [21]. На рис. 3 представлены результаты расчетов по модели (17) эволюции такого пучка для пройденных расстояний 1 и 7 мм от нагревателя. Разные типы линий соответствуют тем же параметрам, что и на рис. 1.

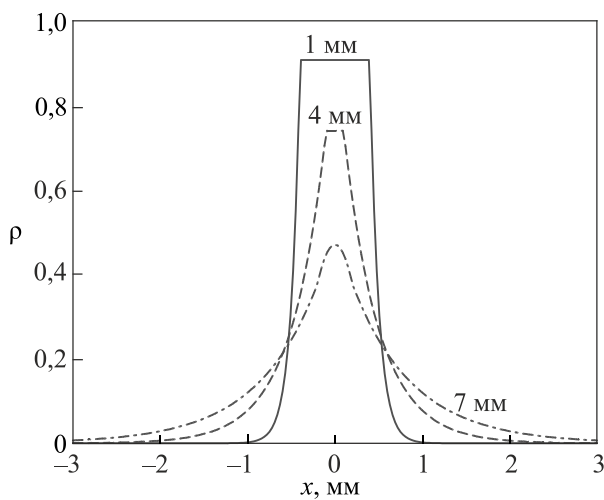


Рис. 2. Поперечный профиль короткого пучка в разные моменты времени для различных значений пройденных расстояний от нагревателя.

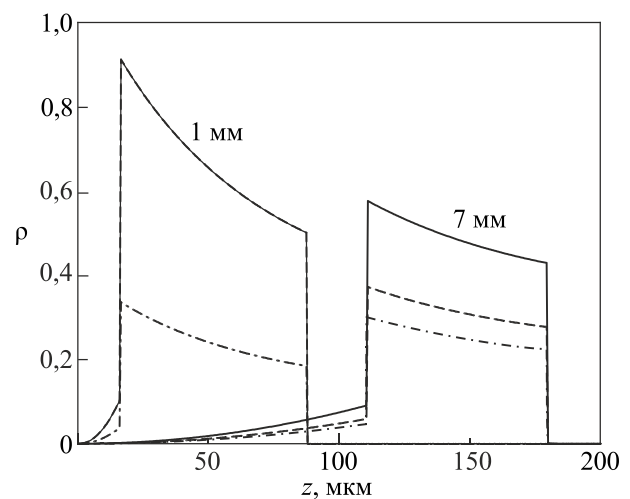


Рис. 3. Результаты решения уравнения (17) для длинного пучка длительностью 300 мкс для различных значений пройденных расстояний от нагревателя.

На рис. 4 показаны характерные примеры поперечной эволюции плотности энергии пучка длительностью 300 мкс в поперечном направлении для тех же пройденных расстояний.

4. Выводы

Из полученных результатов следует, что пучок 1-фононов благодаря быстрым малоугловым ЗРР-процессам в течение долгого времени сохраняет «горячее пятно», температура которого равна начальной температуре пучка. Размер этой области определяется размерами самого пучка и процессами достаточно медленного расплывания пучка в стороны и в продольном направлении. В результате достаточно длинные пучки обра-

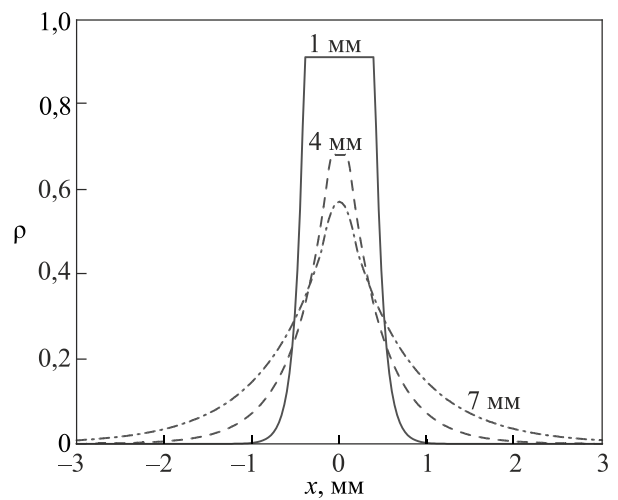


Рис. 4. Поперечный профиль длинного пучка в разные моменты времени для различных значений пройденных расстояний от нагревателя.

зують h-фононы в течение относительно большого промежутка времени вплоть до момента, когда количество фононов приходит к насыщению [21].

Таким образом, рассмотренная в работе модель эволюции пучка l-фононов описывает существование в фононном пучке «горячего пятна» — горячего центрального участка, который ограничен как в продольном, так и в поперечном направлении. Также предложенная модель объясняет сохранение «горячего пятна» на большом расстоянии от нагревателя. В свою очередь это объясняет тот факт, что h-фононы создаются на большей части пути распространения l-фононов.

1. A.F.G. Wyatt, N.A. Lockerbie, and R.A. Sherlock, *J. Phys.: Condens. Matter* **1**, 3507 (1989).
2. A.F.G. Wyatt and M. Brown, *Physica B* **165–166**, 495 (1990).
3. M.A.H. Tucker and A.F.G. Wyatt, *J. Phys.: Condens. Matter* **6**, 2813 (1994).
4. H.J. Maris and W.E. Massey, *Phys. Rev. Lett.* **25**, 220 (1970).
5. M.A.H. Tucker and A.F.G. Wyatt, *J. Phys.: Condens. Matter* **6**, 2825 (1994).
6. M.A.H. Tucker and A.F.G. Wyatt, *J. Low Temp. Phys.* **113**, 621 (1998).
7. M.J. Baird, F.R. Hope, and A.F.G. Wyatt, *Nature* **304**, 325 (1983).
8. I.N. Adamenko, K.E. Nemchenko, A.V. Zhukov, M.A.H. Tucker, and A.F.G. Wyatt, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 1482 (1999).
9. R.A. Sherlock and A.F.G. Wyatt, *J. Phys. E* **16**, 673 (1983).
10. R.A. Sherlock, *J. Phys. E* **17**, 386 (1984).
11. C.D.H. Williams, *Meas. Sci. Technol.* **1**, 322 (1990).
12. P.C. Hendry and P.V.E. McClintock, *Cryogenics* **27**, 131 (1987).
13. T.W. Bradshaw and A.F.G. Wyatt, *J. Phys. C* **16**, 651 (1983).
14. R. Vovk, C.D.H. Williams, and A.F.G. Wyatt, *Phys. Rev. B* **68**, 134508 (2003).
15. A.F.G. Wyatt, M.A.H. Tucker, I.N. Adamenko, K.E. Nemchenko, and A.V. Zhukov, *Phys. Rev. B* **62**, 3029 (2000).
16. A.F.G. Wyatt, M.A.H. Tucker, I.N. Adamenko, K.E. Nemchenko, and A.V. Zhukov, *Phys. Rev. B* **62**, 9402 (2000).
17. И.Н. Адаменко, К.Э. Немченко, А.Ф.Г. Вайатт, *ФНТ* **28**, 123 (2002) [*Low Temp. Phys.* **28**, 85 (2002)].
18. I.N. Adamenko, K.E. Nemchenko, and A.F.G. Wyatt, *Fiz. Nizk. Temp.* **29**, 16 (2003) [*Low Temp. Phys.* **29**, 11 (2003)].
19. R.V. Vovk, C.D.H. Williams, and A.F.G. Wyatt, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 235302 (2003).
20. R.V. Vovk, C.D.H. Williams, and A.F.G. Wyatt, *Phys. Rev. B* **72**, 054506, (2005).
21. P.B. Vovk, C.D.H. Williams, A.F.G. Wyatt, *ФНТ* **44**, 1353 (2018) [*Low Temp. Phys.* **44**, 1062 (2018)].

22. I.N. Adamenko, K.E. Nemchenko, V.A. Slipko, and A.F.G. Wyatt, *Phys. Rev. B* **68**, 134507 (2003).
23. I.N. Adamenko, K.E. Nemchenko, V.A. Slipko, R.V. Vovk, C.D.H. Williams, and A.F.G. Wyatt, *J. Mol. Liquids* **120**, 163 (2005).
24. I.N. Adamenko, Yu.A. Kitsenko, K.E. Nemchenko, V.A. Slipko, and A.F.G. Wyatt, *Phys. Rev. B* **72**, 054507 (2005).

Еволюція фононних систем обмежених розмірів у надплинному гелії

Р.В. Вовк, К.Е. Немченко

Розглянуто нелінійний етап еволюції анізотропних пучків високоенергетичних та низькоенергетичних фононів, які являють собою практично одновимірні в фазовому просторі системи. Проводиться аналіз результатів спостережень і теоретичний розгляд просторової та часової еволюції цих систем в загальному випадку, коли вони обмежені в повздовжньому та поперечному напрямках. В результаті роботи система рівнянь для параметрів пучка зведена до одного нелінійного рівняння, яке описує повздовжню та поперечну еволюції пучка. Чисельне розв'язання цього рівняння дозволило пояснити характерні особливості руху та деформації пучків, які спостерігаються в експерименті, а також визначити основні параметри і етапи еволюції пучків.

Ключові слова: надплинний гелій, поширення фононів, пучок фононів, теплові імпульси.

Evolution of finite-size phonon beams in superfluid helium

R.V. Vovk and K.E. Nemchenko

The nonlinear stage of the evolution of anisotropic beams of high-energy and low-energy phonons, which are practically one-dimensional interacting systems in phase space, is considered in the work. The analysis of the results of observations and theoretical consideration of the spatial and temporal evolution of these systems in the general case, when they are limited in the longitudinal and transverse directions, are carried out. As a result of the work, the system of equations for the beam parameters is reduced to a single nonlinear equation that describes the longitudinal and transverse evolution of the beam. A numerical solution of this equation made it possible to explain the characteristic features of the motion and deformation of the beams that are observed experimentally, as well as to determine the main parameters and stages of the evolution of the beams.

Keywords: superfluid helium, phonon propagation, phonon beam, heat pulses.