

Переход в фазу «суперсолид» в двумерном разреженном газе электрон-дырочных пар

Д.В. Филь

Институт монокристаллов НАН Украины, пр. Науки, 60, г. Харьков, 61072, Украина
Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина,
пл. Свободы, 4, г. Харьков, 61022, Украина
E-mail: fil@isc.kharkov.ua

С.И. Шевченко

Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины
пр. Науки, 47, г. Харьков, 61103, Украина
E-mail: shevchenko@ilt.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 16 декабря 2019 г., опубликована онлайн 24 марта 2020 г.

В рамках подхода, основанного на формализме когерентных состояний Л.В. Келдыша, описан переход из однородного сверхтекучего состояния в состояние «суперсолид» в разреженном двумерном газе электрон-дырочных пар с пространственно разделенными компонентами. Предвестником такого перехода является появление минимума ротонного типа в спектре коллективных возбуждений, который при увеличении расстояния между слоями либо плотности пар касается оси абсцисс, что сигнализирует о неустойчивости системы относительно появления пространственной модуляции плотности пар. Найдено, что немного раньше имеет место переход первого рода в гексагональную фазу «суперсолид». Теория разработана для произвольного соотношения между эффективными массами электрона и дырки и не содержит феноменологических констант. Построена фазовая диаграмма системы в переменных «химический потенциал пар — расстояние между слоями». Показано, что при фазовом переходе происходит скачок средней плотности конденсата. Установлено, что при увеличении химического потенциала неоднородная фаза разбивается на области с большой плотностью, окруженные линиями, на которых плотность обращается в нуль, причем эти линии образуют сплошную сетку.

Ключевые слова: электрон-дырочное спаривание, экситонная сверхтекучесть, суперсолид.

1. Введение

Фазой «суперсолид» называют состояние, которое сочетает сверхтекучие свойства и кристаллический порядок. Такая возможность применительно к квантовым кристаллам твердого ^4He была предсказана в работе А.Ф. Андреева и И.М. Лифшица [1]. Интерес к этому явлению возобновился в связи с экспериментами, в которых наблюдалось уменьшение периода крутильных колебаний торсионного маятника, наполненного твердым гелием, что было многократно воспроизведено в разных лабораториях (см., например, обзоры [2,3]). Наблюдаемый эффект можно связывать с появлением сверхтекучей фракции, которая не участвует в крутильных колебаниях, но дополнительные эксперименты [4] и теория [5–7] позволяют также предполагать, что эффект обусловлен не возникновением фазы «суперсолид», а сверхпластичностью.

Состояние типа «суперсолид» может возникать не только в квантовых кристаллах. Как было показано в работе [8] (см. также [9–11]), к системам, в которых можно ожидать сосуществование сверхтекучих свойств и пространственной периодичности, относятся бозе-газы с дипольным взаимодействием между частицами. Недавно состояние «суперсолид» в дипольных квантовых газах обнаружено экспериментально в работах трех разных групп [12–14]. Взаимодействие между дипольными частицами содержит дальнедействующую составляющую. Фурье-компонента потенциала взаимодействия $V_{\mathbf{k}}$ является функцией волнового вектора. В состоянии бозе-конденсата спектр возбуждений $\omega(k)$ описывается выражением, аналогичным выражению для

боголюбовского спектра, с тем отличием, что константа взаимодействия заменяется на V_k : $\omega(k) = \sqrt{\varepsilon_k(\varepsilon_k + 2V_k n)}$, где ε_k — кинетическая энергия частиц и n — плотность конденсата (предполагается, что V_k зависит только от модуля \mathbf{k}). Если в некотором диапазоне волновых векторов фурье-компонента V_k принимает отрицательные значения и достигается неравенство $\varepsilon_k + 2nV_k < 0$, то состояние пространственно однородного конденсата становится неустойчивым.

В работе [8] было показано, что в дипольных квантовых газах могут возникать различные неоднородные фазы, в зависимости от значения безразмерного параметра, составленного из констант двухчастичного и трехчастичного контактного взаимодействия, плотности конденсата и величины дипольного момента. К таким фазам относятся одномерная (в виде полос) фаза «суперсолид», двумерная «суперсолид» фаза с треугольной решеткой, а также фаза с решеткой в форме пчелиных сот (подобная решетке графена). В [8] речь идет о дипольных молекулах. Поэтому температура, при которой может происходить переход из однородного сверхтекучего состояния в состояние «суперсолид», очень низкая, не более нескольких десятков нК, что согласуется с температурой ($T = 20$ нК), при которой фаза суперсолид наблюдалась экспериментально [13].

В связи с давно обсуждаемой возможностью сверхтекучести связанных электрон-дырочных пар с пространственно разделенными компонентами (см. обзор [15]) рассматривался также переход в фазу «суперсолид» в двухслойных электрон-дырочных системах. В пионерской работе по электрон-дырочному спариванию в квантовых холловских системах [16] показано, что спектр коллективных возбуждений содержит минимум ротонного типа. Было найдено, что при достижении критического расстояния между слоями точка минимума касается оси абсцисс и в системе должен наблюдаться фазовый переход. В работе [17] на качественном уровне проанализирована фазовая диаграмма двухслойной электрон-дырочной системы в нулевом магнитном поле. Были приведены аргументы, что при увеличении расстояния между слоями должен наблюдаться сначала фазовый переход в фазу типа «суперсолид», а затем в фазу вигнеровского кристалла. Аналогичный результат был получен в работе [18] на основе предложенного в этой работе подхода, который автор [18] называет квантовой теорией Гинзбурга–Ландау. В работе [19] установлено, что в электрон-дырочной двухслойной системе с сильным разбалансом плотностей электронов и дырок экситонный газ конденсируется в фазу типа фазы Фульде–Ферреля–Ларкина–Овчинникова, которую можно рассматривать как вариант фазы «суперсолид». При этом образованию такой фазы способствует сильное различие электронной и дырочной эффективных масс.

В нашей работе [20] развит подход для описания конденсата электрон-дырочных пар в двухслойной си-

стеме, основанный на использовании формализма когерентных состояний, который применительно к трехмерному конденсату экситонов предложен Л.В. Келдышем [21]. В рамках описания [20] было получено аналитическое выражение для спектра коллективных возбуждений. Оказалось, что важно учитывать не только зависимость от волнового вектора фурье-компоненты прямого кулоновского взаимодействия между электрон-дырочными парами, но и аналогичную зависимость для обменного взаимодействия. Полученный в [20] спектр, (как и спектр коллективных возбуждений в дипольных бозе-газах, а также спектр [16]), имеет минимум ротонного типа, и при увеличении расстояния между слоями либо плотности пар состояние с однородным бозе-конденсатом становится неустойчивым.

В настоящей работе подход [20] использован для описания фазы «суперсолид». Получены выражения для энергии неоднородных фаз. Используемый формализм не содержит феноменологических параметров. Энергия зависит от отношения расстояния между слоями d к эффективному борновскому радиусу пары a_0 , химического потенциала пар и отношения эффективных масс электрона (m_e) и дырки (m_h). Установлено, какая именно неоднородная фаза отвечает минимуму энергии и как в зависимости от указанных параметров меняется пространственное распределение конденсата в неоднородной фазе.

2. Общее выражение для энергии экситонного конденсата. Вывод в рамках формализма когерентных состояний

Формализм когерентных состояний [21] получил дальнейшее развитие в работах [22,23], где он использовался для описания электрон-дырочного спаривания в двухслойных квантовых холловских системах, в работах [24–26], где на основе этого формализма были проанализированы поляризационные явления в трехмерном сверхтекучем газе электрон-дырочных пар (без пространственного разделения электронов и дырок), а также в работе [27], где этот формализм был применен для описания сверхтекучего состояния разреженного газа, образованного атомами щелочного металла.

Изложим вкратце основные детали используемого подхода. Экситонный конденсат описывается многочастичной волновой функцией

$$|\Phi\rangle = e^{\hat{D}} |0\rangle, \quad (1)$$

где

$$\hat{D} = \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \psi_e^+(\mathbf{r}_1) \psi_h^+(\mathbf{r}_2) - \text{H.c.}, \quad (2)$$

ψ_e^+ и ψ_h^+ — операторы рождения электрона и дырки, $\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ — волновая функция пары в разреженном конденсате, векторы \mathbf{r}_i являются двумерными (лежат в плоскостях электронного и дырочного слоев), и волно-

вая функция $|0\rangle$ отвечает вакуумному состоянию (состоянию, в котором электроны и дырки отсутствуют). Здесь мы рассматриваем однокомпонентный конденсат пар. Как было показано в [20] (см. также [28]), двухкомпонентный конденсат пар (пары отличаются значением проекции спина электрона либо дырки) является неустойчивым относительно пространственного расщепления уже при $d/a_0 > 0,2$. В то же время, согласно полученным ниже оценкам, фаза «суперсолид» может возникать лишь при $d/a_0 > 1$.

Функция $\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ находится из условия минимума энергии системы. Гамильтониан системы берется в виде

$$H = - \sum_{\alpha=e,h} \int d\mathbf{r} \frac{\hbar^2}{2m_\alpha} \psi_\alpha^+(\mathbf{r}) \nabla^2 \psi_\alpha(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=e,h} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \psi_\alpha^+(\mathbf{r}) \psi_\beta^+(\mathbf{r}') V_{\alpha\beta}(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|) \psi_\beta(\mathbf{r}') \psi_\alpha(\mathbf{r}), \quad (3)$$

где $V_{\alpha\beta}(r)$ — энергия кулоновского взаимодействия. Рассмотрим систему, помещенную в однородную диэлектрическую матрицу с проницаемостью ϵ , совпадающую с диэлектрической проницаемостью прослойки между электронным и дырочным слоями. Тогда $V_{ee}(r) = V_{hh}(r) = e^2 / \epsilon r$ и $V_{eh}(r) = -e^2 / \epsilon \sqrt{r^2 + d^2}$. Операторы полного числа электронов и дырок записываются в виде $\hat{N}_e = \int d\mathbf{r} \psi_e^+(\mathbf{r}) \psi_e(\mathbf{r})$, $\hat{N}_h = \int d\mathbf{r} \psi_h^+(\mathbf{r}) \psi_h(\mathbf{r})$.

Для дальнейшего анализа удобно перейти к операторам $\tilde{\psi}_\alpha(\mathbf{r}) = e^{-\hat{D}} \psi_\alpha(\mathbf{r}) e^{\hat{D}}$ ($\alpha = e, h$), которые следующим образом выражаются через операторы рождения и уничтожения электронов и дырок [21]:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_e(\mathbf{r}) &= \int d\mathbf{r}' [C_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \psi_e(\mathbf{r}') + S(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \psi_h^+(\mathbf{r}')], \\ \tilde{\psi}_h(\mathbf{r}) &= \int d\mathbf{r}' [C_h(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \psi_h(\mathbf{r}') - S(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \psi_e^+(\mathbf{r}')], \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} C_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (\Phi \cdot \Phi^+)^n, \\ C_h(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (\Phi^+ \cdot \Phi)^n, \\ S(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \Phi \cdot (\Phi^+ \cdot \Phi)^n. \end{aligned} \quad (5)$$

Явный вид эрмитово-сопряженных операторов $\tilde{\psi}_\alpha^+(\mathbf{r}) = e^{-\hat{D}} \psi_\alpha^+(\mathbf{r}) e^{\hat{D}}$ определяется уравнениями, эрмитово-сопряженными (4). В (5) использовано обозначение $\Phi^+(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \equiv \Phi^*(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)$ и знак умножения означает свертку.

Используя (4), (5), можно выразить энергию системы $E = \langle \Phi | H | \Phi \rangle = \langle 0 | \hat{H} | 0 \rangle$, полное число электронов $N_e = \langle \Phi | \hat{N}_e | \Phi \rangle = \langle 0 | \hat{N}_e | 0 \rangle$ и полное число дырок

$N_h = \langle \Phi | \hat{N}_h | \Phi \rangle = \langle 0 | \hat{N}_h | 0 \rangle$ через операторы \hat{H} , \hat{N}_h и \hat{N}_e . Последние получаются из гамильтониана (3) и операторов \hat{N}_e и \hat{N}_h заменой в них $\psi_{e(h)}$ на $\tilde{\psi}_{e(h)}$ и аналогичной заменой для эрмитово-сопряженных операторов. Легко показать, что в состоянии (1) полное число электронов равно полному числу дырок, $N_e = N_h$.

Определим, как меняется состояние системы в зависимости от химического потенциала пар $\mu = (\mu_e + \mu_h) / 2$, который рассматривается как внешний параметр. Искомое состояние отвечает $\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$, при котором достигается минимум потенциала $\Omega = E - \mu N$, где $N = N_e = N_h$ — число пар.

При низкой плотности пар (когда среднее расстояние между парами много больше размера пары) функцию Ω можно записать в виде ряда по степеням Φ . Мы ограничимся учетом слагаемых второго и четвертого порядка по Φ . В этом приближении получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} \Omega &= \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_4 \times \\ &\times \left[\left(\delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_4) \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) - \frac{1}{3} \Phi^+(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \Phi(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) \right) \Phi^+(\mathbf{r}_4, \mathbf{r}_1) \times \right. \\ &\times \left. \left(-\frac{\hbar^2}{2m_e} \nabla_{\mathbf{r}_1}^2 - \frac{\hbar^2}{2m_h} \nabla_{\mathbf{r}_2}^2 - \mu + V_{eh}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \right) \Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + \right. \\ &+ \frac{1}{2} R_d(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) \Phi^+(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) \Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \Phi^+(\mathbf{r}_4, \mathbf{r}_3) \Phi(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) - \\ &\left. - \frac{1}{2} R_{ex}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) \Phi^+(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) \Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_4) \Phi^+(\mathbf{r}_4, \mathbf{r}_3) \Phi(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_2) \right], \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} R_d(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) &= V_{ee}(r_{13}) + V_{hh}(r_{24}) + V_{eh}(r_{14}) + V_{eh}(r_{23}), \\ R_{ex}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) &= V_{ee}(r_{13}) + V_{hh}(r_{24}) + \\ &+ \frac{1}{2} [V_{eh}(r_{14}) + V_{eh}(r_{23}) + V_{eh}(r_{12}) + V_{eh}(r_{34})]. \end{aligned} \quad (7)$$

В уравнениях (7) использовано обозначение $r_{ik} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|$, индексы 1 и 3 относятся к электронам, а индексы 2 и 4 — к дыркам.

Функция $\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ ищется в виде

$$\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \Psi(\mathbf{R}_{12}) \phi_0(\mathbf{r}_{12}), \quad (8)$$

где $\mathbf{R}_{12} = (m_e \mathbf{r}_1 + m_h \mathbf{r}_2) / (m_e + m_h)$ — координата центра масс, $\phi_0(\mathbf{r})$ — волновая функция низшего по энергии связанного состояния пары. Функция $\phi_0(\mathbf{r})$ находится из уравнения Шредингера

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_{\mathbf{r}}^2 + V_{eh}(r) \right] \phi_0(\mathbf{r}) = E_0 \phi_0(\mathbf{r}), \quad (9)$$

где $m = m_e m_h / (m_e + m_h)$ — приведенная масса, и E_0 — энергия основного состояния пары. Функция $\phi_0(\mathbf{r})$ нормирована условием $\int d^2 r |\phi_0(\mathbf{r})|^2 = 1$.

Будем отсчитывать химический потенциал от E_0 и введем величину $\tilde{\mu} = \mu - E_0$. В случае пространственно однородного конденсата функция (8) равна $\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \Phi(\mathbf{r}_{12}) = \sqrt{n_0} \varphi_0(\mathbf{r}_{12})$, где величина n_0 определяется из условия минимума Ω . В пределе низкой плотности n_0 совпадает с плотностью пар (см. ниже). Энергия (6) на единицу площади принимает вид

$$\frac{\Omega_u}{S} = -\tilde{\mu} \left(n_0 - \frac{1}{3} n_0^2 \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} |\varphi_{\mathbf{q}}|^4 \right) + \frac{\gamma_0}{2} n_0^2, \quad (10)$$

где S — площадь системы, $\varphi_{\mathbf{q}}$ — фурье-компонента функции $\varphi_0(\mathbf{r})$ (для сокращения записываем фурье-компоненту без индекса 0), γ_0 — константа взаимодействия. В эту константу дают вклад прямое и обменное взаимодействия, $\gamma_0 = \gamma_0^{(d)} + \gamma_0^{(ex)}$, где

$$\gamma_0^{(d)} = \frac{4\pi e^2 d}{\varepsilon}, \quad (11)$$

$$\gamma_0^{(ex)} = -\frac{4\pi e^2}{\varepsilon} \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \frac{1}{p} |\varphi_{\mathbf{q}}|^2 \times \left[|\varphi_{\mathbf{q}+\mathbf{p}}|^2 - \frac{e^{-pd}}{2} (\varphi_{\mathbf{q}+\mathbf{p}}^* \varphi_{\mathbf{q}} + \varphi_{\mathbf{q}}^* \varphi_{\mathbf{q}+\mathbf{p}}) \right]. \quad (12)$$

Минимуму (10) отвечает

$$n_0 = \frac{\tilde{\mu}}{\gamma_0 + \frac{2}{3} \tilde{\mu} \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} |\varphi_{\mathbf{q}}|^4}. \quad (13)$$

Как видно из (13), при малых $\tilde{\mu}$ величина n_0 практически линейно зависит от $\tilde{\mu}$. Учет второго слагаемого в знаменателе в (13) дает поправку к n_0 порядка $\tilde{\mu}^2$. При подстановке (13) в (10) получаем энергию системы, пропорциональную в низшем приближении $\tilde{\mu}^2$:

$$\frac{\Omega_u}{S} = -\frac{1}{2} \frac{\tilde{\mu}^2}{\gamma_0}, \quad (14)$$

а поправка $\delta n_0 \propto \tilde{\mu}^2$ даст поправку к Ω_u , пропорциональную $\tilde{\mu}^3$. Таким образом, учет в знаменателе (13) второго слагаемого является превышением точности, поскольку в (6) пренебрегаем слагаемыми, пропорциональными Φ^6 , которые бы также дали поправку порядка $\tilde{\mu}^3$. Так как мы ограничиваемся приближением, в котором не учитывается вклад в энергию слагаемых порядка n_0^3 , можно с самого начала пренебречь членом $\Phi^+(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \Phi(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) / 3$ в первой скобке в (6).

Величина γ_0 положительная. При отрицательном γ_0 имела бы место ситуация коллапса, которую мы не рассматриваем.

В пространственно однородном случае можно найти точное соотношение между n_0 и плотностью пар n_p .

В этом случае уравнения (4), записанные в импульсном представлении, сводятся к обычному $u-v$ -преобразованию:

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_e(\mathbf{q}) &= u_{\mathbf{q}} \Psi_e(\mathbf{q}) + v_{\mathbf{q}} \Psi_h^{\dagger}(-\mathbf{q}), \\ \tilde{\Psi}_h(-\mathbf{q}) &= u_{\mathbf{q}} \Psi_h(-\mathbf{q}) - v_{\mathbf{q}} \Psi_e^{\dagger}(\mathbf{q}), \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$u_{\mathbf{q}} = \cos |\Phi_{\mathbf{q}}|, \quad v_{\mathbf{q}} = \frac{\Phi_{\mathbf{q}}}{|\Phi_{\mathbf{q}}|} \sin |\Phi_{\mathbf{q}}| \quad (16)$$

и $\Phi_{\mathbf{q}} = \sqrt{n_0} \varphi_{\mathbf{q}}$ — фурье-компонента функции $\Phi(\mathbf{r})$. Плотность пар равна

$$n_p = \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} |v_{\mathbf{q}}|^2 = \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \left[\sin(\sqrt{n_0} |\varphi_{\mathbf{q}}|) \right]^2. \quad (17)$$

Как видно, в пределе $\Phi_{\mathbf{q}} \ll 1$ величина n_0 сравнивается с плотностью пар, но в общем случае $n_0 > n_p$. В рассматриваемом приближении этим различием пренебрегаем.

3. Энергия неоднородной фазы

Для описания фазы «суперсолид» возьмем $\Psi(\mathbf{R})$ в виде пространственно-периодической функции. Используем такие же функции, как в работе [8].

Одномерная фаза «суперсолид» (волна) задается функцией

$$\Psi_w(\mathbf{R}) = \sqrt{n_0} \left[\cos \theta + \sqrt{2} \sin \theta \cos(kX) \right]. \quad (18)$$

Параметр θ варьируется от $-\pi/2$ до $\pi/2$.

Гексагональной фазе «суперсолид» отвечает функция

$$\Psi_h(\mathbf{R}) = \sqrt{n_0} \left[\cos \theta + \sqrt{\frac{2}{3}} \sin \theta \sum_{i=1}^3 \cos(\mathbf{k}_i \mathbf{R}) \right], \quad (19)$$

где $\mathbf{k}_1 = (k, 0)$, $\mathbf{k}_2 = (-k/2, \sqrt{3}k/2)$, $\mathbf{k}_3 = (-k/2, -\sqrt{3}k/2)$. При положительных θ ($\theta < \pi/2$) главные максимумы функции $\Psi_h^2(\mathbf{R})$ образуют треугольную решетку. При малых отрицательных θ возникает решетка типа пчелиных сот. В пределе низкой плотности величина n_0 соответствует средней плотности пар как для фазы (18), так и для фазы (19).

Подставляя (18), (19) в (6), находим соответствующее минимуму Ω значение n_0 при заданных θ и k :

$$n_0 = \frac{\tilde{\mu} - \varepsilon_k \sin^2 \theta}{\gamma_{w,h}(k, \theta)} \ominus \left[\frac{\tilde{\mu} - \varepsilon_k \sin^2 \theta}{\gamma_{w,h}(k, \theta)} \right], \quad (20)$$

где $\varepsilon_k = \hbar^2 k^2 / 2(m_e + m_h)$ — кинетическая энергия пары, $\gamma_{w,h}(\theta, k)$ — константа взаимодействия, зависящая от задающих вид функции $\Psi(\mathbf{R})$ параметров k и θ ,

и $\Theta(x)$ — тета-функция Хевисайда. Появление тета-функции связано с условием $n_0 \geq 0$. В результате получаем следующее выражение для энергии:

$$\frac{\Omega_{w,h}(k, \theta)}{S} = -\frac{1}{2} \frac{(\tilde{\mu} - \varepsilon_k \sin^2 \theta)^2}{\gamma_{w,h}(k, \theta)} \Theta \left[\frac{\tilde{\mu} - \varepsilon_k \sin^2 \theta}{\gamma_{w,h}(k, \theta)} \right]. \quad (21)$$

Общая структура функций $\gamma_w(k, \theta)$ и $\gamma_h(k, \theta)$ описывается уравнениями

$$\gamma_w(k, \theta) = \gamma_0 + 4\gamma_2(k) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \gamma_{4,w}(k) \sin^4 \theta, \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \gamma_h(k, \theta) = & \gamma_0 + 4\gamma_2(k) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \\ & + \gamma_{3,h}(k) \cos \theta \sin^3 \theta + \gamma_{4,h}(k) \sin^4 \theta, \end{aligned} \quad (23)$$

где γ_0 — введенная выше константа взаимодействия для однородной фазы. Явные выражения для функций $\gamma_2(k)$ и $\gamma_{3(4),w(h)}(k)$ достаточно громоздки и мы приводим их в Приложении.

При $\theta = 0$ выражение (21) переходит в (14), т.е. (21) описывает также и однородную фазу. Разложение (21) при малых θ имеет вид

$$\frac{\Omega_{w,h}(k, \theta)}{S} = -\frac{1}{2} \frac{\tilde{\mu}^2}{\gamma_0} + \frac{\tilde{\mu}}{\gamma_0} \theta^2 \left(\varepsilon_k + 2 \frac{\tilde{\mu}}{\gamma_0} \gamma_2(k) \right). \quad (24)$$

Учитывая, что для однородной фазы $n_0 = \tilde{\mu} / \gamma_0$, эта фаза имеет более высокую энергию по сравнению с любой из рассматриваемых неоднородных фаз, если для каких-то k выполняется неравенство $\varepsilon_k + 2\gamma_2(k)n_0 < 0$. Последнее условие в точности совпадает с условием неустойчивости однородного состояния, которое следует из явного выражения для спектра коллективных возбуждений [20] (условие, при котором спектр становится мнимым). Если это условие не выполняется, т.е. $\varepsilon_k + 2n_0\gamma_2(k) > 0$ при всех k , все равно неоднородная фаза при некотором конечном θ может иметь более низкую энергию по сравнению с однородной фазой. Тогда переход из однородной фазы в фазу «суперсолид» будет фазовым переходом первого рода.

Для нахождения аналитического выражения для энергии (21) аппроксимируем функцию $\varphi_0(\mathbf{r})$ волновой функцией основного состояния двумерного гармонического осциллятора. Это аппроксимация оправдана при $d > a_0$, где $a_0 = \hbar^2 \varepsilon / me^2$ — эффективный боровский радиус пары. В этом случае потенциал взаимодействия в уравнении (9) можно заменить на его разложение вблизи $r = 0$: $V_{eh}(r) \approx -e^2 / \varepsilon d + e^2 r^2 / 2\varepsilon d^3$. Это дает $\varphi_0(\mathbf{r}) = (1/\sqrt{\pi r_0}) \exp(-r^2 / 2r_0^2)$, где $r_0 = \sqrt[4]{a_0 d^3}$ — характерный размер пары. Фурье-компонента этой функции равна $\varphi_{\mathbf{q}} = \sqrt{4\pi} r_0 \exp(-q^2 r_0^2 / 2)$. В качестве единицы энергии удобно выбрать величину

$$\mathcal{E}_0 = \frac{e^2}{\varepsilon a_0} = \frac{me^4}{\varepsilon^2 \hbar^2}$$

(это есть удвоенный эффективный Ридберг). Тогда энергия Ω , отнесенная к площади a_0^2 , дается выражением

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}_{w,h}(k, \theta) = & \frac{\Omega_{w,h} a_0^2}{S} = \\ = & -\frac{\mathcal{E}_0 a_0}{8\pi r_0} \frac{\left[\frac{\tilde{\mu}}{\mathcal{E}_0} - \frac{k^2 a_0^2}{8} (1-x^2) \sin^2 \theta \right]^2}{\tilde{\gamma}_{w,h}(\tilde{k}, \theta)} \times \\ & \times \Theta \left[\frac{\frac{\tilde{\mu}}{\mathcal{E}_0} - \frac{k^2 a_0^2}{8} (1-x^2) \sin^2 \theta}{\tilde{\gamma}_{w,h}(\tilde{k}, \theta)} \right], \end{aligned} \quad (25)$$

где $\tilde{k} = kr_0$ и для описания электрон-дырочной асимметрии введен параметр $x = (m_e - m_h) / (m_e + m_h)$ (случай $x = 0$ отвечает $m_e = m_h$, а предел $x \rightarrow -1$ — бесконечно тяжелым дыркам). Функции $\tilde{\gamma}_{w,h}(\tilde{k}, \theta)$ имеют такую же структуру, как и выражения (22), (23), и зависят от x и $\tilde{d} = d / r_0$ как от параметров. Явный вид этих функций приведен в Приложении. Отметим, что $\tilde{\gamma}_{w,h}(\tilde{k}, \theta)$ не меняются при изменении знака x .

Минимизируя энергию (25) по k и θ , находим основное состояние системы. Если минимум достигается при $\theta = 0$ (в этом случае (25) не зависит от k), основное состояние отвечает однородному конденсату. Такое состояние реализуется при малом $\tilde{\mu}$ ($\tilde{\mu} > 0$). При увеличении $\tilde{\mu}$, при достижении некоторого критического значения, глобальный минимум скачком смещается в точку с $\theta_h \neq 0$ и $k \neq 0$. Этому минимуму отвечает гексагональная фаза. Проведенный анализ показывает, что θ_h попадает в диапазон $[0, \pi/2]$, и максимумы плотности конденсата образуют треугольную решетку. Параметр решетки равен $a_h = 4\pi / (\sqrt{3}k)$. При переходе из однородного состояния в гексагональную фазу скачком увеличивается средняя плотность конденсата.

4. Результаты расчетов и их обсуждение

Мы не будем анализировать ситуацию при произвольном соотношении m_e и m_h , а ограничимся двумя случаями. Первый отвечает системе $\text{MoS}_2\text{--MoTe}_2$ (система 1), для которой $m_e = 0,47m_0$ и $m_h = 0,62m_0$, где m_0 — масса свободного электрона. В этом случае $|x| = 0,14$. Рассматривая данную систему в матрице гексагонального нитрида бора $\varepsilon = 5$, получаем эффективный боровский радиус $a_0 \approx 1$ нм. Второй случай отвечает гетероструктуре на основе AlGaAs (система 2), для которой $m_e = 0,067m_0$, $m_h = 0,45m_0$ и $\varepsilon = 13$. Для этого случая $|x| = 0,74$ и $a_0 \approx 12$ нм.

Проведенный анализ показал, что во всей области параметров, где реализуется неоднородная фаза, энергия фазы (19) ниже энергии фазы (18). При этом переход из однородной фазы в фазу (19) сопровождается скачком θ и скачком n_0 , т.е. является фазовым переходом первого рода. Ниже, говоря о неоднородной фазе, имеем в виду фазу (19).

На рис. 1 представлена фазовая диаграмма системы в переменных $(\tilde{\mu} / \mathcal{E}_0, d / a_0)$. Показаны линии фазового перехода для систем 1 и 2. При увеличении параметра $|x|$ фазовый переход происходит при меньшем значении d / a_0 . В пределе $m_e / m_h \rightarrow 0$ неоднородная фаза становится энергетически выгодной при всех d / a_0 (в пределе малой плотности пар). Тем не менее, как

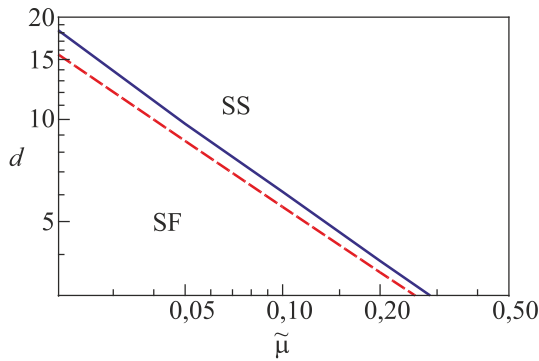


Рис. 1. Фазовая диаграмма в координатах «химический потенциал — расстояние между слоями». SF — однородная сверхтекучая фаза, SS — фаза «суперсолид», сплошной и штриховой линиями показаны линии фазового перехода для системы 1 и 2, соответственно, расстояние между слоями d дано в единицах a_0 , химический потенциал $\tilde{\mu}$, в \mathcal{E}_0 .

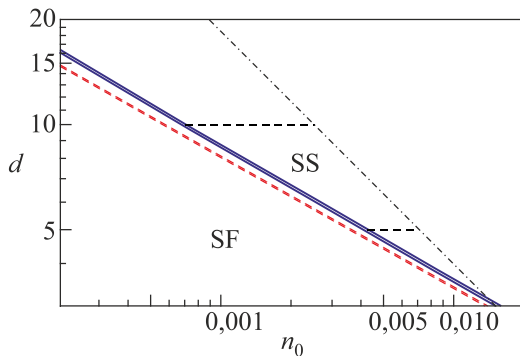


Рис. 2. Линии раздела фаз в координатах «средняя плотность конденсата — расстояние между слоями». Сплошными и штриховыми линиями показаны линии фазового перехода для системы 1 и 2, соответственно. В точке фазового перехода имеется скачок плотности (см. рис. 3) и поэтому сплошная и штриховая линии являются двойными, что можно увидеть при большом разрешении. Штрихпунктирная линия ограничивает область применимости приближения низкой плотности, d дано в единицах a_0 , и n_0 , в единицах a_0^{-2} . Тонкими пунктирами показаны линии, вдоль которых рассчитывалась зависимость среднего числа пар на ячейку и параметра θ_h от n_0 (см. рис. 4 и 5).

видно на рис. 1, изменение отношения электронной и дырочной масс в широких пределах слабо влияет на положение линии фазового перехода. На рис. 2 в координатах $(n_0 a_0^2, d / a_0)$ показаны линии раздела фаз, а также условная граница, которая очерчивает область фазовой диаграммы, где применимо приближение низкой плотности. Это граница задается уравнением $4\pi n_0 r_0^2 = 1$, которое ограничивает область, где $\Phi_{\mathbf{q}} < 1$ для всех \mathbf{q} (см. уравнение (17)). Линии, разделяющие область параметров с однородным и неоднородным конденсатом, двойные, так как в точке фазового перехода происходит скачок плотности, связанный со скачком n_0 .

На рис. 3 показана зависимость n_0 от химического потенциала при $d = 5a_0$ и $|x| = 0,14$. Приведенная зависимость демонстрирует, что в точке фазового перехода величина n_0 меняется скачком.

Параметр решетки a_h , выраженный через a_0 , увеличивается при увеличении отношения d / a_0 приблизительно по закону $d^{3/4}$. Этот же параметр, выраженный через r_0 , меняется слабо и остается в пределах $3,5r_0 < a_h < 5r_0$ во всем диапазоне рассматриваемых значений d и $\tilde{\mu}$. При заданном d при увеличении химического потенциала и соответствующем ему изменении плотности конденсата меняется среднее число пар, приходящихся на одну ячейку. Зависимость среднего числа пар на ячейку от n_0 приведена на рис. 4. Видно, что при рассматриваемых параметрах это число меньше либо порядка единицы.

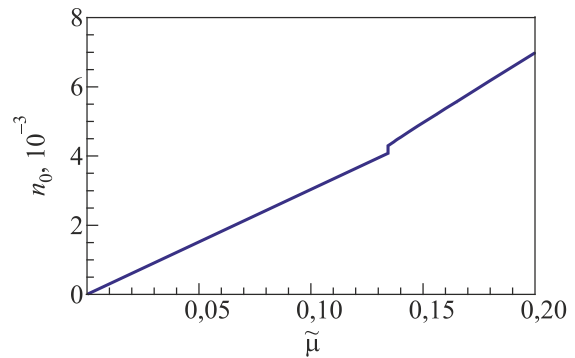


Рис. 3. Зависимость n_0 (в единицах a_0^{-2}) от химического потенциала (в единицах \mathcal{E}_0) при $d = 5a_0$ для системы 1.

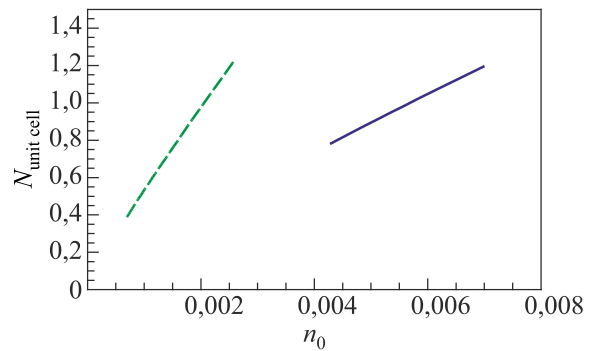


Рис. 4. Среднее число пар на одну элементарную ячейку как функция n_0 (в единицах a_0^{-2}) для $d / a_0 = 5$ (сплошная линия) и $d / a_0 = 10$ (штриховая линия) для системы 1.

На рис. 5 показана зависимость θ_h от n_0 . При заданном d величина θ_h увеличивается при увеличении n_0 . Пространственное распределение плотности (расчитанное по формуле $n(\mathbf{R}) = |\Psi_h(\mathbf{R})|^2$) при $\theta_h \approx 0,48$ показано на рис. 6. При таком θ_h в системе образуется сплошная сетка областей с пониженной плотностью конденсата, окружающая максимумы плотности. При этом плотность конденсата в сетке остается достаточно высокой. В неоднородном конденсате сверхтекучая жесткость будет меньше, чем в однородном с такой же средней плотностью (см., например, [29]). Поэтому температура перехода из фазы «суперсолид» в нормальное состояние будет ниже температуры перехода из однородной сверхтекучей фазы в нормальное состояние. При увеличении θ плотность конденсата в сетке снижается и при $\theta_h = \arctg(\sqrt{3}/2) \approx 0,886$ возникает сплошная сетка линий, на которых сверхтекучая

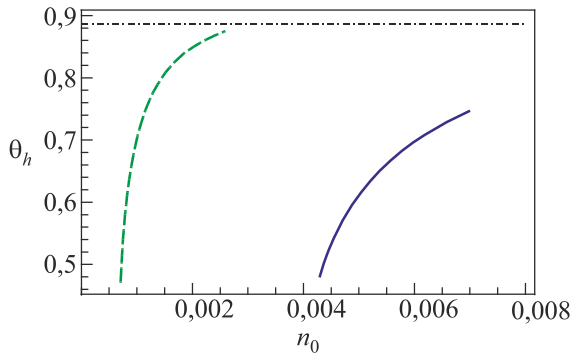


Рис. 5. То же, что и на рис. 4, для параметра θ_h . Штрих-пунктирной линией показано θ_h , при котором возникает сетка линий, на которых локальная плотность конденсата равна нулю.

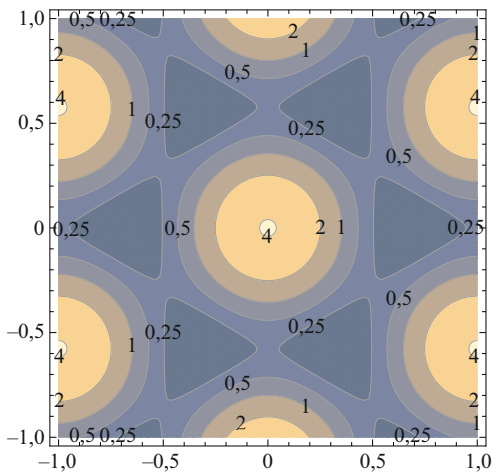


Рис. 6. Распределение плотности конденсата при $\theta_h = 0,48$. Светлым (желто-коричневым) тоном показаны участки с высокой плотностью, темным (серо-синим) тоном — участки с низкой плотностью. Цифры на контурах дают значение локальной плотности в n_0 . Размер показанной области — $4\pi/k \times 4\pi/k$.

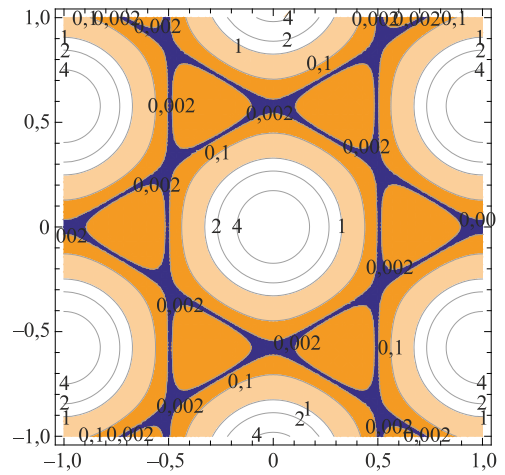


Рис. 7. То же, что и на рис. 6, для $\theta_h = 0,87$.

плотность обращается в нуль. На рис. 7 показано распределение плотности при $\theta_h = 0,87$, которое достигается при $d = 10a_0$ и $4\pi n_0 r_0^2 = 1$ (см. рис. 5). При $\theta_h = 0,87$ такая сетка уже практически сформировалась. Возникновение сетки означает, что конденсат разбивается на систему слабо связанных областей. Так как среднее число пар в каждой области будет не целым (см. рис. 4), такое состояние должно разрушиться при малой температуре. Можно также предположить, что произойдет подстройка параметра решетки a_h под среднюю плотность конденсата, так чтобы число пар в каждой из слабосвязанных областей стало целым. Оставляем этот вопрос для дальнейшего анализа.

Таким образом, в рамках формализма когерентных состояний описан переход разреженного газа электрон-дырочных пар в двухслойной системе в состояние «суперсолид», построена фазовая диаграмма системы и показано, как с изменением химического потенциала меняется пространственное распределение конденсата в этой фазе.

Приложение А

Явный вид констант взаимодействия

Константы взаимодействия $\gamma_2(k)$ и $\gamma_{3(4),w(h)}(k)$ можно записать в виде суммы слагаемых, обусловленных прямым и обменным взаимодействием:

$$\begin{aligned} \gamma_2(k) &= \gamma_2^{(d)}(k) + \gamma_2^{(ex)}(k), \\ \gamma_{3(4),w(h)}(k) &= \gamma_{3(4),w(h)}^{(d)}(k) + \gamma_{3(4),w(h)}^{(ex)}(k) \end{aligned} \quad (A.1)$$

($\gamma_{3,w}(k) \equiv 0$).

Эти слагаемые выражаются через фурье-образ волновой функции связанного состояния пары $\varphi_0(\mathbf{r})$. Слагаемое в $\gamma_2(k)$, обусловленное прямым взаимодействием, имеет вид

$$\begin{aligned} \gamma_2^{(d)}(k) = & V_{ee}(k) \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{d^2 p'}{(2\pi)^2} \times \\ & \times [\Phi_{\mathbf{p}+\tilde{m}_h \mathbf{k}} \Phi_{\mathbf{p}'-\tilde{m}_h \mathbf{k}} + \Phi_{\mathbf{p}-\tilde{m}_e \mathbf{k}} \Phi_{\mathbf{p}'+\tilde{m}_e \mathbf{k}}] \Phi_{\mathbf{p}} \Phi_{\mathbf{p}'} + \\ & + V_{eh}(k) \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{d^2 p'}{(2\pi)^2} \times \\ & \times [\Phi_{\mathbf{p}+\tilde{m}_h \mathbf{k}} \Phi_{\mathbf{p}'+\tilde{m}_e \mathbf{k}} + \Phi_{\mathbf{p}-\tilde{m}_e \mathbf{k}} \Phi_{\mathbf{p}'-\tilde{m}_h \mathbf{k}}] \Phi_{\mathbf{p}} \Phi_{\mathbf{p}'}, \quad (\text{A.2}) \end{aligned}$$

где $V_{ee}(k) = 2\pi e^2 / (\varepsilon k)$, $V_{eh}(k) = -V_{ee}(k)e^{-kd}$ — фурье-компоненты кулоновского взаимодействия, и введено обозначение $\tilde{m}_{e(h)} = m_{e(h)} / (m_e + m_h)$. Здесь и далее функция $\Phi_{\mathbf{p}}$ считается вещественной. Вклады прямого

взаимодействия в $\gamma_{3(4),w(h)}^{(d)}(k)$ можно выразить через функцию $\gamma_2^{(d)}(k)$:

$$\begin{aligned} \gamma_{3,h}^{(d)}(k) &= 4\sqrt{\frac{2}{3}}\gamma_2^{(d)}(k), \\ \gamma_{4,w}^{(d)}(k) &= \frac{1}{2}\gamma_2^{(d)}(2k), \\ \gamma_{4,h}^{(d)}(k) &= \frac{2}{3}\left[\gamma_2^{(d)}(k) + \gamma_2^{(d)}(\sqrt{3}k)\right] + \frac{1}{6}\gamma_2^{(d)}(2k). \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Для записи вклада обменного взаимодействия введем функцию

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathbf{G}, \mathbf{g}) = & -\int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \left\{ V_{ee}(q) \left[\Phi_{\mathbf{p}+\mathbf{g}+\tilde{m}_e \mathbf{G}} \Phi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}-\tilde{m}_h \mathbf{G}} + \Phi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}+\tilde{m}_e \mathbf{G}} \Phi_{\mathbf{p}-\mathbf{g}-\tilde{m}_h \mathbf{G}} \right] \Phi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}+\mathbf{G}} \Phi_{\mathbf{p}} + \right. \\ & + \frac{V_{eh}(q)}{2} \left(\left[\Phi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}+\mathbf{g}+\tilde{m}_e \mathbf{G}} \Phi_{\mathbf{p}-\mathbf{g}-\tilde{m}_h \mathbf{G}} + \Phi_{\mathbf{p}+\mathbf{g}+\tilde{m}_e \mathbf{G}} \Phi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}-\tilde{m}_h \mathbf{G}} \right] \Phi_{\mathbf{p}+\mathbf{G}} \Phi_{\mathbf{p}} + \right. \\ & \left. \left. + \left[\Phi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}+\mathbf{g}+\tilde{m}_e \mathbf{G}} \Phi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}-\tilde{m}_h \mathbf{G}} + \Phi_{\mathbf{p}+\mathbf{g}+\tilde{m}_e \mathbf{G}} \Phi_{\mathbf{p}-\mathbf{g}-\tilde{m}_h \mathbf{G}} \right] \Phi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}+\mathbf{G}} \Phi_{\mathbf{p}} \right) \right\}. \quad (\text{A.4}) \end{aligned}$$

Выражения для констант обменного взаимодействия, записанные через эту функцию, принимают вид: $\gamma_0^{(\text{ex})} = \Gamma(0, 0)$,

$$\gamma_2^{(\text{ex})}(k) = \frac{1}{4} \left[\Gamma(\mathbf{k}_1, 0) + 2\Gamma(\tilde{m}_h \mathbf{k}_1, -\tilde{m}_e \tilde{m}_h \mathbf{k}_1) + 2\Gamma(\tilde{m}_e \mathbf{k}_1, \tilde{m}_e \tilde{m}_h \mathbf{k}_1) + \Gamma((\tilde{m}_e - \tilde{m}_h) \mathbf{k}_1, 2\tilde{m}_e \tilde{m}_h \mathbf{k}_1) - 2\Gamma(0, 0) \right], \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{aligned} \gamma_{3,h}^{(\text{ex})}(k) &= \sqrt{\frac{2}{3}} \left\{ \Gamma(\mathbf{k}_1 + \tilde{m}_e \mathbf{k}_2, \tilde{m}_e \tilde{m}_h \mathbf{k}_2) + \Gamma(\mathbf{k}_1 + \tilde{m}_h \mathbf{k}_2, -\tilde{m}_e \tilde{m}_h \mathbf{k}_2) + \right. \\ & \left. + \Gamma[\tilde{m}_h \mathbf{k}_1 + m_e \mathbf{k}_2, \tilde{m}_e \tilde{m}_h (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)] + \Gamma[\tilde{m}_e \mathbf{k}_1 + \tilde{m}_h \mathbf{k}_2, -\tilde{m}_e \tilde{m}_h (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)] \right\}, \quad (\text{A.6}) \end{aligned}$$

$$\gamma_{4,w}^{(\text{ex})}(k) = \frac{1}{2} \left[\Gamma(2\tilde{m}_h \mathbf{k}_1, -2\tilde{m}_e \tilde{m}_h \mathbf{k}_1) + \Gamma(2\tilde{m}_e \mathbf{k}_1, 2\tilde{m}_e \tilde{m}_h \mathbf{k}_1) - \Gamma(0, 0) \right], \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{aligned} \gamma_{4,h}^{(\text{ex})}(k) &= \frac{1}{6} \left[\Gamma(2\tilde{m}_h \mathbf{k}_1, -2\tilde{m}_e \tilde{m}_h \mathbf{k}_1) + \Gamma(2\tilde{m}_e \mathbf{k}_1, 2\tilde{m}_e \tilde{m}_h \mathbf{k}_1) + 2\Gamma[\tilde{m}_e (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2), \tilde{m}_e \tilde{m}_h (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)] + \right. \\ & + 2\Gamma[\tilde{m}_h (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2), -\tilde{m}_e \tilde{m}_h (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)] + 2\Gamma(\tilde{m}_e \mathbf{k}_1, \tilde{m}_e \tilde{m}_h \mathbf{k}_1) + 2\Gamma(\tilde{m}_h \mathbf{k}_1, -\tilde{m}_e \tilde{m}_h \mathbf{k}_1) + \\ & \left. + 2\Gamma(\mathbf{k}_1 + (\tilde{m}_h - \tilde{m}_e) \mathbf{k}_2, -2\tilde{m}_e \tilde{m}_h \mathbf{k}_2) + 2\Gamma(\mathbf{k}_1 + (\tilde{m}_e - \tilde{m}_h) \mathbf{k}_2, 2\tilde{m}_e \tilde{m}_h \mathbf{k}_2) - 5\Gamma(0, 0) \right]. \quad (\text{A.8}) \end{aligned}$$

Подстановка в приведенные общие выражения функции $\varphi_{\mathbf{q}} = \sqrt{4\pi r_0} \exp(-q^2 r_0^2 / 2)$ дает

$$\gamma_{w,h}(k, \theta) = \frac{4\pi e^2 r_0}{\varepsilon} \tilde{\gamma}_{w,h}(\tilde{k}, \theta), \quad (\text{A.9})$$

где $\tilde{k} = kr_0$ и

$$\tilde{\gamma}_{w,h}(\tilde{k}, \theta) = \tilde{\gamma}_0 + 4\tilde{\gamma}_2(\tilde{k}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \tilde{\gamma}_{3,w(h)}(\tilde{k}) \cos \theta \sin^3 \theta + \tilde{\gamma}_{4,w(h)}(\tilde{k}) \sin^4 \theta \quad (\text{A.10})$$

($\tilde{\gamma}_{3,w}(\tilde{k}) \equiv 0$). Входящие в (A.10) функции $\tilde{\gamma}(\tilde{k})$ можно представить в виде суммы вкладов прямого и обменного взаимодействий аналогично (A.1). Явные выражения для вкладов прямого взаимодействия равны $\tilde{\gamma}_0^{(d)} = \tilde{d}$,

$$\tilde{\gamma}_2^{(d)}(\tilde{k}) = \frac{1}{2\tilde{k}} \left[\exp\left(-\frac{\tilde{k}^2(1-x)^2}{8}\right) + \exp\left(-\frac{\tilde{k}^2(1+x)^2}{8}\right) - 2\exp\left(-\tilde{k}\tilde{d} - \frac{\tilde{k}^2(1+x^2)}{8}\right) \right], \quad (\text{A.11})$$

где $\tilde{d} = d / r_0$. Выражения для $\tilde{\gamma}_{3(4),w(h)}^{(d)}(\tilde{k})$ получаются из (A.3) заменой в них всех γ на $\tilde{\gamma}$ и k на \tilde{k} .

Для компактной записи вкладов обменного взаимодействия определим функции

$$A(y) = \exp(-y)I_0(y),$$

$$fd(\tilde{k}, \tilde{d}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{3p^2}{8} - p\tilde{d}\right) I_0(p\tilde{k}) dp, \quad (A.12)$$

где $I_0(y)$ — модифицированная функция Бесселя. При $\tilde{k} = 0$ функцию $fd(\tilde{k}, \tilde{d})$ можно выразить через дополнительную функцию ошибок:

$$fd(0, \tilde{d}) = f_0(\tilde{d}) = \sqrt{\frac{4}{3}} \exp\left(\frac{2\tilde{d}^2}{3}\right) \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\tilde{d}\right). \quad (A.13)$$

Функции $\tilde{\gamma}^{(ex)}$, записанные через функции (A.12), (A.13), имеют вид

$$\tilde{\gamma}_0^{(ex)} = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} [1 - f_0(\tilde{d})], \quad (A.14)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_2^{(ex)}(\tilde{k}) = & -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\{ A\left[\frac{\tilde{k}^2(x-1)^2}{16}\right] \left(\exp\left[-\frac{\tilde{k}^2(x+1)^2}{8}\right] + 1 \right) + A\left[\frac{\tilde{k}^2(x+1)^2}{16}\right] \left(\exp\left[-\frac{\tilde{k}^2(x-1)^2}{8}\right] + 1 \right) \right. \\ & + \exp\left[-\frac{\tilde{k}^2(x+1)^2}{8}\right] \left(1 - 2fd\left[\frac{\tilde{k}(x+1)}{4}, \tilde{d}\right] \right) + \exp\left[-\frac{\tilde{k}^2(x-1)^2}{8}\right] \left(1 - 2fd\left[\frac{\tilde{k}|x-1|}{4}, \tilde{d}\right] \right) - \\ & \left. - \exp\left[-\frac{\tilde{k}^2(x^2+1)}{4}\right] \left(fd\left[\frac{\tilde{k}|x|}{2}, \tilde{d}\right] + fd\left[\frac{\tilde{k}}{2}, \tilde{d}\right] \right) - 2 + 2f_0(\tilde{d}) \right\}, \quad (A.15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_{3,h}^{(ex)}(\tilde{k}) = & -\sqrt{\frac{4\pi}{3}} \left\{ \exp\left[-\frac{\tilde{k}^2(x+1)^2}{8}\right] A\left[\frac{\tilde{k}^2(x-1)^2}{16}\right] + \exp\left[-\frac{\tilde{k}^2(x-1)^2}{8}\right] A\left[\frac{\tilde{k}^2(x+1)^2}{16}\right] - \right. \\ & \left. - \exp\left[-\frac{\tilde{k}^2(x^2+1)}{4}\right] \left(fd\left[\frac{\tilde{k}\sqrt{1+3x^2}}{4}, \tilde{d}\right] + fd\left[\frac{\tilde{k}\sqrt{3+x^2}}{4}, \tilde{d}\right] \right) \right\}, \quad (A.16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_{4,w}^{(ex)}(\tilde{k}) = & -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\{ A\left[\frac{\tilde{k}^2(x+1)^2}{4}\right] + A\left[\frac{\tilde{k}^2(x-1)^2}{4}\right] + \exp\left[-\frac{\tilde{k}^2(x+1)^2}{2}\right] \left(1 - 2fd\left[\frac{\tilde{k}(x+1)}{2}, \tilde{d}\right] \right) \right. \\ & \left. + \exp\left[-\frac{\tilde{k}^2(x-1)^2}{2}\right] \left(1 - 2fd\left[\frac{\tilde{k}|x-1|}{2}, \tilde{d}\right] \right) - 2[1 - f_0(\tilde{d})] \right\}, \quad (A.17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_{4,h}^{(ex)}(\tilde{k}) = & \frac{1}{3} \tilde{\gamma}_{4,w}^{(ex)}(\tilde{k}) - \frac{2}{3} \tilde{\gamma}_0^{(ex)} - \frac{1}{6} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\{ A\left[\frac{3\tilde{k}^2(x+1)^2}{16}\right] \left(1 + \exp\left[-\frac{\tilde{k}^2(x-1)^2}{8}\right] \right) + A\left[\frac{3\tilde{k}^2(x-1)^2}{16}\right] \left(1 + \exp\left[-\frac{\tilde{k}^2(x+1)^2}{8}\right] \right) \right. \\ & + A\left[\frac{\tilde{k}^2(x+1)^2}{16}\right] \left(1 + \exp\left[-\frac{3\tilde{k}^2(x-1)^2}{8}\right] \right) + A\left[\frac{\tilde{k}^2(x-1)^2}{16}\right] \left(1 + \exp\left[-\frac{3\tilde{k}^2(x+1)^2}{8}\right] \right) + \\ & + \exp\left[-\frac{3\tilde{k}^2(x+1)^2}{8}\right] \left(1 - 2fd\left[\frac{\sqrt{3}\tilde{k}(x+1)}{4}, \tilde{d}\right] \right) + \exp\left[-\frac{3\tilde{k}^2(x-1)^2}{8}\right] \left(1 - 2fd\left[\frac{\sqrt{3}\tilde{k}|x-1|}{4}, \tilde{d}\right] \right) + \\ & + \exp\left[-\frac{\tilde{k}^2(x+1)^2}{8}\right] \left(1 - 2fd\left[\frac{\tilde{k}(x+1)}{4}, \tilde{d}\right] \right) + \exp\left[-\frac{\tilde{k}^2(x-1)^2}{8}\right] \left(1 - 2fd\left[\frac{\tilde{k}|x-1|}{4}, \tilde{d}\right] \right) - \\ & \left. - 2 \exp\left[-\frac{\tilde{k}^2(1+x+x^2)}{2}\right] fd\left[\frac{\tilde{k}\sqrt{1+x+x^2}}{2}, \tilde{d}\right] - 2 \exp\left[-\frac{\tilde{k}^2(1-x+x^2)}{2}\right] fd\left[\frac{\tilde{k}\sqrt{1-x+x^2}}{2}, \tilde{d}\right] \right\}. \quad (A.18) \end{aligned}$$

1. А.Ф. Андреев, И.М. Лифшиц, *ЖЭТФ* **56**, 2057 (1969).
2. S. Balibar, *Nature* **464**, 176 (2010).

3. A.B. Kuklov, N.V. Prokof'ev, and B.V. Svistunov, *Physics* **4**, 109 (2011).
4. D.Y. Kim and M.H. W. Chan, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 155301 (2012).

5. A.B. Kuklov, L. Pollet, N.V. Prokof'ev, and B.V. Svistunov, *Phys. Rev. B* **90**, 184508 (2014).
6. A.B. Kuklov, *Phys. Rev. B* **100**, 014513 (2019).
7. A.B. Kuklov, N.V. Prokof'ev, and B.V. Svistunov, *Fiz. Nizk. Temp.* **46**, No. 5 (2020) [*Low Temp. Phys.* **46**, No. 5 (2020)].
8. Z.-K. Lu, Y. Li, D.S. Petrov, and G.V. Shlyapnikov, *Phys. Rev. Lett.* **115**, 075303 (2015).
9. F. Cinti and M. Boninsegni, *Phys. Rev. A* **96**, 013627 (2017).
10. S.V. Andreev, *Phys. Rev. B* **95**, 184519 (2017).
11. D. Baillie and P.B. Blakie, *Phys. Rev. Lett.* **121**, 195301 (2018).
12. L. Tanzi, E. Lucioni, F. Famà, J. Catani, A. Fioretti, C. Gabbanini, R.N. Bisset, L. Santos, and G. Modugno, *Phys. Rev. Lett.* **122**, 130405 (2019).
13. F. Böttcher, J.-N. Schmidt, M. Wenzel, J. Hertkorn, M. Guo, T. Langen, and T. Pfau, *Phys. Rev. X* **9**, 011051 (2019).
14. L. Chomaz, D. Petter, P. Ilzhofner, G. Natale, A. Trautmann, C. Politi, G. Durastante, R.M.W. van Bijnen, A. Patscheider, M. Sohmen, M.J. Mark, and F. Ferlaino, *Phys. Rev. X* **9**, 021012 (2019).
15. Д.В. Филь, С.И. Шевченко, *ФНТ* **44**, 1111 (2018) [*Low Temp. Phys.* **44**, 867 (2018)].
16. H.A. Fertig, *Phys. Rev. B* **40**, 1087 (1989).
17. Y.N. Joglekar, A.V. Balatsky, and S. Das Sarma, *Phys. Rev. B* **74**, 233302 (2006).
18. J. Ye, *J. Low Temp. Phys.* **158**, 882 (2010).
19. M.M. Parish, F.M. Marchetti, and P.B. Littlewood, *EPL* **95**, 27007 (2011).
20. Д.В. Филь, С.И. Шевченко, *ФНТ* **42**, 1013 (2016) [*Low Temp. Phys.* **42**, 794 (2016)].
21. Л.В. Келдыш, *Когерентные состояния экситонов*, в кн.: *Проблемы теоретической физики. Памяти Игоря Евгеньевича Тамма*, (отв. ред. В.И. Ритус), Наука, Москва (1972), с. 433; *УФН* **87**, 1273 (2017).
22. A.I. Bezuglyj and S.I. Shevchenko, *Phys. Rev. B* **75**, 075322 (2007).
23. А.И. Безуглый, С.И. Шевченко, *ФНТ* **35**, 479 (2009) [*Low Temp. Phys.* **35**, 373 (2009)].
24. С.И. Шевченко, А.С. Рукин, *Письма в ЖЭТФ* **90**, 46 (2009).
25. С.И. Шевченко, А.С. Рукин, *ФНТ* **36**, 186 (2010) [*Low Temp. Phys.* **36**, 146 (2010)].
26. С.И. Шевченко, А.С. Рукин, *ФНТ* **36**, 748 (2010) [*Low Temp. Phys.* **36**, 596 (2010)].
27. С.И. Шевченко, А.С. Рукин, *ФНТ* **38**, 1147 (2012) [*Low Temp. Phys.* **38**, 905 (2012)].
28. F.-C. Wu, F. Xue, and A.H. MacDonald, *Phys. Rev. B* **92**, 165121 (2015).
29. N. Sepulveda, C. Jossierand, and S. Rica, *Eur. Phys. J. B* **78**, 439 (2010).

Перехід у фазу «суперсолід» у двовимірному розрідженому газі електрон-діркових пар

Д.В. Филь, С.И. Шевченко

В межах підходу, що базується на формалізмі когерентних станів Л.В. Келдиша, описано перехід з однорідного надплинного стану в стан «суперсолід» у розрідженому двовимірному газі електрон-діркових пар з просторово розділеними компонентами. Провісником такого переходу є поява мінімуму ротонного типу в спектрі колективних збуджень, який при збільшенні відстані між шарами чи густини пар торкається осі абсцис, що сигналізує про нестійкість системи відносно появи просторової модуляції густини пар. Знайдено, що дещо раніше відбувається перехід першого роду в гексагональну фазу «суперсолід». Теорію розвинуто для довільного співвідношення між ефективними масами електрона та дірки й вона не містить феноменологічних констант. Побудована фазова діаграма системи в змінних «хімічний потенціал пар — відстань між шарами». Показано, що при фазовому переході виникає стрибок середньої густини конденсату. Встановлено, що при збільшенні хімічного потенціалу неоднорідна фаза розбивається на області з великою густиною, які оточені лініями, на яких густина обертається в нуль, також ці лінії утворюють суцільну сітку.

Ключові слова: електрон-діркові спаровування, екситонна надплинність, суперсолід.

A transition into a supersolid phase in a two-dimensional diluted gas of electron-hole pairs

D.V. Fil and S.I. Shevchenko

Within the approach based on the formalism of coherent states by L.V. Keldysh a transition from a homogeneous superfluid state to a supersolid state is described with reference to a diluted two-dimensional gas of electron-hole pairs with spatially separated components. A precursor of such a transition is the emergence the roton-type minimum in the spectrum of collective excitations, which, with increasing the distance between the layers or the density of the pairs touches to the abscissa axis, which signals instability of the system relative to the appearance of spatial modulation of the density of pairs. It is found that the first-order transition to the hexagonal supersolid phase takes place a little earlier. The theory is developed for an arbitrary ratio of effective masses of an electron and a hole and it does not contain phenomenological constants. The phase diagram of the system in coordinates «the chemical potential of the pairs — the distance between the layers» is built. It is shown that a phase transition is accompanied with a jump in the average density of the condensate. It is established that with an increase in the chemical potential, the inhomogeneous phase breaks up into high-density areas surrounded by lines on which the density is equal to zero, and these lines form a network.

Keywords: electron-hole pairing, exciton superfluidity, supersolid.