Low Temperature Physics/Фізика низьких температур, 2020, т. 46, № 5, с. 566–571

Стохастическая динамика квантованных вихрей. Континуальный и дискретный подходы

С.К. Немировский

Institute of Thermophysics, 1 Lavrentyev Ave, Novosibirsk 630090, Russia

Novosibirsk State University, 2 Pirogova Str., Novosibirsk 630090, Russia

Национальный исследовательский университет «МЭИ», г. Москва, Россия
E-mail: nemir@itp.nsc.ru

Статья поступила в редакцию 5 декабря 2019 г., опубликована онлайн 24 марта 2020 г.

Рассмотрено термодинамическое равновесие в системе хаотических квантованных вихрей в сверхтекучем гелии в случае противотока нормальной и сверхтекучей компонент. Изучены случаи континуального и дискретного подходов. Даже при континуальном рассмотрении системы в целом, вычислить статистическую сумму различных конфигураций вихревых петель можно только с привлечением дискретного подхода. Очевидно, что дискретный подход важен для численных исследований. Ввиду сложности задачи о стохастической динамике квантовых вихревых нитей под действием случайной силы, численное моделирование является основным инструментом решения данной проблемы. Обсуждаются некоторые физические последствия полученных результатов.

Ключевые слова: квантовые вихри, стохастическая динамика, дискретный подход.

1. Введение

В работе обсуждается постановка задачи о стохастической динамике квантовых вихревых нитей под действием случайной силы Ланжевена в покоящемся сверхтекучем гелии, а также в присутствии противотока нормальной и сверхтекучей компонент. Ансамбли хаотических вихревых нитей определяют многие физические свойства квантовых жидкостей, такие как термодинамические свойства, кинетику фазовых переходов, процессы переноса и другие. Знание структуры и динамики вихревого клубка является решающим для обозначенных проблем.

Другая мотивация данной работы связана с проблемой квантовой турбулентности, развитием клубка вихревых нитей в противотоке сверхтекучего гелия. Несмотря на долгое и интенсивное изучение квантовой турбулентности в сверхтекучем гелии, проблема очень далека от окончательного решения. Принципиальные вопросы статистики и динамики вихревого клубка и их связи с эволюционными уравнениями вихревых нитей остаются открытыми (см., например, [1–5]). Эта ситуация связана, во-первых, с необыкновенной сложностью задачи и, во-вторых, с тем обстоятельством, что для описания динамики вихрей в He II используется феноменологический подход и многие элементы эволюции, например, перезамыкание (реконнекция) нитей носят искусственный характер. Исследование термодинамического равновесия в системе квантованных вихрей в сверхтекучем гелии в случае противотока нормальной и сверхтекучей компоненты является более простой проблемой, допускающей возможность аналитического решения, поэтому имеются основания прояснить многие аспекты формирования структуры и динамики вихревого клубка.

В статье изучаются случаи континуального и дискретного подходов. Необходимость дискретизации возникает уже в континуальном приближении, чтобы вычислить статистическую сумму набора вихревых нитей. Формулировки проблемы в рамках дискретного подхода очень важны для численных исследований. Поскольку соответствующие задачи описываются сложными нелинейными дифференциальными уравнениями, возникает необходимость численных расчетов.

2. Термодинамика квантовых вихрей. Континуальная формулировка теории

В работах автора [6,7], но основе ланжевеновского подхода продемонстрировано существование термодинамического равновесия вихревых нитей в покоящемся сверхтекучем гелии, а также в присутствии противотока нормальной и сверхтекучей компонент. Изложим кратко основные результаты.

Уравнение движения элементов вихревой линии с радиусом-вектором $\mathbf{s}(\xi,t)$ имеет вид:

$$\dot{\mathbf{s}} = \dot{\mathbf{s}}_i(\xi) + \mathbf{v}_s + \alpha\mathbf{s}'(\xi)\times(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s - \dot{\mathbf{s}}_i(\xi)) + \boldsymbol{\zeta}(\xi,t). \quad (1)$$

Здесь $\dot{\mathbf{s}}_i$ — самоиндуцированная скорость радиус-векторов элементов вихревой линии, связанная с ее геометрической формой (см. [8]), α — коэффициент трения, $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s = \mathbf{V}_{ns}$ — относительная скорость нормальной и сверхтекучей компонент. Мы ограничимся изучением термодинамического равновесия, поэтому примем, что корреляционная функция для ланжевеновской силы $\boldsymbol{\zeta}(\xi,t)$ удовлетворяет флуктуационно-диссипативной теореме

$$\left\langle \zeta_\alpha(\xi_1,t)\cdot\zeta_\beta(\xi_2,t')\right\rangle = \frac{2k_B T\alpha}{\rho_s\kappa}\,\delta(\xi_1-\xi_2)\,\delta(t-t')\,\delta_{\alpha,\beta}. \quad (2)$$

Здесь k_B — постоянная Больцмана, T — температура, ρ_s — плотность сверхтекучей компоненты, κ — квант циркуляции. Индексы α,β означают компоненты вектора $\boldsymbol{\zeta}$.

Уравнение Фоккера–Планка для эволюции во времени для функционала распределения вероятностей $\mathcal{P}(\{\mathbf{s}(\xi)\},t) = \left\langle\delta\left(\mathbf{s}(\xi)-\mathbf{s}(\xi,t)\right)\right\rangle$ может быть получено из уравнения движения (1) стандартным образом (см, например, [9])

$$\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial t} + \int d\xi\frac{\delta}{\delta\mathbf{s}(\xi)}\left\{\left[\dot{\mathbf{s}}_i(\xi) + \mathbf{v}_s + \alpha\mathbf{s}'(\xi)\times(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s - \dot{\mathbf{s}}_i(\xi))\right]\mathcal{P}\right\} +$$

$$+\frac{1}{2}\iint d\xi d\xi'\left\langle\zeta_\alpha(\xi)\cdot\zeta_\beta(\xi')\right\rangle\delta(\xi-\xi')\,\delta(t_1-t_2)\,\delta_{\eta_1,\eta_2}\times$$

$$\times\frac{\delta}{\delta\mathbf{s}_{\eta_1}(\xi)}\frac{\delta}{\delta\mathbf{s}_{\eta_2}(\xi')}\mathcal{P} = 0.$$

В работах автора [6,7] показано, что уравнение (2) имеет решение в виде распределения Гиббса

$$\mathcal{P}(\{\mathbf{s}(\xi)\},t) = \mathcal{N}\exp\left(-\frac{H_c(\{\mathbf{s}\})}{k_B T}\right), \quad (3)$$

где $\mathcal{N}$ — нормировочный множитель, Гамильтониан $H_c\{\mathbf{s}\}$ в присутствии относительной скорости имеет вид

$$H_c(\{\mathbf{s}\}) = E(\{\mathbf{s}\}) - \mathbf{P}(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s). \quad (4)$$

Здесь энергия $E(\{\mathbf{s}\})$ и импульс Лэмба $\mathbf{P}(\{\mathbf{s}\})$ определены как (см., например, [2])

$$E(\mathbf{s}) = \frac{\rho_s\kappa^2}{8\pi}\iint\limits_{\Gamma\Gamma'}\frac{\mathbf{s}'(\xi)\mathbf{s}'(\xi')}{|\mathbf{s}(\xi)-\mathbf{s}(\xi')|}d\xi d\xi',$$

$$\mathbf{P} = \frac{\rho_s\kappa}{2}\int\mathbf{s}(\xi)\times\mathbf{s}'(\xi)\,d\xi. \quad (5)$$

В обычной статистической механике, когда $\mathbf{P}$ это истинный импульс частицы (или квазичастицы), справедливость уравнений (3), (4) очевидна и вытекает из преобразований Галилея. Так как импульс не является «реальным» импульсом, справедливость соотношений (3), (4) не является очевидной и нуждается в доказательстве (см. [6,7]). В представленной работе для величины $\mathbf{E}$ будет выбрано так называемые локальное приближение, когда энергия пропорциональна длине, $E = \varepsilon_V l$. Энергия ε_V на единицу длины вихревой линии (напряженность — «tension») равна

$$\varepsilon_V = \frac{\rho_s\kappa^2}{4\pi}\ln\left(\frac{\langle R\rangle}{a_0}\right), \quad (6)$$

где верхний параметр обрезания для логарифма $\langle R\rangle$ совпадает с усредненным радиусом кривизны вихревой нити, который связан с плотностью нитей $\mathcal{L}$ (полная длина в единице объема) как $\langle R\rangle \sim \mathcal{L}^{-1/2}$.

Соотношения (3)–(5) должны быть использованы для вычисления статистической суммы и, соответственно, для определения различных свойств вихревого клубка. По определению статистическая сумма равна

$$Z(T,\mathbf{V}_{ns}) = \sum_{\{\mathbf{s}(\xi,t)\}}\exp\left(-\frac{H_c\{\mathbf{s}\}}{k_B T}\right),$$

где совокупность вихревых конфигураций $\{\mathbf{s}(\xi,t)\}$ — это множество различных (замкнутых) траекторий различной длины l. Символ $\{\mathbf{s}(\xi,t)\}$ предполагает (i) вклад от всех возможных конфигураций петли длины l, (ii) суммирование по различным длинам l и (iii) по начальным точкам петель.

Вычисление статистической суммы проведено в работе [10]. Особый интерес представляет суммирование по всем возможным конфигурациям вихревой петли. Конечно, не имеется способа перечислить количество непрерывных кривых. Обычно используют какие-то дискретные аналоги, например, решеточная модель или модель полимерной цепи (или их комбинация). Эти модели утверждают, что число состояний линии растет с ее длиной l как $\exp[Cl/a]$. Здесь постоянная C порядка единицы, связанная с моделью, например, для трехмерной кубической решетки C равна $\ln(2\mathrm{d}-1) = \ln(5)$ (d — размерность пространства), величина a является параметром длины модели. Для модели с кубической решеткой это просто ребро куба, для полимера это размер мономера или элементарный шаг. В случае квантовых вихрей величина совпадает с длиной когерентности a_0, равной размеру кора вихря (подробнее см. [11,12]). Если объединить гиббсовский множитель (с локальной энергией $\varepsilon_V l$) (6) со множителем, возникающим из-за учета различной конфигурации вихревой нити, то можно увидеть, что статистическая сумма пропорциональна

$$Z \propto \int n(l)dl \exp\left[-\frac{\varepsilon_V l}{k_B T} - \frac{\ln 5}{a_0} l\right]. \qquad (7)$$

Здесь $n(l)$ — распределение петель по их длинам l. Видно, что для таких нитей при некоторой температуре статистическая сумма расходится и происходит спонтанное лавинообразное развитие плотного вихревого клубка. Соответствующая температура называется температурой Хагедорна (Hagedorn temperature, см. [11,12]), она равна

$$T_H = \frac{\varepsilon_V a_0}{k_B \ln(5)} \approx \frac{a\varepsilon_V}{k_B \cdot 1{,}6}. \qquad (8)$$

Таким образом, уже в континуальном случае необходимо вводить дискретизацию модели для того чтобы посчитать количество возможных конфигураций вихревой петли. Дальнейшее развитие дискретной модели связано с численным анализом динамики вихревого клубка. Из-за сложности уравнений движения вихревых нитей численный анализ, по-видимому, остается единственным доступным инструментом для исследования сверхтекучей турбулентности.

3. Дискретное уравнение Фоккера–Планка

Дискретный вариант развитого выше формализма может быть получен из следующих соображений. Мы представляем вихревую нить как набор дискретных точек («бусинок») $\mathbf{s}_m$ (m меняется от единицы до N), первоначально разделенных расстоянием a_0. В ходе эволюции расстояние между «бусинками» может меняться, поэтому вычислители используют специальную технику, которая контролирует это расстояние. В случае сгущения точек убираются лишние бусинки, в обратном случае «разряжения» добавляются дополнительные бусинки. Мы будем представлять вихревую нить как набор точек, разделенных фиксированным расстоянием a_0. Соответствие между континуальным и дискретным описанием может быть представлено следующей таблицей:

Discrete (step a)		Continuous
$\{\mathbf{s}_n\}$	$\leftrightarrow$	$\{\mathbf{s}(\xi)\}$
$(\mathbf{s}_n - \mathbf{s}_{n-1})/a$	$\leftrightarrow$	$\partial\mathbf{s}/\partial\xi = \mathbf{s}'$
$(\mathbf{s}_{n+1} - 2\mathbf{s}_n + \mathbf{s}_{n-1})/a^2$	$\leftrightarrow$	$\partial^2\mathbf{s}/\partial\xi^2 = \mathbf{s}''$
$\frac{1}{a}\delta_{nm}$	$\leftrightarrow$	$\delta(\xi_1 - \xi_2)$
$\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial\mathbf{s}_n}$	$\leftrightarrow$	$\frac{\delta}{\delta\mathbf{s}(\xi)}$
$\int\prod d\mathbf{s}_n$	$\leftrightarrow$	$\int\mathcal{D}\mathbf{s}(\xi)$
$\frac{\rho_s\kappa}{a}(\mathbf{s}_n - \mathbf{s}_{n-1})\times\mathbf{B}\{\mathbf{s}_n\} = \frac{1}{a}\frac{\partial H\{\mathbf{s}_n\}}{\partial\mathbf{s}_n}$	$\leftrightarrow$	$\rho_s\kappa\,\mathbf{s}'(\xi)\times\mathbf{B}(\xi) = \frac{\delta H\{\mathbf{s}(\xi)\}}{\delta\mathbf{s}(\xi)}$

Введем следующий дискретный вариант функционала распределения вероятности:

$$\mathcal{P}(\{\mathbf{s}_m, t\}) = \left\langle \mathcal{P}^M \right\rangle = \left\langle \delta\left(\mathbf{s}_m - \mathbf{s}_m(t)\right)\right\rangle. \qquad (9)$$

Эволюция величины $\mathcal{P}(\{\mathbf{s}_m, t\})$ может быть представлена в следующем виде (сравните с континуальным вариантом уравнение Фоккера–Планка (2)

$$\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial t} + \sum_m \frac{\delta}{\delta\mathbf{s}_{m,\eta_1}}\left\{\alpha\,\dot{\mathbf{s}}_{m,\eta_1}\,\mathcal{P}\right\} +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_m\sum_n\left\langle \mathbf{f}_{\eta_1}(m,t_1)\mathbf{f}_{\eta_2}(n,t_2)\right\rangle \frac{\delta\mathbf{s}_n(t_1)}{\delta\mathbf{f}_n(t_2)}\frac{\delta}{\delta\mathbf{s}_{n,\eta_1}}\frac{\delta}{\delta\mathbf{s}_{m,\eta_2}}\mathcal{P} = 0, \qquad (10)$$

Дискретный вариант флуктуационно-диссипативной теоремы имеет вид

$$\left\langle \mathbf{f}_{\eta_1}(m,t_1)\mathbf{f}_{\eta_2}(n,t_2)\right\rangle = \frac{k_B T}{\rho_s\pi(\hbar/m)a}\alpha\,\delta_{mn}\,\delta(t_1 - t_2)\delta_{\eta_1\eta_2}. \qquad (11)$$

Заметим, что, в соответствии с таблицей, в дискретном варианте вместо континуальной дельта функции $\delta(\xi_1 - \xi_2)$ используется замена $\frac{1}{a}\delta_{nm}$.

Докажем, что дискретное уравнение Фоккера–Планка (10) имеет решение в виде дискретного распределения Гиббса $\mathcal{P}(\{\mathbf{s}_m\}) = \mathcal{N}\exp(-H\{\mathbf{s}_m\}/k_B T)$ с дискретным вариантом гамильтониана $H\{\mathbf{s}_m\}$. Проведем доказательство для случая отсутствия противотока и локального выражения для энергии $E\{\mathbf{s}_m\}$:

$$H\{\mathbf{s}_m\} = \varepsilon_V \sum_n \frac{(\mathbf{s}_n - \mathbf{s}_{n-1})^2}{a^2} a.$$

Очевидно, что

$$\frac{\partial H\{\mathbf{s}_m\}}{\partial \mathbf{s}_m} = \varepsilon_V (\mathbf{s}_{n+1} - 2\mathbf{s}_n + \mathbf{s}_{n-1})/a. \quad (12)$$

Выражение в скобках в правой части уравнения (12) является дискретным вариантом второй производной, то есть вектором кривизны. Соответственно, величина $\partial H\{\mathbf{s}_m\} / \partial \mathbf{s}_m$ пропорциональна скорости движения элемента. Чтобы восстановить направление бинормали и получить правильный коэффициент, мы должны умножить векторно обе части уравнения (12) справа на первую производную $\mathbf{s}'_m$. В результате некоторых преобразований можно получить следующее соотношение:

$$\frac{\partial H\{\mathbf{s}_m\}}{\partial \mathbf{s}_m} = \rho_s \kappa \mathbf{s}'_m \times \dot{\mathbf{s}}_m a. \quad (13)$$

Выражение (13) является дискретным вариантом известной формулы

$$\frac{\delta E(\{\mathbf{s}(\xi)\})}{\delta \mathbf{s}(\xi_0, t)} = \rho_s \kappa \mathbf{s}'(\xi_0) \times \dot{\mathbf{s}}_i(\xi_0). \quad (14)$$

Здесь $\dot{\mathbf{s}}_i(\xi_0)$ — самоиндуцированная скорость вихревой нити в точке ξ_0, в локальном случае имеющая вид

$$\dot{\mathbf{s}}_i(\xi, t) = \frac{\kappa}{4\pi} \ln \frac{\langle R \rangle}{a_0} \mathbf{s}' \times \mathbf{s}''. \quad (15)$$

Для распределения Гиббса

$$\mathcal{P}(\{\mathbf{s}_m\}) = \mathcal{N} \exp(-H\{\mathbf{s}_m\}/k_B T)$$

имеем

$$\frac{\partial \mathcal{P}(\{\mathbf{s}_m\})}{\partial \mathbf{s}_m} = \mathcal{P}(\{\mathbf{s}_m\}) \frac{-1}{k_B T} \frac{\partial H\{\mathbf{s}_m\}}{\partial \mathbf{s}_m} =$$

$$= \frac{-1}{k_B T} \rho_s \kappa \mathbf{s}'_m \times \dot{\mathbf{s}}_m a\, \mathcal{P}(\{\mathbf{s}_m\}).$$

Подставляя это выражение в последний член уравнения Фоккера–Планка (10) получим:

$$\frac{1}{2} \left\langle \mathbf{f}_{\eta_1}(m, t_1) \mathbf{f}_{\eta_2}(n, t_2) \right\rangle \mathcal{P}(\{\mathbf{s}_m\}) \frac{1}{k_B T} \rho_s \kappa \mathbf{s}'_m \times \dot{\mathbf{s}}_m a =$$

$$= \frac{k_B T \alpha}{2\rho_s \pi (\hbar/m) a} \mathcal{P}(\{\mathbf{s}_m\}) \frac{1}{k_B T} \rho_s \kappa \mathbf{s}'_m \times \dot{\mathbf{s}}_m a =$$

$$\mathcal{P}(\{\mathbf{s}_m\}) \alpha \mathbf{s}'_m \times \dot{\mathbf{s}}_m.$$

Но это выражение (с обратным знаком) совпадает с третьим членом в уравнении Фоккера–Планка (10). Таким образом, происходит компенсация диссипативного слагаемого и члена, связанного с накачкой. В результате распределение Гиббса действительно является решением дискретного уравнения Фоккера–Планка.

3.1. Обобщение формулы Ито–Стратоновича

В интегральной форме, с учетом принятых приближений, получаем уравнение динамики вихревой точки нити:

$$\mathbf{s}(t, \xi) = \mathbf{s}(t_0, \xi) + \int_{t_0}^{t} \dot{s}_{\text{det}} dt' + \int_{t_0}^{t} d\mathbf{W}, \quad (16)$$

где $\dot{s}_{\text{det}}$ — детерминистская часть скорости, входящая в уравнение (1), а $\mathbf{W}(t)$ — стандартный винеровский процесс, который представляет собой решение уравнения Фоккера–Планка. Как известно, стохастический интеграл может быть определен с помощью формализма Ито–Стратоновича. В численной процедуре (см. [13,14]) использовалось следующее соотношение:

$$\mathbf{s}_m(t_{n+1}) = \mathbf{s}_m(t_n) + h\dot{\mathbf{s}}_{\text{det}} + \sqrt{Dh}\eta_n.$$

Здесь $\mathbf{s}_m(t_n)$ — значение приближенного решения уравнения в узле сетки в момент времени t_n, $\Delta t = h$ — шаг интегрирования по времени, η_n — последовательность независимых между собой нормальных случайных векторов с независимыми в совокупности компонентами $\eta_{n,j}$, $(j = 1, 2, 3)$, имеющих нулевое математическое ожидание и единичную дисперсию.

Найдем связь между коэффициентом диффузии D и температурой системы. Опуская детерминистские члены в уравнениях движения, найдем корреляционную функцию между скоростями $\dot{\mathbf{s}}_m$ точки в моменты времени t_1, t_2, разделенные интервалом Δt:

$$\left\langle \dot{\mathbf{s}}_m(t_1) \dot{\mathbf{s}}_m(t_2) \right\rangle = \left\langle \boldsymbol{\zeta}_m(t_1) \boldsymbol{\zeta}_m(t_2) \right\rangle = \frac{2k_B T}{\rho_s \kappa a} \alpha \delta(t_1 - t_2). \quad (17)$$

Интегрируя обе части по времени в интервалах от t до $t + \Delta t$ получим

$$\left\langle (\mathbf{s}_m(t + \Delta t) - \mathbf{s}_m(t))^2 \right\rangle = \frac{2k_B T \alpha}{\rho_s \kappa a} \Delta t.$$

То есть, как и следовало ожидать, эволюция величины $|\Delta \mathbf{s}|$ происходит по корневому закону, что характерно для броуновского движения

$$|\Delta \mathbf{s}| = \sqrt{D \Delta t}.$$

Коэффициент диффузии D (с размерностью см^2/с) связан с параметрами задачи и температурой T следующим вариантам соотношения Эйнштейна:

$$D = \frac{2k_B T \alpha}{\rho_s \kappa a}. \tag{18}$$

В заключение этой части обсудим важный вопрос температуры Хагедорна для дискретной постановки задачи. Подставив выражение для температуры Хагедорна T_H (8) в формулу (18), получим следующее выражение для предельного коэффициента диффузии D_H:

$$D_H = 2\alpha_f \frac{\kappa}{\ln 5} \frac{\ln\left(\langle R\rangle / a_0\right)}{4\pi}. \tag{19}$$

Полученный результат является примечательным. Предельный коэффициент диффузии очень слабо (логарифмически) зависит от шага задачи a. Конечно, это в какой-то степени является следствием выбранного нами локального приближения для выражения температуры, тем не менее, какой-то универсализм в задаче существует. Это обстоятельство позволяет сформулировать задачу в терминах коэффициента диффузии D, не привлекая вопрос о температуре. Такой подход удобен для интерпретации термодинамических результатов в задачах квантовой турбулентности, таких как структура клубка или зависимость плотности вихревых нитей от относительной скорости $(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)$.

4. Заключение

Развитый в статье формализм предназначен для исследования различных задач динамики вихревых нитей в термодинамическом приближении. Дискретный вариант формулировки проблемы предназначен для численных исследований. Яркий пример — исследование роли квантовых вихрей в динамике фазового перехода, которое описывает рост плотности вихревых нитей при приближении к T_λ. До сих пор попытки аналитического рассмотрения ограничивались либо двумерным случаем, либо случаем идеальных вихревых колец (см., например, [15–19]). Другим примером может служить анализ роста вихревых зародышей под действием термических флуктуации, как это было сделано в работе [20] в случае идеальных вихревых колец. Заметим, что в нашем приближении не требуется, чтобы вихревые петли были идеальными кольцами.

Другим важным результатом исследования о термодинамическом равновесии вихревой системы является попытка понять образование вихревой структуры в турбулентном сверхтекучем гелии. Действительно, имеются основания для утверждения, что из анализа термодинамического равновесия можно выявить роль относительной скорости $(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)$ в формировании вихревого клубка и возникновении его структуры.

Работа выполнена в рамках гранта РНФ № 19-19-00321.

1. S.K. Nemirovskii, *Phys. Rep.* **524**, 85 (2013).
2. R.J. Donnelly, *Quantized Vortices in Helium II*, Cambridge University Press, Cambridge, UK (1991).
3. V. Chagovets, I. Gritsenko, E. Rudavskii, G. Sheshin, A. Zadorozhko, and B. Verkin, *J. Phys. Conf. Ser.* **150**, 032014 (2009).
4. I. Gritsenko and G. Sheshin, *J. Low Temp. Phys.* **175**, 91 (2014).
5. И.А. Гриценко, К.А. Клокол, С.С. Соколов, Г.А. Шешин, *ФНТ* **42**, 28 (2016) [*Low Temp. Phys.* **42**, 21 (2016)].
6. S.K. Nemirovskii, *Theor. Math. Phys.* **141**, 1452 (2004).
7. S.K. Nemirovskii, *J. Low Temp. Phys.* **185**, 365 (2016).
8. K.W. Schwarz, *Phys. Rev. B* **38**, 2398 (1988).
9. Jean Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, Clarendon Press, Oxford (2002).
10. S.K. Nemirovskii, *Quantum Electronics* **49**, 436 (2019).
11. E. Copeland, D. Haws, S. Holbraad, and R. Rivers, *Physica A* **179**, 507 (1991).
12. H. Kleinert, *Gauge Fields in Condensed Matter Physics*, World Scientific, Singapore (1991).
13. L. Kondaurova, V. Andryuschenko, and S. Nemirovskii, *J. Low Temp. Phys.* **150**, 415 (2008).
14. S. Nemirovskii and L. Kondaurova, *J. Low Temp. Phys.* **156**, 182 (2009).
15. J.M. Kosterlitz and D.J. Thouless, *J. Phys. C.* **6**, 1181 (1973).
16. F. Lund, A. Reisenegger, and C. Utreras, *Phys. Rev. B* **41**, 155 (1990).
17. A.J. Chorin, *J. Stat. Phys.* **69**, 67 (1992).
18. A.J. Chorin, *Vorticity and Turbulence*, Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag (1994).
19. G.A. Williams, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 1201 (1999).
20. S.V. Iordanskii, *Sov. Phys. JETP* **21**, 467 (1965).

Стохастична динаміка квантових вихорів. Континуальний та дискретний підходи

С.К. Немировський

Розглянуто термодинамічну рівновагу в системі хаотичних квантових вихорів в надплинному гелії у разі протитечії нормальної та надплинної компонент. Вивчено випадки континуального та дискретного підходів. Навіть при континуальному розгляді системи в цілому, обчислити статистичну суму різних конфігурацій вихрових петель можна тільки із залученням дискретного підходу. Напевно, що дискретний підхід важливий для чисельних досліджень. Зважаючи на складність завдання зі стохастичної динаміки квантових вихрових ниток під дією випадкової сили, чисельне моделювання є основним інструментом розв’язання даної проблеми. Обговорюються деякі фізичні наслідки отриманих результатів.

Ключові слова: квантові вихори, стохастична динаміка, дискретний підхід.

Stochastic dynamics of quantized vortices. Continuum and discrete approaches

Sergey Nemirovskii

Thermodynamic equilibrium in a system of chaotic quantized vortices in superfluid helium in the case of a counterflow of normal and superfluid components is considered. The cases of continuum and discrete approaches are studied. The necessity for discretization arises already in the continuum approximation in order to calculate the contribution into the partition function arising from various configurations of vortex loops. Obviously, the discretization is a very important element for numerical studies. In view of the complexity of the problem of stochastic dynamics of quantum vortex filaments under the action of random force, numerical simulation is the main tool to solve this problem. Some physical consequences of the results are discussed.

Keywords: quantum vortices, stochastic dynamics, discrete approach.

.