Low Temperature Physics/Фізика низьких температур, 2020, т. 46, № 8, с. 904–908

Принцип остаточной симметрии вырожденных состояний равновесия и классификация параметров порядка одноподрешеточных магнетиков со спином s = 3/2

М.Ю. Ковалевский, С.В. Пелетминский

Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт», Харьков, 61108, Украина
E-mail: mik@kipt.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 3 марта 2020 г., опубликована онлайн 22 июня 2020 г.

Дана классификация состояний равновесия одноподрешеточных магнетиков со спином s = 3/2 и SU(4) симметрией обменного взаимодействия. Работа основана на концепции квазисредних и принципе остаточной симметрии вырожденных состояний равновесия. Используя трансформационные свойства магнитных степеней свободы, получена система уравнений для параметров порядка и даны их решения. Равновесная структура указанных степеней свободы представлена в терминах параметров генератора остаточной симметрии.

Ключевые слова: одноподрешеточный магнетик, параметр порядка, принцип остаточной симметрии, обменное взаимодействие.

Магнетики, структурные элементы которых обладают спином $s > 1/2$, являются областью высокого научного интереса и внимания современной физики. В таких многочастичных системах возможны новые типы магнитного упорядочения [1–4], в частности квадрупольное упорядочение и состояния спинового нематика. Такие состояния объясняют дополнительными магнитными степенями свободы — интегралами движения, появление которых связано с SU(n) ($n > 2$) симметрией обменного взаимодействия [5–9]. Это находится в полном соответствии с известным описанием магнетиков со спином $s = 1/2$ в терминах векторов спина и антиферромагнетизма [10–12]. Другой механизм расширения набора степеней свободы — возможность нарушения унитарной симметрии состояния равновесия, обусловленная несколькими параметрами порядка [13,14]. В [15,16] изучены магнетики со спином $s = 3/2$ на основе гамильтонианов негейзенберговского типа с магнитными степенями свободы, отвечающими чистым квантовым состояниям. Данная работа посвящена исследованию состояния равновесия магнетиков со спином $s = 3/2$ и SU(4) симметрией обменного взаимодействия и учитывает степени свободы смешанных квантовых состояний. Основа рассмотрения — концепция квазисредних [17] и принцип остаточной симметрии состояния равновесия, которые устанавливают равновесную структуру параметров порядка [18–22].

Гамильтониан обменных взаимодействий $\hat{\hat{H}}$ рассматриваемой физической системы обладает SU(4) симметрией $\left[\hat{\hat{H}},\hat{\hat{G}}_{\mu\nu}\right]=0$. Магнитные степени свободы одноподрешеточного магнетика со спином s = 3/2, следуя [23], заданы в базисе Вейля с помощью 4×4 неэрмитового и бесследного оператора:

$$\hat{\hat{G}}_{\mu\nu}=\int d^3x\hat{g}_{\mu\nu}(\mathbf{x})\equiv$$
$$\equiv\int d^3x\left[\hat{\psi}^+_\mu(\mathbf{x})\hat{\psi}_\nu(\mathbf{x})-\delta_{\mu\nu}\hat{\psi}^+_\sigma(\mathbf{x})\hat{\psi}_\sigma(\mathbf{x})/4\right].\quad(1)$$

Его плотность представлена в терминах ферми-операторов рождения и уничтожения. Буквы второй половины греческого алфавита пробегают значения $\mu,\nu,\ldots=1,2,3,4$. Для операторов $\hat{g}_{\mu\nu}(\mathbf{x})$ справедлива квантовая алгебра

$$\left[\hat{g}_{\mu\nu}(\mathbf{x}),\hat{g}_{\rho\sigma}(\mathbf{x}')\right]=\left(\hat{g}_{\mu\sigma}(\mathbf{x})\delta_{\rho\nu}-\hat{g}_{\rho\nu}(\mathbf{x})\delta_{\mu\sigma}\right)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}').\quad(2)$$

Свяжем матричные элементы $\hat{g}_{\mu\nu}(\mathbf{x})$ с эрмитовыми операторами, которые отвечают наблюдаемым магнитным величинам. Введем операторы спина и квадрупольной матрицы равенствами

$$\hat{\hat{s}}_\alpha(\mathbf{x}) \equiv i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{\hat{g}}_{\beta\gamma}(\mathbf{x}),$$
$$\hat{\hat{q}}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = \left(\hat{\hat{g}}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) + \hat{\hat{g}}_{\beta\alpha}(\mathbf{x}) - 2\delta_{\alpha\beta}\hat{\hat{g}}_{\gamma\gamma}(\mathbf{x})/3\right)/2$$

(буквы начала греческого алфавита принимают значения $\alpha, \beta, \gamma, .. = 1, 2, 3$), а также два векторных и скалярный операторы соотношениями

$$\hat{\hat{u}}_\alpha(\mathbf{x}) \equiv i\left(\hat{\hat{g}}_{\alpha 4}(\mathbf{x}) - \hat{\hat{g}}_{4\alpha}(\mathbf{x})\right),\ \hat{\hat{v}}_\alpha(\mathbf{x}) \equiv \hat{\hat{g}}_{\alpha 4}(\mathbf{x}) + \hat{\hat{g}}_{4\alpha}(\mathbf{x}),$$
$$\hat{\hat{g}}(\mathbf{x}) \equiv \hat{\hat{g}}_{44}(\mathbf{x}).$$

Набор пяти типов магнитных интегралов движения

$$\hat{\hat{S}}_\alpha \equiv \int d^3x\hat{\hat{s}}_\alpha(\mathbf{x}), \quad \hat{\hat{Q}}_{\alpha\beta} \equiv \int d^3x\hat{\hat{q}}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}),$$
$$\hat{\hat{U}}_\alpha \equiv \int d^3x\hat{\hat{u}}_\alpha(\mathbf{x}),\ \ \hat{\hat{V}}_\alpha \equiv \int d^3x\hat{\hat{v}}_\alpha(\mathbf{x}),\ \ \hat{\hat{G}} \equiv \int d^3x\hat{\hat{g}}(\mathbf{x}) \tag{3}$$

эквивалентен генератору симметрии (1). Средние значения трех последних плотностей интегралов движения задают *u*-, *v*-, *g*-магнитные степени свободы. Для интегралов движения (3), используя (2), получены коммутационные соотношения

$$i\left[\hat{\hat{S}}_\alpha, \hat{\hat{S}}_\beta\right] = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{\hat{S}}_\gamma,\ \ i\left[\hat{\hat{S}}_\alpha, \hat{\hat{Q}}_{\beta\gamma}\right] = -\varepsilon_{\alpha\beta\delta}\hat{\hat{Q}}_{\delta\gamma} - \varepsilon_{\alpha\gamma\delta}\hat{\hat{Q}}_{\delta\beta},$$
$$i\left[\hat{\hat{Q}}_{\alpha\beta}, \hat{\hat{Q}}_{\gamma\eta}\right] = -\hat{\hat{S}}_\lambda\left(\varepsilon_{\lambda\beta\gamma}\delta_{\alpha\eta} + \varepsilon_{\lambda\alpha\gamma}\delta_{\beta\eta} + \right.$$
$$\left. + \varepsilon_{\lambda\beta\eta}\delta_{\alpha\gamma} + \varepsilon_{\lambda\alpha\eta}\delta_{\beta\gamma}\right)/4$$
$$i\left[\hat{\hat{S}}_\alpha, \hat{\hat{U}}_\beta\right] = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{\hat{U}}_\gamma, i\left[\hat{\hat{S}}_\alpha, \hat{\hat{V}}_\beta\right] = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{\hat{V}}_\gamma,$$
$$i\left[\hat{\hat{U}}_\alpha, \hat{\hat{V}}_\beta\right] = 2\left(\frac{4}{3}\delta_{\alpha\beta}\hat{\hat{G}} - \hat{\hat{Q}}_{\alpha\beta}\right), \tag{4}$$
$$i\left[\hat{\hat{U}}_\alpha, \hat{\hat{Q}}_{\beta\gamma}\right] = \left(\delta_{\alpha\beta}\hat{\hat{V}}_\gamma + \delta_{\alpha\gamma}\hat{\hat{V}}_\beta - 2\delta_{\beta\gamma}\hat{\hat{V}}_\alpha/3\right)/2,$$
$$i\left[\hat{\hat{V}}_\alpha, \hat{\hat{Q}}_{\beta\gamma}\right] = -\left(\delta_{\alpha\beta}\hat{\hat{U}}_\gamma + \delta_{\alpha\gamma}\hat{\hat{U}}_\beta - 2\delta_{\beta\gamma}\hat{\hat{U}}_\alpha/3\right)/2,$$
$$i\left[\hat{\hat{U}}_\alpha, \hat{\hat{G}}\right] = -\hat{\hat{V}}_\alpha,\ i\left[\hat{\hat{V}}_\alpha, \hat{\hat{V}}_\beta\right] = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{\hat{S}}_\gamma,$$
$$i\left[\hat{\hat{U}}_\alpha, \hat{\hat{U}}_\beta\right] = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{\hat{S}}_\gamma,\ i\left[\hat{\hat{V}}_\alpha, \hat{\hat{G}}\right] = \hat{\hat{U}}_\alpha.$$

Эти соотношения задают трансформационные свойства операторов магнитных величин.

Введем в рассмотрение генератор SO(4) симметрии соотношением

$$\hat{\hat{L}}_{\mu\nu}(4) \equiv i\left(\hat{\hat{G}}_{\nu\mu} - \hat{\hat{G}}_{\mu\nu}\right).$$

Его матричные элементы связаны с операторами спина $\hat{\hat{S}}_\alpha$ и вектора $\hat{\hat{U}}_\alpha$ выражениями $\hat{\hat{S}}_\alpha \equiv \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{\hat{L}}_{\beta\gamma}/2$, $\hat{\hat{U}}_\alpha \equiv \hat{\hat{L}}_{\alpha 4}$. Матричные элементы генератора SO(5) симметрии $\hat{\hat{L}}_{ab}(5)$ $(a, b = 1, .., 5 = \mu, 5)$ определим равенствами

$$\hat{\hat{L}}_{\mu\nu}(5) = \hat{\hat{L}}_{\mu\nu}(4),\ \hat{\hat{L}}_{\alpha 5} \equiv \hat{\hat{V}}_\alpha = -\hat{\hat{L}}_{5\alpha}, \hat{\hat{L}}_{45} \equiv -\hat{\hat{G}} = -\hat{\hat{L}}_{54}.$$

Генераторы SO(4) и SO(5) симметрии удовлетворяют квантовой алгебре

$$i\left[\hat{\hat{L}}_{ab}, \hat{\hat{L}}_{cd}\right] = -\delta_{bc}\hat{\hat{L}}_{da} - \delta_{bd}\hat{\hat{L}}_{ac} + \delta_{ac}\hat{\hat{L}}_{db} + \delta_{ad}\hat{\hat{L}}_{bc}.$$

Алгебра операторов $\hat{\hat{S}}_\alpha$, $\hat{\hat{U}}_\alpha$, $\hat{\hat{V}}_\alpha$, $\hat{\hat{G}}$ совпадает с коммутаторами операторов $\hat{\hat{S}}_\alpha$, $\hat{\hat{U}}_\alpha$, $\hat{\hat{V}}_\alpha$, $\hat{\hat{G}}$ (4), за исключением соотношения

$$i\left[\hat{\hat{U}}_\alpha, \hat{\hat{V}}_\beta\right] = \delta_{\alpha\beta}\hat{\hat{G}}.$$

Нормальные состояния равновесия магнетика со спином $s = 3/2$ описываем статистическим оператором Гиббса $\hat{\hat{w}} = \exp\left(\Omega(Y) - Y_0\hat{\hat{H}}\right)$, где $T = Y_0^{-1}$ — температура. Магнитная SU(4) симметрия этих состояний совпадает с симметрией гамильтониана $\left[\hat{\hat{w}}, \hat{\hat{G}}_{\mu\nu}\right] = 0$. В случае SO(5) симметрии обменного взаимодействия справедливы равенства

$$\left[\hat{\hat{H}}, \hat{\hat{L}}_{ab}\right] = 0, \quad \left[\hat{\hat{w}}, \hat{\hat{L}}_{ab}\right] = 0.$$

Для вырожденных состояний статистический оператор Гиббса имеет вид

$$\hat{\hat{w}}_\nu(\hat{\theta}) = \exp\left(\Omega_\nu - Y_0\hat{\hat{H}} - \nu\hat{\hat{F}}(\hat{\theta})\right).$$

Источник

$$\hat{\hat{F}}(\hat{\theta}) = \int d^3x\left(\mathrm{tr}\ \hat{f}(\mathbf{x}, \hat{\theta})\hat{\hat{\Delta}}(\mathbf{x}) + \text{h.c.}\right)$$

— линейный функционал оператора параметра порядка $\hat{\hat{\Delta}}(\mathbf{x})$, который нарушает магнитную симметрию нормальных состояний равновесия $\left[\hat{\hat{w}}(\theta), \hat{\hat{G}}\right] \neq 0$. Матричная функция $\hat{f}(\mathbf{x}, \hat{\theta})$ зависит от дополнительных термодинамических параметров $\hat{\theta}$. В магнетиках с одной подрешеткой магнитные интегралы движения и операторы параметра порядка совпадают. В табл. 1 приведена магнитная симметрия и соответствующие

Таблица 1. Одноподрешеточные магнетики. Симметрия и вырожденные магнитные состояния со спином $s = 3/2$

Симметрия обменного взаимодействия	Магнитные интегралы движения (параметры порядка)	Состояние	Число степеней свободы
SO(3)	S_α	Ферромагнетик	3
SU(3)	$S_\alpha,\ Q_{\alpha\beta}$	Ферро-квадрупольный магнетик	8
SO(3)×SO(3) ~ SO(4)	$S_\alpha, U_\alpha; (S_\alpha, V_\alpha)$	Ферро-u, (v) магнетик	6
SO(5)	$S_\alpha, U_\alpha, \bar{V}_\alpha, G$	Ферро-$u, \bar{v}, g$ магнетик	10
SU(4)	$S_\alpha, Q_{\alpha\beta}, U_\alpha, V_\alpha, G$	Ферро-q, u, v, g магнетик	15

степени свободы одноподрешеточных магнетиков со спином $s = 3/2$.

В базисе Вейля очевиден переход к подгруппам симметрии $SU(2) \sim SO(3)$, $SU(3)$ и $SU(2)\times SU(2) \sim SO(4)$. Генератором подгруппы SO(3) симметрии является оператор спина $\hat{\hat{S}}_\alpha$, подгруппе SU(3) соответствуют два интеграла движения: $\hat{\hat{S}}_\alpha$ и $\hat{\hat{Q}}_{\alpha\beta}$. Подгруппа симметрии SU(2)×SU(2) также состоит из двух интегралов движения: $\hat{\hat{S}}_\alpha$ и $\hat{\hat{U}}_\alpha$ или $\hat{\hat{S}}_\alpha$ и $\hat{\hat{V}}_\alpha$. Операторы $\hat{\hat{S}}_\alpha$, $\hat{\hat{U}}_\alpha$, $\hat{\hat{V}}_\alpha$, $\hat{\hat{G}}$ образуют подалгебру группы SO(5).

Классификация вырожденных состояний равновесия магнетика со спином $s = 3/2$ основывается на принципе остаточной (ненарушенной) симметрии [20–22]

$$\left[\hat{\hat{w}}\left(\hat{\theta}\right), \hat{\hat{T}}\left(\hat{\theta}\right)\right] = 0. \qquad (5)$$

Генератор этой симметрии $\hat{\hat{T}}\left(\hat{\theta}\right)$ представляет собой линейную комбинацию интегралов движения, по отношению к которым симметрия состояния равновесия нарушена:

$$\hat{\hat{T}}\left(\hat{\theta}\right) \equiv \theta_\alpha \hat{\hat{S}}_\alpha + \theta_{\alpha\beta} Q_{\beta\alpha} + \underline{\theta} \hat{\hat{U}}_\alpha + \bar{\theta}_\alpha \hat{\hat{V}}_\alpha + \theta \hat{\hat{G}}. \qquad (6)$$

Действительные величины $\left(\hat{\theta}\right) \equiv \left(\theta_\alpha, \underline{\theta}_\alpha, \bar{\theta}_\alpha, \theta_{\alpha\beta}, \theta\right)$ задают магнитную анизотропию состояния равновесия и являются дополнительными термодинамическими параметрами. Из (4)–(6) получим уравнения, классифицирующие состояния равновесия магнетика:

$$\begin{gathered}
\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left(\theta_\alpha s_\gamma + 2\theta_{\alpha\rho} q_{\rho\gamma} + \underline{\theta}_\alpha u_\gamma + \bar{\theta}_\alpha v_\gamma\right) = 0, \\
\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left(\theta_\alpha u_\gamma + \underline{\theta}_\alpha s_\gamma\right) - 2\bar{\theta}_\alpha q_{\alpha\beta} + \theta_{\alpha\beta} v_\alpha - \theta v_\beta + 8\bar{\theta}_\beta g/3 = 0, \\
\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left(\theta_\alpha v_\gamma + \bar{\theta}_\alpha s_\gamma\right) + 2\underline{\theta}_\alpha q_{\alpha\beta} - \theta_{\alpha\beta} u_\alpha + \theta u_\beta - 8\underline{\theta}_\beta g/3 = 0, \\
\underline{\theta}_\alpha v_\alpha - \bar{\theta}_\alpha u_\alpha = 0, \\
2\theta_\alpha\left(\varepsilon_{\alpha\gamma\beta} q_{\beta\rho} + \varepsilon_{\alpha\rho\beta} q_{\beta\gamma}\right) + s_\alpha\left(\theta_{\beta\rho}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} + \theta_{\beta\gamma}\varepsilon_{\alpha\beta\rho}\right) - \\
-\left(\underline{\theta}_\rho v_\gamma + \underline{\theta}_\gamma v_\rho\right) + \left(\bar{\theta}_\rho u_\gamma + \bar{\theta}_\gamma u_\rho\right) = 0.
\end{gathered} \qquad (7)$$

Нетрудно показать, что средние значения магнитных параметров порядка для случая нарушения SO(5) симметрии удовлетворяют уравнениям классификации:

$$\begin{gathered}
\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left(\theta_\alpha s_\gamma + \underline{\theta}_\alpha u_\gamma + \bar{\theta}_\alpha \bar{v}_\gamma\right) = 0, \quad \bar{\theta}_\alpha u_\alpha - \underline{\theta}_\alpha \bar{v}_\alpha = 0, \\
\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left(\theta_\alpha u_\gamma + \underline{\theta}_\alpha s_\gamma\right) + \theta \bar{v}_\beta + \bar{\theta}_\beta g = 0, \\
\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left(\theta_\alpha \bar{v}_\gamma + \bar{\theta}_\alpha s_\gamma\right) - \theta u_\beta - \underline{\theta}_\beta g = 0.
\end{gathered} \qquad (8)$$

Получим решения уравнений (7), (8), соответствующие этим подгруппам симметрии.

Случай 1. SO(3) симметрия обменного взаимодействия, $\hat{\hat{T}}(\theta) \equiv \theta_\alpha \hat{\hat{S}}_\alpha$. Ищем ненулевые решения, отвечающие только одному типу магнитных интегралов движения. Из (7) следует, что векторы $s_\gamma, u_\gamma, v_\gamma$ коллинеарны направлению θ_γ. Последнее уравнение имеет два решения:

a) «легкая ось»

$$q_{\beta\rho} = q_*\left(\theta_\rho\theta_\beta / \theta_\gamma^2 - \delta_{\beta\rho}/3\right),$$

где q_* — постоянная величина, и

b) «легкая плоскость»

$$q_{\beta\rho} = q_*\left(e_\rho e_\beta - \delta_{\beta\rho}/3\right),$$

где вектор e_γ удовлетворяет соотношениям $\theta_\gamma e_\gamma = 0$ и $e_\alpha^2 = 1$. Возможны ферро-, квадрупольные- и u-, v-, g-магнитные состояния.

Случай 2. SU(3) симметрия обменного взаимодействия, $\hat{\hat{T}}(\theta) \equiv \theta_\alpha \hat{\hat{S}}_\alpha + \theta_{\alpha\beta}\hat{\hat{Q}}_{\alpha\beta}$. Параметры генератора остаточной симметрии заданы равенствами

$$\begin{gathered}
\theta_\alpha = \theta_1 m_\alpha + \theta_2 n_\alpha + \theta_3 l_\alpha, \\
\theta_{\alpha\beta} = \Theta_1\left(m_\alpha m_\beta - \delta_{\alpha\beta}/3\right) + \Theta_2\left(n_\alpha n_\beta - \delta_{\alpha\beta}/3\right),
\end{gathered}$$

где векторы $m_\alpha, n_\alpha, l_\alpha = (\mathbf{m}\times\mathbf{n})_\alpha$ образуют ортонормированный репер. Приведем решения уравнений классификации при $u_\alpha = v_\alpha = g = 0$ [22]:

$$\begin{gathered}
s_\alpha = \theta_1 A_+ m_\alpha + \theta_2 A_- n_\alpha + \theta_3 C_+ l_\alpha, \\
q_{\alpha\beta} = \Delta_*\left(\theta_\alpha\theta_\beta - \theta_\gamma^2\delta_{\alpha\beta}/3\right) + \Theta_1 A_-\left(m_\alpha m_\beta - \delta_{\alpha\beta}/3\right)/2 + \\
+ \Theta_2 A_+\left(n_\alpha n_\beta - \delta_{\alpha\beta}/3\right)/2.
\end{gathered} \qquad (9)$$

Параметры порядка представимы в терминах двух независимых амплитуд Δ_0, Δ_*:

$$A_{\pm} \equiv \Delta_0\left[1+\left(d_1+d_2\right)/2\right] \pm \Delta_*\left(d_1-d_2\right),$$
$$C \equiv \left(A_+ + A_-\right)/2 - \Delta_*\left(d_1+d_2\right).$$

Решение (9) описывает ферро-квадрупольные состояния и существует при произвольных θ_α, $\theta_{\alpha\beta}$.

Случай 3. Обменное взаимодействие имеет SO(3)×SO(3) симметрию, $\hat{\hat{T}}(\theta) \equiv \theta_\alpha \hat{\hat{S}}_\alpha + \underline{\theta}_\alpha \hat{\hat{U}}_\alpha$. Решение первой пары уравнений при $v_\alpha = 0 = g = \hat{q}$ имеет вид

$$s_\alpha = A\left(\theta_\alpha + \underline{\theta}_\alpha\right) + B\left(\theta_\alpha - \underline{\theta}_\alpha\right),$$
$$u_\alpha = A\left(\theta_\alpha + \underline{\theta}_\alpha\right) - B\left(\theta_\alpha - \underline{\theta}_\alpha\right),$$

где A, B — произвольные постоянные. Приведем решения оставшихся уравнений при некоторых ограничениях: если для параметров порядка в состоянии равновесия справедливы значения

a) $v_\gamma \neq 0,\ q_{\beta\gamma} = 0,\ g = 0$,
b) $v_\gamma \neq 0,\ q_{\beta\gamma} \neq 0,\ g = 0$,
c) $v_\gamma \neq 0,\ q_{\beta\gamma} = 0,\ g \neq 0$,
d) $v_\gamma \neq 0,\ q_{\beta\gamma} \neq 0,\ g = 0$,
e) $v_\gamma \neq 0,\ q_{\beta\gamma} = 0,\ g \neq 0$,

то нетривиальные решения или отсутствуют, или сводятся к случаю 1.

Если $v_\gamma = 0,\ q_{\beta\gamma} \neq 0,\ g \neq 0$, то возможны состояния, где структура квадрупольной матрицы совпадает с рассмотренным случаем 1 и ее модуль связан со скалярным параметром порядка соотношением $q_* = 2g$. Ненулевые решения существуют, если параметры генератора удовлетворяют соотношениям $\theta_\gamma = \underline{\theta}_\gamma$.

Случай 4. SO(3)×U(1) симметрия обменного взаимодействия, $\hat{\hat{T}}(\theta) \equiv \theta_\alpha \hat{\hat{S}}_\alpha + \theta \hat{\hat{G}}$. При $s_\gamma = q_{\beta\gamma} = g = 0$ найдены решения:

a) если $\theta^2 = 0$, то
$$u_\beta = A\theta_\alpha,\ v_\beta = B\theta_\alpha;$$

b) если $\theta^2 = \theta_\gamma^2$, то
$$u_\beta = A_\gamma \varepsilon_{\beta\rho\gamma}\theta_\rho + \left(\theta_\beta\theta_\gamma - \delta_{\beta\gamma}\theta_\sigma^2\right)B_\gamma,$$
$$v_\beta = \left(A_\beta\theta_\sigma^2 - (\mathbf{A\theta})\theta_\beta\right)/|\boldsymbol{\theta}| - |\boldsymbol{\theta}|\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}B_\gamma\theta_\alpha.$$

Векторы A_γ, B_γ ортогональны θ_α. Эти решения описывают $u-v$ магнитные состояния.

Случай 5. SO(5) симметрия обменного взаимодействия, $\hat{\hat{T}}(\hat{\theta}) \equiv \theta_\alpha \hat{\hat{S}}_\alpha + \underline{\theta}\hat{\hat{U}}_\alpha + \overline{\theta}_\alpha \hat{\hat{V}}_\alpha + \theta\hat{\hat{G}}$:

a) если $u_\alpha = 0 = \overline{v}_\alpha$, то ненулевые решения $s_\alpha = A\theta_\alpha$, $g = A\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\theta_\alpha\overline{\theta}_\beta\underline{\theta}_\gamma / \overline{\theta}_\sigma^2$ существуют для параметров генератора остаточной симметрии, удовлетворяющих соотношениям $\overline{\theta}_\alpha^2 = \underline{\theta}_\alpha^2$, $\overline{\theta}_\alpha\underline{\theta}_\alpha = 0$; решение описывает ферро-g магнитные состояния;

b) если $s_\alpha = 0 = \overline{v}_\alpha$, то ненулевые решения $u_\alpha = -g\underline{\theta}_\alpha / \theta \neq 0$ существуют для параметров генератора остаточной симметрии, удовлетворяющих соотношениям $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\theta_\alpha\theta_\gamma = \theta\overline{\theta}_\beta$, $\overline{\theta}_\alpha\underline{\theta}_\alpha = 0$, и описывают u–g магнитные состояния.

Выводы

В случае SU(4) симметрии обменного взаимодействия нормальные и вырожденные состояния равновесия одноподрешеточных магнетиков со спином $s = 3/2$ характеризуются пятью типами магнитных степеней свободы, имеющими смысл аддитивных интегралов движения. Концепция квазисредних и принцип остаточной симметрии состояния равновесия позволяют сформулировать уравнения классификации для пяти типов параметров порядка. Для состояний, где нарушена SU(4) симметрия или ее подгруппы, дан анализ возможных магнитных состояний равновесия. Если нарушены SO(3) и SU(3) симметрии, то нетривиальные решения с одним типом параметров порядка существуют при произвольных значениях параметров генератора остаточной симметрии. При нарушении SO(3)×SO(3) и SO(5) симметрий найдены условия на параметры генераторов остаточной симметрии, при которых сосуществуют два или три ненулевых параметра порядка.

1. P. Li, G.-M. Zhang, and S.-Q. Shen, *Phys. Rev. B* **75**, 104420 (2007).
2. P. Santini, S. Carretta, G. Amoretti, R. Caciuffo, N. Magnani, and G.H. Lander, *Rev. Mod. Phys.* **81**, 807 (2009).
3. A. Gorshkov, M. Hermele, V. Gurarie, C. Xu, P.S. Julienne, J. Ye, P. Zoller, E. Demler, M.D. Lukin, and A.M. Rey, *Nature Phys.* **6**, 289 (2010).
4. *Introduction to Frustrated Magnetism: Materials, Experiments, Theory*, C. Lacroix, P. Mendels, and F. Mila (eds.), *Springer Series in Solid-State Sciences* **164**, Springer, Berlin (2011).
5. D. Scalapino, S.-C. Zhang, and W. Hanke, *Phys. Rev. B* **58**, 443 (1998).
6. C. Wu, J.-P. Hu, and S.-C. Zhang, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 186402 (2003).
7. H.-H. Tu, G.-M. Zhang, and Lu Yu, *Phys. Rev. B* **74**, 174404 (2006).
8. Yang Qi and Cenke Xu, *Phys. Rev. B* **78**, 014410 (2008).
9. Hsiang-Hsuan Hung, Yupeng Wang, and Congjun Wu, *Phys. Rev. B* **84**, 054406 (2011).
10. С.В. Тябликов, *Методы квантовой теории магнетизма*, Наука, Москва (1965).
11. А.И. Ахиезер, В.Г. Барьяхтар, С.В. Пелетминский, *Спиновые волны*, Наука, Москва (1967).
12. Д. Маттис, *Теория магнетизма*, Мир, Москва (1967).
13. V. Bar'yakhtar, V. Butrim, A. Kolezhuk, and B. Ivanov, *Phys. Rev. B* **87**, 224407 (2013).
14. M.Y. Kovalevsky and A.V. Glushchenko, *J. Magn. Magn. Mater.* **355**, 192 (2014).

15. Yu.A. Fridman, O. Kosmachev, A.K. Kolezhuk, and B.A. Ivanov, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 097202 (2011).
16. O.A. Kosmachev, Yu.A. Fridman, E.G. Galkina, and B.A. Ivanov, *J. Exp. Theor. Phys*. **120**, 281 (2015).
17. N.N. Bogolubov, *Physica* **26**, S1 (1960).
18. L. Michel, *Rev. Mod. Phys.* **52**, 617 (1980).
19. Н.Н. Боголюбов (мл.), М.Ю. Ковалевский, А.М. Курбатов, С.В. Пелетминский, А.Н. Тарасов, *УФН* **159**, 585 (1989).
20. М.Ю. Ковалевский, С.В. Пелетминский, *Статистическая механика квантовых жидкостей и кристаллов*, Физматлит, Москва (2006).
21. А.В. Глущенко, М.Ю. Ковалевский, *ФНТ* **43**, 1324 (2017) [*Low Temp. Phys.* **43**, 1062 (2017)].
22. Н.Н. Боголюбов (мл.), М.Ю. Ковалевский, А.В. Глущенко, *ТМФ* **195**, 240 (2018).
23. N. Papanicolaou, *Nuclear Phys. B* **305**, 367 (1988).

Принцип залишкової симетрії вироджених станів рівноваги та класифікація параметрів порядку однопідграткових магнетиків зі спіном s = 3/2

М.Ю. Ковалевський, С.В. Пелетмінський

Класифіковано стани рівноваги однопідграткових магнетиків зі спіном $s = 3/2$ та SU (4) симетрією обмінної взаємодії. Роботу засновано на концепції квазісередніх та принципі залишкової симетрії вироджених станів рівноваги. Використовуючи трансформаційні властивості магнітних ступенів свободи, отримано систему рівнянь параметрів порядку та надано їх рішення. Рівноважну структуру зазначених ступенів свободи представлено у термінах параметрів генератора залишкової симетрії.

Ключові слова: однопідгратковий магнетик, параметр порядку, принцип залишкової симетрії, обмінна взаємодія.

The principle of residual symmetry of degenerate equilibrium states and the classification of order parameters of single-sublattice spin s = 3/2 magnets

M.Y. Kovalevsky and S.V. Peletminsky

The classification of equilibrium states of single-sublattice magnets with spin $s = 3/2$ and SU(4) symmetry of the exchange interaction have been given. The work is based on the concept of quasiaverages and the principle of residual symmetry of degenerate equilibrium states. Using transformation properties of magnetic degrees of freedom, a system of equations for the order parameters is obtained and their solutions are found. The equilibrium structure of these degrees of freedom is presented in terms of parameters of residual symmetry generator.

Keywords: single-sublattice magnet, order parameter, principle of residual symmetry, exchange interaction.