

PACS: 82.35.-x

Т.Н. Мельник<sup>1</sup>, И.Б. Краснюк<sup>1</sup>, Р.М. Таранец<sup>2</sup>, В.М. Юрченко<sup>1</sup>

ПОВЕРХНОСТНО-ИНДУЦИРОВАННЫЕ САМОПОДОБНЫЕ  
ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫЕ СТРУКТУРЫ  
В ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНЫХ СВЕРХПРОВОДНИКАХ II РОДА

<sup>1</sup>Донецкий физико-технический институт им. А.А. Галкина НАН Украины  
ул. Р. Люксембург, 74, г. Донецк, 83114, Украина  
E-mail: kras@kinetic.ac.donetsk.ua

<sup>2</sup>School of Mathematical Sciences, University of Nottingham  
University Park, Nottingham NG7 2RD, UK  
E-mail: taranets\_r@yahoo.com

Статья поступила в редакцию 27 сентября 2011 года

*Проведен теоретический анализ процессов проникновения магнитного поля в высокотемпературные сверхпроводники второго рода в зависимости от состояния, в котором находится сверхпроводник: в фазе вязкого течения магнитного потока, в режиме классического термоактивационного крипа потока, в режиме «гигантского» крипа потока либо в фазах вихревой жидкости или вихревого стекла. Исследование фазы вихревого стекла выполнено в окрестности линии плавления, а фазы вихревой жидкости – в окрестности линии плавления в режиме крипа (TAFF-режим). При этом вихревая жидкость при крипе потока может быть  $\delta T_c$ -запиннигована в сильном или слабом пиннинге. Отдельно рассмотрены случаи сильного и слабого пиннинга в случайном гауссовом потенциале пиннинга с учетом случайно распределенных точечных дефектов.*

**Ключевые слова:** магнитный поток, крип потока, вихревое стекло, вихревая жидкость

### Введение

Процессы проникновения магнитного поля в высокотемпературные сверхпроводники второго рода зависят от состояния, в котором находится сверхпроводник: в фазе вязкого течения магнитного потока, в режиме классического термоактивационного крипа потока, в режиме «гигантского» крипа потока либо в фазах вихревой жидкости или вихревого стекла. В первом случае вольт-амперная характеристика (ВАХ) линейна. Второй и третий случаи различаются высотой активационного барьера, который на несколько порядков ниже для высокотемпературных сверхпроводников по сравнению с обычными жесткими сверхпроводниками. Это объясняется малой длиной

когерентности и, следовательно, малым пиннингом, что приводит к большим скоростям проникновения вихрей (согласно формуле Аррениуса). Крип потока может происходить в пределе малых плотностей тока:  $U(j \rightarrow 0) = U < \infty$ . Такое поведение крип-барьера ожидается в фазе вихревой жидкости при высоких температурах  $T > T_m$ .

В режиме вихревого стекла при температурах вблизи линии плавления  $T_m(H)$  отклик системы является сильно нелинейным. В этой фазе барьер расходится алгебраически, т.е.  $U(j) \rightarrow \infty$  при  $j \rightarrow 0$ . Переход от фазы вихревого стекла к фазе вихревой жидкости является фазовым переходом первого рода. При этом, как показывает эксперимент, ВАХ  $E(j)$  ниже и выше линии плавления является монотонно возрастающей функцией, выпуклой соответственно вверх и вниз, которая ограничена некоторой линейной функцией снизу. Жидкость может находиться и в режиме вязкого течения потока (FF-режим), однако такая ситуация ниже не рассматривается.

Проанализируем отклик сверхпроводника на внешние возмущения по магнитному полю в различных фазах. При этом предполагаем, что сверхпроводник занимает полупространство и находится в параллельном магнитном поле. Амплитуда внешнего магнитного поля возрастает со временем по степенному, экспоненциальному или так называемому импульсному режиму с обострением, когда амплитуда магнитного поля возрастает за некоторый достаточно малый промежуток времени до «бесконечности». Типичными являются следующие ситуации. В режиме вязкого течения вихрей профиль магнитного поля (рис. 1, 2) существует при определенных соотношениях, которые характеризуют скорость накачки внешним магнитным полем и характер сопротивления среды. При крипе потока типичным является график, представленный на рис. 1,б. При этом возможны две ситуации, когда магнитное поле проникает: а) на бесконечную глубину; б) на конечную глубину

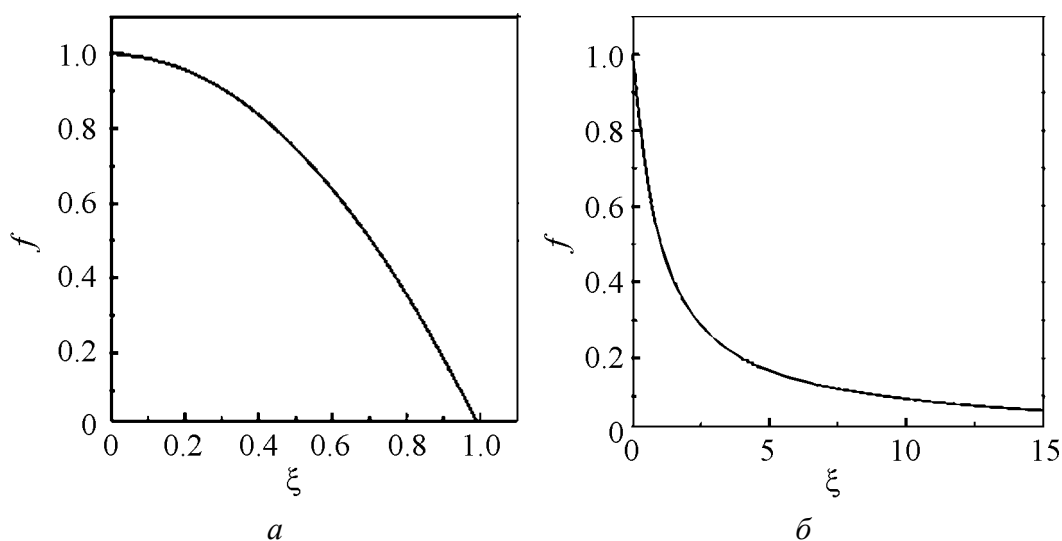


Рис. 1. Эволюция фронта магнитной волны при  $1 + m\sigma > 0$  (а) и  $1 + m\sigma < 0$  (б)

(возможна также эффективная локализация магнитного потока). Определены глубина и скорость проникновения магнитного поля в полупространство при возмущениях магнитного поля в различных фазах. Например, глубина и скорость проникновения магнитного потока при одних и тех же граничных возмущениях магнитного поля в режиме вихревого стекла всегда меньше, чем в режиме сильно или слабо запиннированной вихревой жидкости.

### Режим вязкого течения потока

Простейшая ситуация возникает в режиме вязкого течения вихрей. В этом случае барьером  $U$ , препятствующим движению вихрей, можно пренебречь. Соответствующее уравнение будет иметь вид

$$b_t = (\rho b_x)_x, \quad (1)$$

где  $\rho = \rho(b)$  – сопротивление движению вихрей в сверхпроводнике. Характер проникновения магнитного поля в сверхпроводник зависит от формы функции  $\rho(b)$  и формы накачки внешним магнитным полем.

В режиме вязкого течения вихрей функция  $\rho(b)$  имеет вид  $\rho_{\text{flow}}(b) = \rho_n B / H_{c2}$ , где  $\rho_n$  – сопротивление в нормальном состоянии сверхпроводника,  $H_{c2}$  – второе критическое поле. ВАХ сверхпроводника имеет вид  $E = \rho_{\text{flow}}(B)j$ .

Очевидно, что линейный закон повышения сопротивления при возрастании индукции магнитного поля (формула Бардина–Стефана) имеет ограниченную область применения. Простейшее обобщение этой формулы можно представить в виде  $\rho = \rho_n b^\sigma$ , где  $b = B / H_{c2}$ . В результате мы получаем уравнение

$$b_t = (b^\sigma b_x)_x. \quad (2)$$

В реальных экспериментах граничные условия имеют вид

$$b(0, t) = b_0(1+t)^m, \quad m > 0. \quad (3)$$

Решение краевой задачи (2), (3) может быть представлено как

$$b(x, t) = b_0(1+t)^m f(\xi), \quad (4)$$

где

$$\xi = x / (1+t)^{(1+m\sigma)/2}. \quad (4')$$

На рис. 1,а показано изменение функции  $f(\xi)$  при  $1 + m\sigma > 0$ , а на рис. 1,б – при  $1 + m\sigma < 0$ . Эволюция автомодельного решения краевой задачи (2), (3) при  $m > 0$  и  $\sigma > 0$  представлена на рис. 2. Как видим, пространственный профиль магнитной волны движется в полупространстве со скоростью

$$v = \xi_{\text{eff}} b_0^{1/2} \frac{1+m\sigma}{2} (1+t)^{(m\sigma-1)/2}, \quad (5)$$

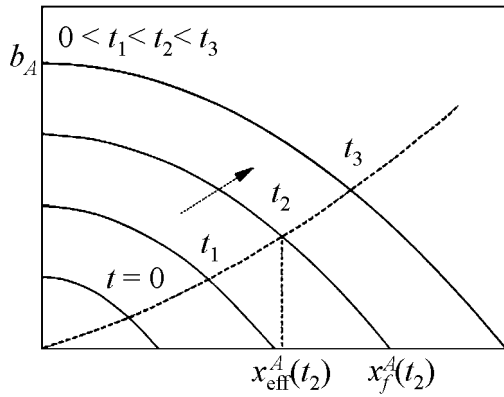


Рис. 2. Динамика фронта магнитной волны в режиме вязкого течения вихрей

Потребуем выполнения неравенства  $m\sigma < 1$ , поскольку в этом случае скорость проникновения вихрей стремится к нулю при больших временах. В результате получаем, что амплитуда магнитной волны при вязком течении потока моделируется графиком на рис. 1,а. Такое поведение имеет место в области параметров  $-1 < m\sigma < 1$ . Аналогично для графика на рис. 1,б должно выполняться неравенство  $m\sigma < -1$ .

Следует заметить, что

$$j(x, t) = -kb_0(1+t)^{(1+m\sigma)/2} f'(\xi). \quad (6)$$

Отсюда при  $1 + m\sigma > 0$

$$j(x, t) \sim -kb_0(1+t)^{(1+m\sigma)/2} f'(0), \quad (7)$$

а при  $1 + m\sigma < 0$

$$j(x, t) \sim -kb_0(1+t)^{(1+m\sigma)/2} f'(\infty). \quad (8)$$

В первом случае при больших временах выполняется неравенство  $j > 1$ , а во втором  $-j < 1$ . Тем самым при достаточно больших положительных  $m$  мы всегда остаемся в режиме вязкого течения потока, а при достаточно слабом возрастании внешнего магнитного поля переходим в режим крипа потока. Аналогично можно исследовать различные возможности не для степенного граничного режима, а для режима с обострением.

Такое поведение магнитного потока представимо в виде  $\rho = \rho_n b^\sigma$ , где  $b = B/H_{c2}$  в режиме вязкого течения вихрей при степенном граничном ус- ловии.

### Исследование в фазе запиннигованной вихревой жидкости в случайном $\delta T_c$ -потенциале пиннинга

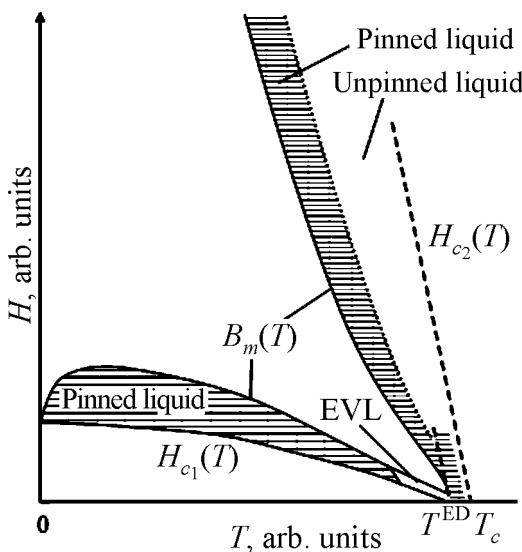
Тепловые флуктуации влияют на свойства запиннигованной вихревой нити и вихревой решетки. К примеру, они приводят к сглаживанию случайного потенциала пиннинга и, следовательно, к уменьшению критической плотности тока. Взаимодействие тепловых флуктуаций, порождающих смещение вихревых нитей, со случайной силой пиннинга происходит по разным сценариям для сверхпроводников, которые находятся в различных фазах. Остановимся на фазах вихревого стекла и вихревой жидкости. Тогда случайные возмущения вихревой решетки, порождаемые тепловыми флуктуациями, приводят к ее смещению, которому препятствует пиннинг вихревых нитей. В частности, случайные (тепловые) флуктуации могут деформиро-

вать вихревую решетку Абрикосова в вихревое стекло. В то же время вихревая жидкость, также образующая решетку, под действием тепловых флуктуаций остается вихревой жидкостью.

Случайные возмущения (смещения) вихревых нитей, порождаемые пиннингом в фазе вихревой жидкости, можно отобразить в виде последовательности: вихревая решетка → вихревое стекло (вихревая жидкость) → вихревая жидкость. Это означает, что отклик сверхпроводника на малые возмущения плотности транспортного тока ( $j \rightarrow 0$ ) оказывается различным для фазы вихревого стекла и фазы вихревой жидкости. Фаза вихревого стекла характеризуется расходимостью барьера пиннинга  $U(j)$ , т.е.  $U(j) \rightarrow 0$  при  $j \rightarrow 0$ . Это свойство активационного барьера сохраняется в присутствии тепловых флуктуаций. Таким образом, соответствующая ВАХ остается сильно нелинейной в фазе вихревого стекла при достаточно малых плотностях транспортного тока.

Рассмотрим отклик сверхпроводника на внешние возмущения, которые воздействуют на вихревую структуру, представляющую ту или иную фазу. Для фазы вихревой жидкости присутствие случайного потенциала пиннинга приводит к существенному уменьшению линейного сопротивления  $\rho_{lin} = dE/dj|_{j \rightarrow 0}$  по сравнению с его значением в режиме вязкого течения потока, где  $\rho_{lin} > 0$ . Пиннинг является следствием неоднородности вихревой структуры.

Несмотря на то, что тепловые флуктуации приводят к сглаживанию кора вихрей, вихревая решетка сохраняет свойство неоднородности, и взаимодействие такой периодической неоднородной структуры со случайным потенциалом пиннинга сохраняет пиннинг при всех температурах  $T > T_m(B)$ , где  $T_m$  – температура плавления вихревой решетки (рис. 3). Из рисунка видно, что вблизи линии плавления имеет место неравенство  $T \ll U_0 < \infty$ , где  $U_0$  – высота барьера пластической деформации. Вблизи  $T_c$  выполняется неравенство  $U_0 \ll T$  в фазе entangled vortex liquid (EVL).



**Рис. 3.** Фазовая диаграмма в плоскости напряженность магнитного поля–температура.  $B_m(T)$  – линия плавления вихревой решетки;  $H_{c1}(T)$  – первое критическое поле;  $H_{c2}(T)$  – второе критическое поле;  $T^{ED}$  – температура фазового перехода entangled liquid → disentangled liquid

В качестве внешнего воздействия можно использовать возрастающее по амплитуде с течением времени магнитное поле, которое изменяется на границе сверхпроводника по закону

$$b(0, t) = b_0 (1 + t/t_{sc}), m > 0, \quad (9)$$

где  $t_{sc}$  – время выхода распределения индукции магнитного поля на скейлинговое поведение.

При исследовании влияния случайного потенциала пиннинга на динамические свойства неупорядоченного состояния вихревой жидкости используем общий динамический метод, который позволяет определить аналитическую форму сопротивления  $\rho(b)$  в двух случаях: 1) в режиме термоактивационного движения потока, т.е. при  $j < j_{cr}$  (где  $j_{cr}$  – критическая плотность тока); 2) в режиме вязкого течения жидкости при  $j > j_{cr}$ . Таким образом, мы исследуем области на фазовой диаграмме (рис. 3), которые соответствуют незапиннигованной и запиннигованной жидкости.

Пусть высокотемпературный сверхпроводник второго рода занимает полупространство  $x \geq 0$ , причем в параллельной геометрии  $B \parallel e_z, E, j \parallel e_y$  и  $v \parallel e_x$  (где  $e$  – единичный орт, направленный вдоль соответствующей оси;  $E = E_y$  – электрическое поле;  $j = j_y$  – плотность транспортного тока;  $v = v_x$  – скорость движения вихрей).

Пусть сверхпроводник находится в фазе вихревой жидкости. Тогда возможно существование двух диссипативных режимов: 1) режима вязкого течения потока при  $T > T_p$ , когда жидкость незапиннигована; 2) режима термоактивационного движения потока при  $T_m < T < T_p$ , когда вихревая жидкость является запиннигованной.

Если пиннинг отсутствует, то вихревая жидкость движется под действием приложенного тока, что приводит к линейному сопротивлению  $\rho_{flow}(b)$ , определяемому формулой Бардина–Стефана.

Рассмотрим движение вихревой структуры под действием силы Лоренца с учетом случайного потенциала пиннинга  $U_{pin}$ . Скорость  $v$  определяется по формуле  $v = v_0 + \delta v$ , где  $v_0 = jB/\eta c$  ( $c$  – скорость света). Величина  $\delta v$  есть малое возмущение скорости  $v_0$ , которое порождается случайной силой пиннинга. Пиннинг становится существенным, когда выполняется соотношение  $\delta v \approx v$ . Тогда условие  $\delta v_{cr} \approx v_{cr}$  определяет критическую плотность тока  $j_{cr} = c\eta v_{cr}/B$ . Слабый пиннинг определяется из требования  $j_{cr} \ll j_0$ , где  $j_0$  – ток распаривания. Тогда дифференциальное сопротивление  $\rho = E/j$  в случае движения запиннигованной вихревой жидкости можно записать в форме

$$\rho = \frac{\rho_{flow}}{1 + \delta v/v}. \quad (10)$$

Нетрудно показать, что существует предел

$$\frac{\delta v}{v} = \frac{v\xi^4}{\eta a_0^2} \frac{K_0^6}{4\pi} \frac{\langle u^2(t_{pl}) \rangle_{th}}{T} t_{pl}. \quad (11)$$

Здесь  $\xi$  – корреляционная длина,  $a_0$  – шаг решетки Абрикосова. Среднее по тепловым флуктуациям  $\langle u^2(t_{pl}) \rangle_{th} \approx a_0^2$ , причем  $K_0 = 2\pi/a_0$ .

Тогда соотношение (11) можно записать в виде

$$\frac{\delta v}{v} = \frac{\gamma\xi^4}{4T} \frac{K_0^6}{4\pi} t_{pl}. \quad (12)$$

Типичное время, которое контролирует вихревое движение в жидкой фазе, – это время пластической деформации  $t_{pl} = t_{th} e^{U_{pl}/T}$ . Тогда сопротивление в режиме термоактивационного движения магнитного потока (ТАFF-режим) может быть записано в виде

$$\rho = \rho_{flow} \left[ 1 + \frac{\gamma_u \xi^4}{4T} \frac{K_0^6}{4\pi} t_{pl} \right], \quad (13)$$

где  $\gamma_u$  определяет амплитуду корреляционной связи

$$\langle U_{pin}(x), U_{pin}(x') \rangle = \gamma_u \delta(x - x'), \quad (14)$$

а усреднение проводится по всем случайным флуктуациям потенциала пиннинга. Отсюда вытекает, что ТАFF-режим действительно может существовать при слабых плотностях тока  $j$ , если выполняется следующее условие:

$$A \frac{t_{pl}}{t_{th}} \gg 1, \quad (15)$$

где  $t_{pl}$ ,  $t_{th}$  – среднее время соответственно пластической деформации и тепловых флуктуаций. Очевидно, что при  $t_{pl} \gg t_{th}$  отсюда вытекает интерполяционная формула

$$\rho = \rho_{flow} \left( 1 + A e^{U_{pl}/T} \right), \quad (16)$$

где

$$A = \sqrt{2\pi} Gi \left[ \frac{j_c(0)}{j_0(0)Gi} \right]^{3/2} \frac{B}{H_{c_2}(T)}. \quad (17)$$

Здесь  $Gi$  – постоянная Гинзбурга,  $j_0(0)$  – ток распаривания при нулевой температуре.

В частности, при  $t_{pl} \gg t_{th}$  мы получаем однородную вихревую структуру, которая не может быть запиннингована. Однако это условие не выполняется для очень вязкой жидкости, которая характеризуется двумя временными масштабами:  $t_{pl}$  и  $t_{pl} \gg t_{th}$ . В этом случае вихревая структура сохраняется на

масштабах  $t < t_{pl}$ . Если  $t_{pl} \gg t_{pin}$ , усреднение на масштабах  $t_{pin}$  не является полным, поэтому вихревая жидкость сохраняет однородную структуру, которая может быть запиннигована.

В результате в зависимости от величины времени пластической деформации  $t_{pl}$  и характерного времени пиннинга  $t_{pin}$  вихревая жидкость может быть запиннигована или незапиннигована (рис. 4). Функция  $b_A(x,t) = A_0 R_0 (t_0 - t)^n w_a(\xi)$  вычислена при следующих значениях параметров:  $n = -1$ ;  $k_0 = 1$ ;  $A_0 = R_0 = 1$ . Следовательно, при  $t_{pl} \gg t_{pin}$  (очень вязкая жидкость) мы имеем запиннигованную жидкость, которая может существовать в двух омических режимах соответственно при малых и больших плотностях тока так, что

$$\rho(j \rightarrow 0) = \rho_0 e^{-U_{pl}/T} \propto 1/t_{pl} \quad (18)$$

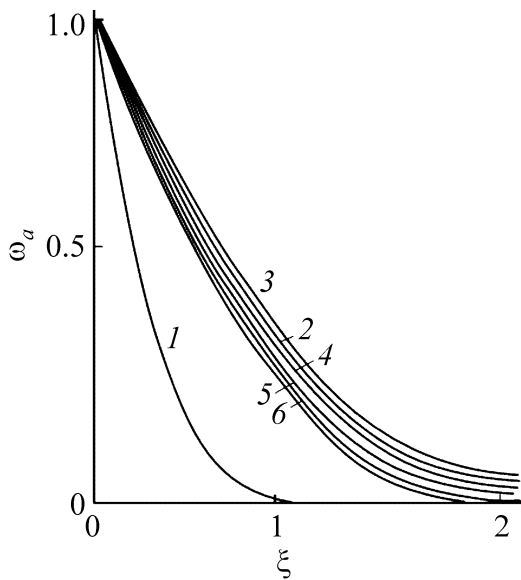
и

$$\rho(j > j_{cr}) = \rho_{flow} \cdot \quad (19)$$

Барьер пластической деформации можно записать в виде

$$U_{pl} = \varepsilon \varepsilon_0 a_0 \propto \frac{T_c - T}{\sqrt{\pi}}, \quad (20)$$

где  $\varepsilon$  – параметр анизотропии,  $\varepsilon_0$  – характерный энергетический масштаб, который определяется по формуле  $\varepsilon_0 = (\Phi_0/4\pi\lambda)^2$  ( $\Phi_0$  – квант магнитного потока,  $\lambda$  – лондоновская глубина проникновения магнитного поля).



**Рис. 4.** Распределение автомоделной компоненты  $w_a(\xi)$  решения краевой задачи в фазе сильно  $\delta T_c$ -запиннигованной вихревой жидкости в случайном потенциале пиннинга с экспоненциальным граничным режимом с обострением в различные моменты времени: 1 –  $t_0 = 0.95$ , 2 – 0.47, 3 – 0.9, 4 –  $5 \cdot 10^{-2}$ , 5 –  $2.5 \cdot 10^{-2}$ , 6 –  $1.2 \cdot 10^{-2}$

Таким образом, мы определили функцию  $\rho(b)$  в диффузионном уравнении (5) для TAFF-режима очень вязкой вихревой жидкости в случайном потенциале пиннинга.

Существуют экспоненциальные краевые условия в режиме с обострением  $b(0,t) = b_0(t_0 - t)^n$ ,  $n < 0$ ,  $0 < t < t_0$ , где  $b_0 = B_0/B_m$ , причем  $T(B_m) = T_m$  и



$B_0 > H_{c1}$  такие, что для запиннигованной вихревой жидкости магнитное поле проникает в полупространство так, как это показано на рис. 4.

Действительно, уравнение имеет вид

$$b_t = \rho(b)b_{xx} + \rho'(b)b_x^2. \quad (21)$$

Согласно диаграмме на рис. 3 мы должны ограничиться областью магнитных полей  $H_{c1} < B < B_m$ . Оказывается, что при  $t \rightarrow t_0$  диффузией в уравнении (21) можно пренебречь. В самом деле, если отбросить в уравнении (21) член со старшей производной, то придем к вырожденной задаче

$$b_t^A = k_0 A_0 (b_x^A)^2 \quad (22)$$

с граничными условиями

$$b^A(x, 0) = A_0 R_0 (t_0 - t)^n, \quad n < 0, \quad (23)$$

где  $k_0, A_0, R_0$  – параметры задачи [1]. Краевая задача имеет автомодельное решение

$$b^A(x, t) = A_0 R_0 (t_0 - t)^n w_a(\xi), \quad (24)$$

где

$$\xi = \frac{x}{(k_0 R_0)^{1/2} (t_0 - t)^{(1+n)/2}}, \quad (25)$$

и функция  $w_a(\xi)$  изображена на рис. 4. Свойства монотонно убывающей функции  $w_a(\xi)$  зависят от параметра  $n$ :

а) если  $-1 < n < 0$ , то при всех  $\xi > 0$

$$w_a(\xi) = C(n)\xi^{2n/(1+n)} + \dots + \dots \quad (26)$$

при  $\xi \rightarrow \infty$ , где

$$C(n) = -\frac{1+n}{2} 2^{-2n/(1+n)} (-n)^{1/(1+n)}; \quad (27)$$

б) при  $n = -1$  решение имеет вид

$$w_a(\xi) = (1 - \xi/2)^2 \text{ при } 0 < \xi < 2 \text{ и } w_a(\xi) = 0 \text{ при } \xi > 2; \quad (28)$$

в) при  $n < -1$  функция  $w_a(\xi)$  является финитной, т.е.  $w_a(\xi) > 0$  при  $0 \leq \xi \leq \xi_f$ , где  $\xi_f = 2(-n)^{n/2} (-1-n)^{-(1+n)/2}$  и  $w_a(\xi) = 0$  при  $\xi > \xi_f$ , причем

$$w_a(\xi) = -\frac{1+n}{2} \xi_f (\xi_f - \xi) + o(\xi_f - \xi) \quad (29)$$

при  $\xi \rightarrow \xi_f$ . Во всех случаях  $w'_a(0) = -(-n)^{1/2}$ ,  $w''_a(\xi) > 0$  всюду, где  $w_a(\xi) > 0$ , причем  $w''_0(\xi) \geq w''_0(0) = (1-n)/4$  при  $0 < \xi < \xi_f$ .

При этом свойства решений  $b^A(x, t)$  вырожденного уравнения близки к свойствам решений общего уравнения, т.е. на интервале  $0 < \xi < \xi_f$

$$-A_0 R_0 t_0 \leq |b(x, t) - b^A(x, t)| \leq A_0 |w_a''(\xi)| \ln \left( \frac{t_0}{t_0 - t} \right). \quad (30)$$

Для автомодельного представления решения

$$w(\xi, t) = (A_0 R_0)^{-1} (t_0 - t)^{-n} b \left( \xi (k_0 R_0)^{1/2} (t_0 - t)^{(1+n)/2} \right). \quad (31)$$

Из автомодельного представления переменной  $\xi$  следует, что координата фронта магнитной волны, т.е. точка, в которой амплитуда магнитного поля обращается в нуль, определяется из равенства

$$x_{\text{eff}}(t) = \xi_{\text{eff}} (k_2^{-1} b_0)^{1/2} (t_0 - t)^{(1+n)/2}, \quad (32)$$

где  $k_2$  – некоторая постоянная [2]. В результате из (25) мы можем определить скорость проникновения магнитного поля в сверхпроводящее полупространство:

$$v_{\text{eff}} = -\frac{1+n}{2} \xi_{\text{eff}} (k_2^{-1} b_0)^{1/2} (t_0 - t)^{(n-1)/2}, \quad (33)$$

где  $\xi_{\text{eff}}$  определяется из требования  $b_A(\xi_{\text{eff}}) = 1/2$ .

Итак, мы получили распределение магнитного поля в фазе очень вязкой вихревой жидкости для так называемого  $\delta T_c$ -пиннинга. Это означает, что для корреляционной функции

$$K(x, u) = v \xi^4 \delta(z) k(u), \quad (34)$$

где  $u$  – смещение решетки, мы должны положить

$$v = 2\pi \frac{v_a}{\alpha^2} \left| \frac{H_c^2}{4\pi} \right|^2, \quad (35)$$

$\alpha = -\alpha(0)(1 - T/T_c)$  изменяет знак при критической температуре и является параметром в функционале Гинзбурга–Ландау для параметра порядка,  $H_c$  – критическое термодинамическое поле.

Таким образом, случайный потенциал пиннинга определяется случайным гауссовым шумом при  $T = T_c$  так, что  $\alpha(x) = \alpha_0 + \delta\alpha(x)$ , где  $\langle \delta\alpha \rangle = 0$  и  $\langle \delta\alpha(x), \delta\alpha(x') \rangle = \gamma_a \delta(x - x')$ . Это первая из возможных альтернатив определения  $\delta T_c$ -пиннинга через коэффициент Гинзбурга–Ландау  $\alpha$ .

Следующая возможность состоит в характеристике случайного потенциала пиннинга с помощью моделирования плотности дефектов  $n_j$  и индивидуальных сил пиннинга  $f_{\text{pin}}$ , которые действуют как дефекты на расстоянии  $L$  в окрестности кора вихря (и, следовательно, только на этом расстоянии вносят вклад в энергию пиннинга).

Тогда в силу взаимодействия между точечными дефектами и индивидуальными силами пиннинга, которые случайно распределены в некотором объеме  $V = \xi^2 L$  (где  $L$  есть длина некоторого сегмента вихревой решетки), флуктуации энергии пиннинга могут быть записаны в виде

$$\langle E_{\text{pin}}^2(L) \rangle^{1/2} = (f_{\text{pin}}^2 n_i \xi^2 L)^{1/2} \xi, \quad (36)$$

где  $E$  – энергия пиннинга. Следовательно, мы получаем  $\gamma = f_{\text{pin}}^2 n_i \xi^2$ . Очевидно, что  $\delta T_c$ -пиннинг является формально результатом нулевого приближения по возмущениям скорости  $\delta v/v \ll 1$ . В этом случае сопротивление  $\rho(B, A)$  определяется формулой (15), причем параметр пиннинга  $A$  не зависит для слабого  $\delta T_c$ -пиннинга от индукции магнитного поля  $B$ .

### Сильный $\delta T_c$ -пиннинг

Далее мы рассмотрим ситуацию, когда пиннинг все еще мал, но не настолько, чтобы можно было использовать приближение независимости параметра пиннинга  $A$  от индукции магнитного поля. Параметр  $A$  отвечает за величину  $\delta T_c$ -пиннинга и определяется при слабом пиннинге по формуле

$$A = 4(2\pi)^6 \frac{\gamma \xi^4 \lambda}{\Phi_0^2 T a_0^2}, \quad (37)$$

а при сильном пиннинге – по формуле

$$A = \sqrt{2} \text{Gi} \left( \frac{j_{\text{cr}}(0)}{j_0(0) \text{Gi}} \right)^{3/2} \frac{B}{H_{c_2}(T)}. \quad (38)$$

Предположим, что при сильном  $\delta T_c$ -пиннинге выполняется неравенство

$$\mu = \sqrt{2} \text{Gi} \left( \frac{j_{\text{cr}}(0)}{j_0(0) \text{Gi}} \right)^{3/2} \frac{B}{H_{c_2}(T)} \ll 1. \quad (39)$$

Для ВТСП типично значение  $\text{Gi} = 10^{-2}$ , что отвечает неравенству

$$\frac{j_{\text{cr}}(0)}{j_0(0)} \ll 10^{-4/3}. \quad (40)$$

Для  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{1-y}$  пиннинг является слабым, т.е.  $j_{\text{cr}}/j_0 = 10^{-3} - 10^{-2}$ . В то же время для ВТСП тепловые возмущения являются большими, т.е.  $\text{Gi} = 10^{-2}$ .

Итак, условие (26) выполняется и, следовательно, можно повторить, как и выше, процедуру разложения сопротивления  $\rho = \rho(b, \mu)$  по малому параметру  $\mu$  в окрестности критической температуры, когда барьер пластической деформации мал, что приводит к следующему представлению:

$$\rho(b) = \rho_{\text{flow}} \left[ 1 - A \left( 1 + \frac{1}{2c_L^2} \frac{T_m}{T} \frac{\theta^{-1} - 1}{\sqrt{b}} \right) \right]. \quad (41)$$

Здесь  $A = \mu b$ , где  $\mu$  определяется по формуле (26) при  $T > T_m$ . В результате аналогично предыдущему получаем уравнение диффузии при сильном пиннинге:

$$b_t = \rho(b, \mu) b_x, \quad (42)$$

где  $\rho(b, \mu)$  определяется как

$$\rho(b, \mu) = 2^{-1} c_L^2 T_m(T) (T_c / T - 1), \quad (43)$$

$c_L$  – постоянная Линдемманна. Предположим, что функция  $\rho(b, \mu)$  является монотонной, т.е. выполняется неравенство  $\rho'(b, \mu) > 0$ . Исследование решений уравнения (27), записанных в виде

$$b_t = \rho'(b, \mu) b_x^2 + \rho(b, \mu) b_{xx}, \quad (44)$$

проводится по той же схеме, что и выше. Действительно, для функции  $b = B/B_m$  введем обозначения

$$k_1^- = \rho'(b^-, \mu), \quad k_2^- = \rho(b^-, \mu) \quad (45)$$

и

$$k_2^+ = \rho'(1, \mu), \quad k_2^+ = \rho(1, \mu), \quad (46)$$

где  $b^- = H_{c1} / B_m$ . Тогда субрешение (т.е. наименьшее из всех возможных решений) определяется из уравнения

$$b_t = k_1^- b_x^2 + k_2^- b_{xx}, \quad (47)$$

а суперрешение (т.е. наибольшее из всех возможных решений) – из уравнения

$$b_t = k_1^+ b_x^2 + k_2^+ b_{xx}. \quad (48)$$

Положим  $k_0 = k_1^-$  и  $k_2^- = k_0 / A_0$ , т.е.  $A = k_1^- / k_2^-$ . Тогда уравнение можно записать в виде

$$b_t = k_0 b_x^2 + \frac{k_0}{A_0} b_{xx}. \quad (49)$$

Рассмотрим для решений этого уравнения тот же экспоненциальный граничный режим с обострением, что и в случае слабого пиннинга. Тогда аналогично предыдущему можно показать, что при  $t \rightarrow t_0$  диффузионным слагаемым в данном уравнении можно пренебречь и ограничиться исследованием уравнения Гамильтона–Якоби

$$b_t = k_0 b_x^2. \quad (50)$$

**Проникновение магнитного потока в фазе термоактивационного крипа и в фазе «гигантского» крипа потока с граничными режимами с обострением**

Теперь рассмотрим краевую задачу о проникновении магнитного потока в ВТСП при термоактивационном крипе магнитного потока. Скорость движения вихрей при крипе потока определяется по формуле

$$v = v_0 e^{-(cU_0 - BV_c d_p) / cT}, \quad (51)$$

где  $v_0$  – микроскопическая скорость вихрей,  $c$  – скорость света,  $d_p$  – среднее расстояние активации связок вихревых нитей,  $U_0$  – барьер пиннинга,  $V_c$  – активационный объем, в котором происходит деформация вихревой решетки под действием потенциала  $U_0$ . Согласно (1) скорость вихрей зависит от параметра  $\mu = U_0/T$ , причем  $\mu \gg 1$  для обычных жестких сверхпроводников, и этот параметр на несколько порядков меньше для ВТСП, что объясняется малой длиной когерентности, которая приводит к малому барьеру пиннинга и высоким температурам ВТСП. Соотношения (1) можно записать в безразмерном виде

$$v = v_0 e^{-\mu(1 + kbb_x)}, \quad (52)$$

где

$$k = \frac{1}{\beta} \frac{B_{c2}^2}{H_{c2}} \frac{V_c d_p}{\lambda \xi_{\parallel} a_0^2}, \quad (53)$$

при этом постоянная  $\beta > 0$  пропорциональна числу вихревых нитей в связке,  $\xi_{\parallel}$  – длина когерентности, параллельная вихревой нити.

Пусть выполняется неравенство  $k\mu \ll 1$ . Тогда из уравнений

$$E = Bv/c, \quad c^{-1}B_t = E_x \quad (54)$$

нетрудно получить уравнение (см. [2]):

$$b_{t''} + \sigma^{-1} b_{x'} = (b^2 b_{x'})_{x'}, \quad (55)$$

где  $\sigma^{-1} = \frac{D}{k\mu}$ ,  $D = e^{-\mu} \frac{\tau_b}{\lambda} v_0$ ,  $t' = t/\tau_b$  ( $\tau_b$  – время релаксации магнитного поля),  $t'' = k\mu t'$ ,  $x' = x/\lambda$ .

Рассмотрим для решений уравнения (2) граничное условие

$$b(0, t'') = b_0 (1 + t'')^m \quad (56)$$

(в дальнейшем штрихи в обозначениях будем опускать). Решения задачи (2), (3) будем искать в виде  $b(x, t) = b_0 (1 + t)^\alpha \varphi(\eta, t)$ , где  $\eta = x(1 + t)^{-\delta}$ , причем  $\alpha, \delta > 0$ . При  $\alpha = \delta$  задача допускает редукцию к уравнению пористой среды:

$$\varphi_t = (\varphi^2 \varphi_\eta)_\eta, \quad (57)$$

где  $t \rightarrow b_0^2 t$ , с граничным условием

$$\varphi(0, t) = (1+t)^p, \quad p \geq 0. \quad (58)$$

Решение задачи (3), (4) имеет вид

$$\varphi_A(\eta, t) = (1+t)^p \vartheta(\xi), \quad (59)$$

где  $\xi = \eta/(1+t)^{(1+2p)/2}$ , причем функция  $\vartheta(\xi)$  ведет себя так, как показано на рис. 1,а. В частности, при  $p = 1/2$  получаем

$$\vartheta(\xi) = \left(1 - \sqrt{2}\xi\right)_+^{1/2}. \quad (60)$$

В результате при  $p = 1/2$  решение представимо в виде

$$b(x, t) = b_0 (1+t)^{\alpha+1/2} \left(1 - \sqrt{2}x/(1+t)^{\alpha+1}\right)_+^{1/2}. \quad (61)$$

При  $p \neq 1/2$  получаем, что

$$m + \frac{1}{2} b(x, t) = b_0 (1+t)^m \vartheta(\xi(x, t, m)), \quad (62)$$

где  $m = \alpha + p$ .

Выберем  $\xi_{\text{eff}} = \vartheta^{-1}(1/2)$ . Тогда эффективная глубина проникновения магнитного поля равна

$$x_{\text{eff}}(t) = \xi_{\text{eff}} (1+t)^{m+1/2}, \quad (63)$$

а скорость движения вихрей

$$v_{\text{eff}}(t) = \xi_{\text{eff}} (m + 1/2) (1+t)^{m-1/2}. \quad (64)$$

Полученные соотношения можно записать в размерном виде. Тогда при  $\lambda = 10^{-5}$  см,  $\tau_b = 10^{-1} - 10^{-4}$  с (экспериментальные значения для YBaCuO [3]) получим оценку для скорости движения вихрей при «гигантском» крипе магнитного потока:

$$10^{-4} \text{ см/с} < v_0 < 10^{-1} \text{ см/с}, \quad (65)$$

что сравнимо со скоростью проникновения магнитного потока при классическом крипе. Заметим, что для физически корректной постановки задачи необходимо потребовать выполнения неравенства  $m < 1/2$  (см. (22)). Отсюда вытекает, что магнитный поток при крипе проникает в сверхпроводник сублинейно. Можно показать, что при  $1 + 2p > 0$  мы переходим в режим вязкого течения вихрей. Условием устойчивости крип-фазы является выполнение неравенства  $1 + 2p < 0$ . В этом случае распределение магнитного поля является монотонно убывающей функцией по автомодельной переменной, как на

рис. 2. В этом случае выполняется неравенство  $j < j_c$ . Таким образом, мы показали, что для степенного граничного режима график распределения индукции магнитного поля является выпуклым вверх в фазе вязкого течения вихрей и выпуклым вниз – в фазе крипа вихревой решетки.

### Фазовый переход вихревое стекло → вихревая жидкость

В 1985 г. Брандт построил модель фазового перехода первого рода вихревое стекло → вихревая жидкость. При  $B < B_m(T)$  (где  $B_m(T)$  – линия плавления вихревой решетки) сверхпроводник находится в фазе вихревого стекла с бесконечно большим барьером активации при стремлении плотности тока к нулю. При  $B > B_m(T)$  сверхпроводник находится в фазе вихревой жидкости. При этом (как показывает эксперимент) на линии плавления ВАХ имеет вид:  $E \sim j/j_c$  ( $j < j_c$ ). Ниже линии плавления ВАХ является монотонно возрастающей по току выпуклой вниз (вторая производная по току отрицательна) функцией. Выше линии плавления ВАХ является монотонно убывающей выпуклой вниз функцией.

Нетрудно показать, что соответствующее модельное уравнение можно записать в виде

$$b_t = D_b \left( b |b_x|^{m-1} b_x \right)_x, \quad (66)$$

где  $D_b = \frac{\tau_b}{\lambda_b} v_0 k^m$ . Здесь можно выбрать  $m = U_0/T$  в режиме вихревого стекла. В этом случае уравнение (66) для фазы вихревого стекла, полученное из уравнения  $B_t = c^{-1} E_x$ , совпадает с уравнением для фазы вихревого стекла, которое можно получить из уравнения непрерывности вихревой нити

$$B_t + (vB)_x = 0, \quad (67)$$

если выбрать  $v = v_0 e^{U(j)/T}$ , где  $U(j) = \ln(j_c/j)$  (см. [4]). В этом случае для фазы вихревой жидкости следует выбрать аналогичную величину с соответствующим барьером пластической деформации очень вязкой жидкости (см. [2]).

В низкотемпературном пределе и в окрестности линии плавления достаточно вместо уравнения (66) рассматривать уравнение

$$b_t = D_b \left( b |b_x|^{m-1} b_x \right)_x. \quad (68)$$

Поставим следующее граничное условие в режиме с обострением:

$$b(0, t) = 1 + (t_0 - t)^n, \quad 0 < t < t_0, \quad n < 0. \quad (69)$$

Это граничное условие описывает отклик сверхпроводника на внешние возмущения в окрестности линии плавления  $B = B_m(T)$ . Оказывается, что в низкотемпературном пределе в окрестности температуры плавления фазы вих-

ревого стекла и вихревой жидкости ведут себя идентичным образом. Действительно, соответствующее автомодельное решение имеет вид

$$b_A(x, t) = 1 + (t_0 - t)\theta_A(\xi), \quad (70)$$

где  $\xi = x/(t_0 - t)^{(1+n\sigma)/(\sigma+2)}$ ,  $\sigma = m - 1$ .

В частном случае  $n = -1/\sigma$  соответствующее автомодельное решение имеет вид

$$b_A(x, t) = 1 + (t_0 - t)^{-1/\sigma} \left[ (1 - x/x_0)_+ \right]^{(\sigma+2)/\sigma}, \quad (71)$$

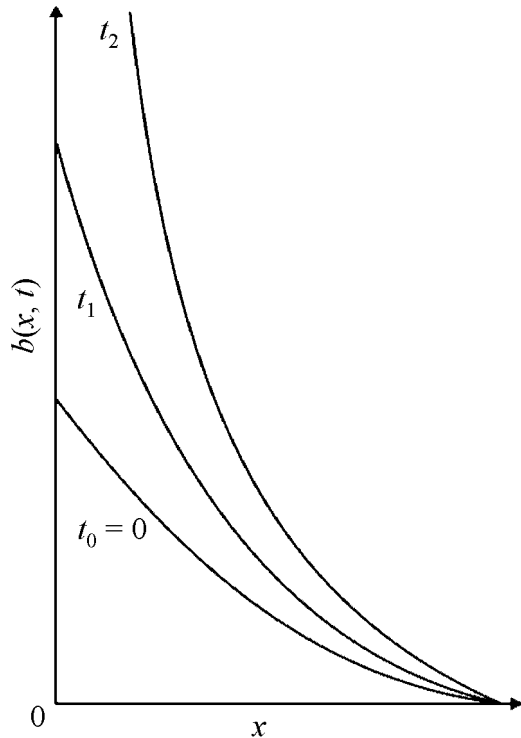
где

$$x_0 = \frac{\sigma + 2}{\sigma} \left[ \frac{2\sigma(\sigma + 1)}{\sigma + 2} \right]^{1/(\sigma+2)}, \quad (72)$$

и представляет собой магнитную волну с неподвижной точкой фронта в области  $0 < x < x_0$  в течение всего времени действия граничного режима с обострением.

Пространственно-временная структура автомодельного решения указывает на то, что при  $n < -1/\sigma$  действие граничного режима с обострением не будет локализовано. При этом, по определению,  $x_f(t) \sim (t_0 - t)^{(1+n\sigma)/(\sigma+2)} \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow t_0^-$ . В случае  $-1/\sigma < n < 0$  есть локализация магнитного поля, причем магнитное поле растет до бесконечности в точке  $x = 0$  (рис. 5). В результате

$$v_f(t) \sim -\frac{1 + n\sigma}{\sigma + 2} (t_0 - t)^{(1+n\sigma)/(\sigma+2)} - 1. \quad (73)$$



**Рис. 5.** Проникновение магнитного поля в фазе вихревого стекла и вихревой жидкости в окрестности линии плавления в случае большого барьера пластической деформации выше линии плавления



Следовательно, задача корректно поставлена лишь при выполнении неравенства  $1 + n\sigma < 0$ , т.е. при достаточно большой скорости накачки внешним магнитным полем. Из (73) следует, что скорость проникновения магнитного поля в режиме вихревой жидкости больше, чем скорость проникновения в режиме вихревого стекла. Это связано с тем, что  $U(j) \rightarrow \infty$  при  $j \rightarrow 0$  в режиме вихревого стекла и  $U(j) \rightarrow 0$  при  $j \rightarrow 0$  в режиме вихревой жидкости. Аналогичные утверждения имеют место и для глубины проникновения магнитного потока в соответствующих фазах.

Что касается решения задачи вне линии плавления вихревой решетки, то в режиме крипа потока в фазе вихревой жидкости задача исследована выше. При переходе к вязкому течению потока в жидкой (аморфной) фазе форма ВАХ настолько сложна, что решение математической проблемы вызывает технические трудности. Для характеристики отклика сверхпроводника вне линии плавления в фазе вихревого стекла необходимо решить уравнение (68) при  $m < 1$ . В настоящее время автомодельное решение этого уравнения при заданном значении параметра неизвестно. Таким образом, мы охарактеризовали отклик ВТСП на внешние возмущения магнитного поля в различных фазах, что проясняет наше понимание структуры связей вихревых сверхпроводящих трубок (квазивихрей) и их роли в понимании физики высокотемпературной сверхпроводимости с учетом случайного коллективного пиннинга вихревой решетки.

1. *И.Б. Краснюк, Р.М. Таранец*, ЖТФ **77**, № 10, 1 (2007).
2. *И.Б. Краснюк*, ЖТФ **77**, № 5, 30 (2007).
3. *И.Б. Краснюк, М.В. Залуцкий*, ФНТ **33**, 416 (2007).
4. *И.Б. Краснюк, Р.М. Таранец*, ЖТФ **78**, № 8, 83 (2008).
5. *Y. Yeshurun, A.P. Malozemoff*, Phys. Rev. **60**, 2202 (1988).
6. *В.Р. Романовский*, Письма в ЖТФ **23**, № 3, 15 (1997).
7. *В.Р. Романовский*, ЖТФ **79**, № 11, 20 (2009).

*Т.М. Мельник, И.Б. Краснюк, Р.М. Таранец, В.М. Юрченко*

## ПОВЕРХНЕВО-ІНДУКОВАНІ САМОПОДІБНІ ПРОСТОРОВО-ЧАСОВІ СТРУКТУРИ В ВИСОКОТЕМПЕРАТУРНИХ НАДПРОВІДНИКАХ ІІ РОДУ

Проведено теоретичний аналіз процесів проникнення магнітного поля до високо-температурних надпровідників другого роду в залежності від стану, у якому знаходиться надпровідник: у фазі в'язкої течії магнітного потоку, в режимі класичного термоактиваційного крипу потоку, в режимі гігантського крипу потоку або у фазах вихрової рідини чи вихрового скла. Дослідження фази вихрового скла виконувалось поблизу лінії плавлення, а фази вихрової рідини – поблизу лінії плавлення в режимі крипу (ТАFF-режим). При цьому вихрова рідина під час крипу потоку може бути  $\delta T_c$ -запінінгованою в сильному або слабкому пінінгу. Окремо розглянуто ви-

падки сильного та слабого пінінгу у випадковому гауссовому потенціалі пінінгу з урахуванням випадково розподілених точкових дефектів.

**Ключові слова:** магнітний потік, крип потоку, вихрове скло, вихрова рідина

*T.N. Melnik, I.B. Krasnyuk, R.M. Taranets, V.M. Yurchenko*

## SURFACE-INDUCED SELF-SIMILAR SPACE-TIME STRUCTURES IN HIGH-TEMPERATURE TYPE-II SUPERCONDUCTORS

Theoretical analysis of the processes of magnetic field penetration into high-temperature superconductors of the second type has been carried out depending on the state of a superconductor: the phase of viscous flow of the magnetic flux, classic thermo-activated creep of the flux, giant flux creep, the phase of vortex liquid or vortex glass. The study of the phase of vortex glass was done near the melting line, the phase of vortex liquid was studied near the melting line at creep (TAFF mode). At the same time, vortex liquid at flux creep can be  $\delta T_c$ -pinned in the case of weak and strong pinning. Separately, the cases of weak and strong pinning were analyzed in random Gauss potential with random point defects.

**Keywords:** magnetic flux, flux creep, vortex glass, vortex liquid

**Fig. 1.** Evolution of magnetic wave front at  $1 + m\sigma > 0$  (a) and  $1 + m\sigma < 0$  (b)

**Fig. 2.** Dynamics of magnetic wave front at viscous flow of vortexes

**Fig. 3.** Phase diagram in the plane of magnetic field strength vs temperature.  $B_m(T)$  is the melting line of vortex lattice;  $H_{c1}(T)$  is the first critical field;  $H_{c2}(T)$  is the second critical field;  $T^{ED}$  is the temperature of the phase transition from entangled liquid to disentangled liquid

**Fig. 4.** Distribution of automodel component  $w_a(\xi)$  of the boundary problem solution in the phase of strongly  $\delta T_c$ -pinned vortex liquid in random pinning potential with exponential boundary condition intensified at different time moments: 1 –  $t_0 = 0.95$ , 2 – 0.47, 3 – 0.9, 4 –  $5 \cdot 10^{-2}$ , 5 –  $2.5 \cdot 10^{-2}$ , 6 –  $1.2 \cdot 10^{-2}$

**Fig. 5.** Magnetic field penetration in the phase of vortex glass and vortex liquid near the melting line in the case of high plastic deformation barrier above the melting line