Ярослав Шрамко

ПРИНЦИП ДУАЛЬНОСТІ В ЛОГІЦІ І ФІЛОСОФІЇ

1. Дуальність як загальнонауковий принцип

Сер Майкл Атія, визначний сучасний математик, лауреат медалі Філдса й Абелівської премії [1], в одній зі своїх недавніх статей схарактеризував *дуальність* як потужний евристичний принцип, що дозволяє розглянути один і той самий об'єкт із двох різних точок зору (див.: [Atiya, 2008: 69]). У згаданій статті йдеться про застосування цього фундаментального принципу в математиці й фізиці і наведено численні приклади його надзвичайної продуктивності для досягнення нових цікавих результатів у нестандартних дослідницьких ситуаціях, з якими стикаються представники зазначених наук. Варто зауважити, що феномен дуальності не обмежується математикою і фізикою, а має ширше значення, що поширюється практично на всі сфери наукового пізнання.

Максимально узагальнено, принцип дуальності встановлює метод отримання нових тверджень із інших шляхом заміни понять, що в них входять, дуальними поняттями. У кожному конкретному випадку дуальність понять визначається окремо, наприклад, через означення або шляхом простого постулювання. Класичним є приклад першого постулату Евкліда, за яким будь-які дві точки, що не збігаються, сполучаються точно однією прямою.

[1] Медаль Філдса і Абелівська премія — найпрестижніші відзнаки в галузі математики. Перша присуджується раз на чотири роки Міжнародним математичним союзом під час Всесвітнього конґресу з математики, друга заснована урядом Норвегії і з 2003 року присуджується щорічно.

За принципом дуальності, цей постулат перетворюється на твердження, що дві будь-які прямі, які не є паралельними, перетинаються точно в одній точці. Дуальними тут виявляються такі пари понять: «точка» — «пряма», «збіг (точок)» — «паралельність (прямих)», «сполучення (точок)» — «перетин (прямих)». Наведений приклад належить до геометрії, проте отримання нового знання шляхом дуалістичних міркувань зустрічається не тільки в точних і природничих науках; воно відіграє важливу роль і в гуманітарному, соціальному та філософському пізнанні.

Подекуди дуальні поняття витлумачуються як протилежності, проте на загал це не є обов'язковим. Цілком достатньо констатувати певну взаємодоповнюваність цих понять у структурі деякого категоріального апарату. У такому розумінні дуальні поняття доволі часто використовуються в різних галузях науки. Серед цих галузей логіка має ту важливу особливість, що в ній евристичний потенціал поняття дуальності вдається поєднати з точністю його визначення. Це визначення має глибоке філософське підґрунтя, що дає змогу продемонструвати філософську плідність феномену дуальності й накреслити перспективу його застосування для розв'язання філософських проблем.

2. Дуальність логічних понять. Класична і модальна логіки

Ґотлоб Фреґе визначив логіку як науку про найзагальніші закони буття істини [Frege, 1990: 39]. У логічному вимірі істина набуває існування через так звані істиннісні значення, що виступають семантичними корелятами висловлювань. Фреґе виокремлює два фундаментальні істиннісні значення: «істину» і «хибу». Останні витлумачуються як своєрідні абстрактні об'єкти, так що «всі істинні висловлювання позначають один і той самий об'єкт, а саме істину, і всі хибні висловлювання позначають один і той самий об'єкт, а саме хибу» (див.: [Łukasiewicz, 1970: 90]) [2].

На цьому засадничому розрізненні між істиною та хибою і ґрунтується сутнісна логічна дуальність, чи то йдеться про логіку як науку загалом, чи то в розрізі окремих логічних понять. Слід враховувати, що оскільки експлікація істиннісних значень відбувається в метамові, зазначена дуальність істини й хиби реалізується передусім на семантичному рівні, що має свої наслідки й для синтаксичних закономірностей функціювання логічних систем.

Отже, спочатку поняття логічної дуальності формується для первинних логічних понять, тобто тих, що визначаються тільки в термінах істини й хиби. Відповідно, дуальними будуть і логічні сутності, узагальнювані цими поняттями. Два такі поняття є взаємно дуальними, якщо їх означення можна отримати одне з одного заміною всюди істини на хибу й навпаки.

---

[2] Більш докладно про істину і хибу як логічні значення та їхнє місце в логіці та філософії див., напр., у: [Shramko, Wansing, 2011].

Насамперед ідеться про суто логічні функції, які визначають вихідні пропозиційні оператори (зв'язки, функтори). Інші пари дуальних понять визначаються вже не тільки шляхом взаємозаміни істини та хиби, але й із залученням понять, дуальність яких була встановлена раніше.

Побудову ієрархії логічних дуальностей варто розпочати зі стандартних логічних зв'язок класичної логіки. Порівняймо між собою добре відомі таблиці істинності для кон'юнкції та диз'юнкції (істиннісне значення «істина» позначається через T, а «хиба» — через F):

A	$\wedge$	B
T	T	T
T	F	F
F	F	T
F	F	F

A	$\vee$	B
T	T	T
T	T	F
F	T	T
F	F	F

Неважко помітити, що якщо в табличному визначенні кон'юнкції *всюди* взаємно замінити значення «істина» і «хиба», то отримаємо перевернуту «догори дриґом» таблицю істинності для диз'юнкції, і навпаки. Отже, зазначені логічні зв'язки утворюють пару первинних дуальних логічних сутностей.

На відміну від цього, визначення операції заперечення класичної логіки при взаємозаміні істини й хиби залишається тим самим, що добре видно на прикладі відповідної таблиці істинності:

$\sim$	A
F	T
T	F

Це означає, що заперечення належить до так званих самодуальних сутностей, тобто воно є дуальним стосовно самого себе.

Важливою логічною функцією класичної логіки є операція матеріальної імплікації, таблиця істинності якої має такий вигляд:

A	$\supset$	B
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	T	F

Шляхом логічної дуалізації цього визначення (тобто взаємозаміни істини й хиби) отримуємо табличне визначення операції дуальної матеріальної імплікації:

A	$\subset$	*B*
T	F	T
T	F	F
F	T	T
F	F	F

Добре відомо, що у класичній логіці будь-яку бінарну логічну зв'язку можна виразити за допомоги заперечення та якоїсь іншої бінарної зв'язки. Зокрема, маємо стандартне визначення матеріальної імплікації через заперечення і диз'юнкцію:

$$A \supset B =_{\mathrm{df}} {\sim}A \vee B.$$

За принципом дуальності отримуємо визначення дуальної матеріальної імплікації шляхом відповідної заміни дуальних понять (тобто диз'юнкції — на кон'юнкцію і заперечення — саме на себе):

$$A \subset B =_{\mathrm{df}} {\sim}A \wedge B.$$

Дуальна матеріальна імплікація витлумачується як операція зворотної матеріальної субтракції й означає, що одне висловлювання (*B*) відкидає (виключає) інше висловлювання (*A*), тобто *B* має місце без *A* (читається як «не *A* і *B*», «*B* без *A*» тощо).

Повертаючись тепер до засадничої ролі поняття істини у конституюванні самого предмета логіки, слід зазначити, що логіка цікавиться істиною не в сенсі її змістового наповнення і не в контексті критеріїв її фактичного визначення. Ці завдання є справою окремих наук, залежно від того, до якої галузі належать висловлювання, істинність яких встановлюється. Натомість логіка опікується проблемою *функціювання* істини, її розгортання і, зрештою, примноження, що, з огляду на класичне визначення знання як обґрунтованої істинної думки, безпосередньо пов'язане з питанням зростання знання. Фундаментальне завдання, що постає перед логікою, полягає у визначенні умов збереження істини, зокрема в перебігу раціонального пізнання. Враховуючи, що останнє здійснюється головним чином шляхом логічного міркування, логіка має пояснити, в який спосіб у процесі такого міркування ми від істинних висловлювань можемо переходити до істинних висловлювань і ніколи не отримаємо з істини хибу.

У виконанні цього завдання центральну роль відіграє відношення логічного слідування, яке позначається за допомоги символу $\vDash$ ($A \vDash B$ (читається — «із висловлювання *A* логічно випливає (слідує) висловлювання *B*»). Саме це відношення відповідає за збереження істинності висловлювань та перенесення істини від засновків правильного міркування до його висновку. У цьому контексті доречно згадати думку Кліні: «Логіка виконує важливу функцію, яка полягає в тому, щоб казати, що з чого випливає» [Kleene, 1967: 3].

Сформулюємо точне означення відношення класичного слідування ($\vDash_C$):

Означення 1. (Логічне слідування в класичній логіці)

$A \vDash_C B \Leftrightarrow$ За будь-яких істиннісних значень пропозиційних змінних, що входять до складу A і B, завжди, коли A має значення T, B також має значення T; отже, не існує такого приписування істиннісних значень пропозиційним змінним зі складу A і B, коли A має значення T, а B має значення F.

Зазвичай відношення логічного слідування кодифікується за допомоги логічних систем, що встановлюють логічні правила, яким підпорядковуються наші міркування. Ці правила визначають, яким чином ми можемо виводити одні висловлювання з інших. Сформулюємо класичну систему логічного виводу $\mathbf{C}_{cn}$, яка формалізує відношення слідування класичної логіки. Ця система оперує твердженнями виду $A \vdash B$ (читається — «A має B як висновок», «із A виводиться B») і має такі схеми аксіом та правил виводу:

a1. $A \wedge B \vdash A$;
a3. $A \vdash A \vee B$;
a2. $A \wedge B \vdash B$;
a4. $B \vdash A \vee B$;
a5. $A \wedge (B \vee C) \vdash (A \wedge B) \vee C$;
a6. $A \vdash {\sim}{\sim}A$;
a7. ${\sim}{\sim}A \vdash A$;
a8. $A \wedge {\sim}A \vdash B$.

r1. $A \vdash B,\ B \vdash C\ /\ A \vdash C$;
r2. $A \vee B,\ A \vdash C\ /\ A \vdash B \vee C$;
r3. $B \vdash A,\ C \vdash A\ /\ B \vee C \vdash A$;
r4. $A \vdash B\ /\ {\sim}B \vdash {\sim}A$.

Зауважимо, що $\mathbf{C}_{cn}$ сформульовано у так званій мові КДЗ (з кон'юнкцією, диз'юнкцією і запереченням як вихідними зв'язками). Імплікація і дуальна імплікація можуть бути введені в цій мові за допомоги вищенаведених означень.

Доречними будуть також деякі спостереження щодо властивостей цієї системи в контексті проблеми дуальності. Насамперед зазначимо, що відношенням, дуальним до відношення логічного слідування, буде зворотне відношення, тобто для твердження $A \vDash B$ дуальним визнається твердження $B \vDash A$. Отже, на суто синтаксичному рівні дуальними слід вважати твердження $A \vdash B$ і $B \vdash A$. За такого розуміння дуальними виявляються такі пари аксіом і правил виводу системи $\mathbf{C}_{cn}$: a1 — a3, a2 — a4, a6 — a7, r2 — r3, тоді як схеми a5, r1, r4 є дуальними до самих себе (самодуальними) в тому сенсі, що, замінивши в них всі логічні терміни на дуальні, отримаємо ті самі схеми. Єдиним винятком залишається схема a8, яка не має дуального аналога серед аксіом $\mathbf{C}_{cn}$. Проте цей аналог — $A \vdash B \vee {\sim}B$ — можна довести як теорему $\mathbf{C}_{cn}$, спочатку застосувавши до a8 правило контрапозиції (r4), а потім, використовуючи закони подвійного заперечення (a6, a7), перетворивши ${\sim}(B \wedge {\sim}B)$ на $B \vee {\sim}B$ за відповідним законом де Морґана (принагідно зауважимо, що ці закони є теоремами $\mathbf{C}_{cn}$ і також являють собою попарно дуальні твердження). У повному вигляді зазначений логічний вивід є таким:

1.	$B \wedge {\sim}B \vdash {\sim}A$	(a8)
2.	${\sim}{\sim}A \vdash {\sim}(B \wedge {\sim}B)$	(1; r4)
3.	$A \vdash {\sim}{\sim}A$	(a6)
4.	$A \vdash {\sim}(\boldsymbol{B} \wedge {\sim}B)$	(2, 3; r1)
5.	$B \vdash B \vee {\sim}B$	(a3)
6.	${\sim}B \vdash B \vee {\sim}B$	(a4)
7.	${\sim}(B \vee {\sim}B) \vdash {\sim}B$	(5; r4)
8.	${\sim}(B \vee {\sim}B) \vdash {\sim}{\sim}B$	(6; r4)
9.	${\sim}{\sim}B \vdash B$	(a7)
10.	${\sim}(B \vee {\sim}B) \vdash B$	(8, 9; r1)
11.	${\sim}(B \vee {\sim}B) \vdash B \wedge {\sim}B$	(10, 7; r2)
12.	${\sim}(B \wedge {\sim}B) \vdash {\sim}{\sim}(B \vee {\sim}B)$	(11; r4)
13.	${\sim}{\sim}(B \vee {\sim}B) \vdash (B \vee {\sim}B)$	(a7)
14.	${\sim}(B \wedge {\sim}B) \vdash (B \vee {\sim}B)$	(12, 13; r1)
15.	$A \vdash (B \vee {\sim}B)$	(4, 14; r1)

Нехай $A \vdash_C B$ означає, що твердження $A \vdash B$ є доведеним у системі $\mathbf{C}_{cn}$. Тоді маємо таку теорему повноти і несуперечливості для класичної системи логічного виводу:

Теорема 1. (Повнота і несуперечливість $\mathbf{C}_{cn}$)

$A \vDash_C B \Leftrightarrow A \vdash_C B.$

Доведення цієї теореми залишаємо допитливому читачеві як цікаву вправу.

Узагальнюючи головні особливості реалізації принципу дуальності в класичній логіці, сформулюємо відповідну теорему:

Теорема 2. (Семантична і синтаксична самодуальність $\mathbf{C}_{cn}$)

Нехай A і B є довільними висловлюваннями системи $\mathbf{C}_{cn}$ і нехай A^o і B^o ми отримуємо з A і B заміною в них всюди $\wedge$ на $\vee$ і навпаки. Тоді:

(1) $A \vDash_C B \Leftrightarrow B^o \vDash_C A^o$;

(2) $A \vdash_C B \Leftrightarrow B^o \vdash_C A^o$.

Доведення: Аналогічно доведенню теореми 1.

Отже, класична логіка як зразкова система двозначної логічної парадигми демонструє повноцінне втілення принципу логічної дуальності, визначеної на підставі взаємозамінюваності істини й хиби.

Цікаво подивитись, які особливості має реалізація принципу дуальності в царині некласичних логік. Як приклад розглянемо модальну логіку, що є типовим представником логік, які *розширюють* класичну логіку шляхом уведення до мови нових виразових засобів. У випадку з модальними логіками мова розширюється за рахунок *модальних* зв'язок, зокрема операторів, що відповідають таким модальним виразам, як «необхідно», «можливо» та ін.

Отже, розширимо мову КДЗ за рахунок оператора необхідності $\Box$ ($\Box A$ читається як «необхідно A»). Систему логічного виводу модальної логіки $\mathbf{S4}_{cn}$ отримуємо шляхом додавання до $\mathbf{C}_{cn}$ таких схем аксіом і правила виводу:

a1$_{\Box}$. $\Box A \wedge \Box B \vdash \Box(A \wedge B)$;
a2$_{\Box}$. $\Box A \vdash A$;
a3$_{\Box}$. $\Box A \vdash \Box\Box A$;
r1$_{\Box}$. $A \vdash B \,/\, \Box A \vdash \Box B$.

Інший поширений модальний оператор, що активно використовується в системах алетичної модальної логіки, — оператор можливості $\Diamond$ — стандартним чином визначається через заперечення і необхідність, з тим розумінням, що твердження є можливим, якщо його заперечення не є необхідним:

$$\Diamond A \Leftrightarrow {\sim}\Box{\sim}A.$$

Як відомо, модальні оператори (зокрема, оператори $\Box$ і $\Diamond$ системи **S4**, як і інших систем Льюїса) належать до *інтенсіональних* логічних зв'язок, оскільки умови істинності для них неможливо визначити матричним шляхом, за допомоги таблиць істинності. Один із методів формулювання таких визначень надають так звані «семантики можливих світів», запропоновані Саулом Крипке (див.: [Kripke, 1963]). Центральним поняттям семантики Крипке є поняття *модельної структури*, що визначається як пара $< W, \leq >$, де W є деякою непорожньою множиною «можливих світів», а $\leq$ є відношенням «досяжності» між можливими світами.

Семантична *модель* для системи $\mathbf{S4}_{cn}$ визначається на базі довільної модельної структури додатковим постулюванням для відношення досяжності $\leq$ властивостей рефлексивності та транзитивності, а також визначенням функції оцінки v, яка кожному елементарному висловлюванню p для кожного світу $\alpha \in W$ приписує одне з двох істиннісних значеннь — «істину» або «хибу». Перший випадок позначається як $v_{\alpha}(p) = T$ (читається — «висловлювання p є істинним у світі α»), інший — як $v_{\alpha}(p) = F$ (читається — «висловлювання p є хибним у світі α»).

Умови істинності для логічних операторів (для будь-яких висловлювань A і B) визначаються так:

Означення 2. (Умови істинності для $\mathbf{S4}_{cn}$)

(1) $v_\alpha(A \wedge B) = T \Leftrightarrow v_\alpha(A) = T$ і $v_\alpha(B) = T$, інакше $v_\alpha(A \wedge B) = F$;
(2) $v_\alpha(A \vee B) = T \Leftrightarrow v_\alpha(A) = T$ або $v_\alpha(B) = T$, інакше $v_\alpha(A \vee B) = F$;
(3) $v_\alpha({\sim}A) = T \Leftrightarrow v_\alpha(A) = F$, інакше $v_\alpha({\sim}A) = F$;
(4) $v_\alpha(\Box A) = T \Leftrightarrow \forall\beta\ (\alpha \leq \beta \Rightarrow v_\beta(A) = T)$, інакше $v_\alpha(\Box A) = F$.

Варто зазначити, що умови (1) і (2) цього означення є дуальними, оскільки вони виходять одна з одної шляхом взаємної заміни метамовних «і» та «або». Відношення слідування для $\mathbf{S4}_{cn}$ визначається так:

Означення 3. (Логічне слідування для $\mathbf{S4}_{cn}$)
$A \vDash_{S4} B \Leftrightarrow$ Для будь-якої моделі $< W, \leq, v >$: $v_\alpha(A) = T \Rightarrow v_\alpha(B) = T$.

Знов-таки, нехай $A \vdash_{S4} B$ означає, що твердження $A \vdash B$ є доведеним у системі $\mathbf{S4}_{cn}$. Маємо:

Теорема 3. (Повнота і несуперечливість $\mathbf{S4}_{cn}$)
$A \vDash_{S4} B \Leftrightarrow A \vdash_{S4} B$.

Доведення: Див. доведення теореми 1.

Розглянемо тепер докладніше взаємовідношення між модальними операторами необхідності і можливості. Умови істинності для $\Diamond$ визначаються в модальній логіці так:

(5) $v_\alpha(\Diamond A) = T \Leftrightarrow \exists\beta\ (\alpha \leq \beta$ і $v_\beta(A) = T)$, інакше $v_\alpha(\Diamond A) = F$.

Якщо взяти до уваги, що вираз $\alpha \leq \beta \Rightarrow v_\beta(A) = T$ є еквівалентним у метамові виразові $\alpha \nleq \beta$ або $v_\beta(A) = T$, то можна побачити, що (5) отримується з (4) шляхом заміни дуальних понять: $\forall$ на $\exists$, $\nleq$ на $\leq$, «або» на «і». Отже, $\Box$ і $\Diamond$ виявляються семантично дуальними операторами. Нескладно також переконатись, що дуальні варіанти схем $a1_\Box$-$a3_\Box$ і $r1_\Box$ ($\Diamond(A \vee B) \vdash \Diamond A \vee \Diamond B$; $A \vdash \Diamond A$; $\Diamond\Diamond A \vdash \Diamond A$; $A \vdash B \,/\, \Diamond A \vdash \Diamond B$) виводяться в системі $\mathbf{S4}_{cn}$. Отже, маємо теорему, яка стверджує повну дуалізацію модальної логіки $\mathbf{S4}_{cn}$:

Теорема 4. (Семантична і синтаксична самодуальність $\mathbf{S4}_{cn}$)

Нехай A і B є довільними висловлюваннями системи $\mathbf{S4}_{cn}$ і нехай A^o і B^o отримуються з A і B заміною в них всюди $\wedge$ на $\vee$, а також $\Box$ на $\Diamond$ і навпаки. Тоді:

(1) $A \vDash_{S4} B \Leftrightarrow B^o \vDash_{S4} A^o$;
(2) $A \vdash_{S4} B \Leftrightarrow B^o \vdash_{S4} A^o$.

Ця теорема демонструє нам, що модальна логіка **S4**, так само як і класична логіка, є самодуальною логічною системою в тому розумінні, що дуальний аналог будь-якого твердження цієї логіки може бути доведений у її межах.

3. Принцип дуальності на прикладі інтуїціоністської логіки

Як було зазначено вище, модальна логіка належить до некласичних логік, утворюваних шляхом *розширення* (мови) класичної логіки. Проте є й інший напрямок розвитку некласичних логік, представники якого піддають критиці та відкидають певні принципи класичної логіки, розглядаючи себе як *альтернативу* до неї. Найстарішою з таких логічних теорій є інтуїціоністська логіка, що являє собою результат розвитку певного напрямку в обґрунтуванні математики — інтуїціонізму, ініційованого на початку XX сторіччя видатним голландським математиком Л.Е.Я. Брауером (див.: [Stigt, 1990]). Суттєвою ознакою інтуїціонізму є те, що він представляє й обґрунтовує *конструктивний підхід* до побудови наукового знання (зокрема, математичних теорій).

Головна особливість інтуїціоністської інтерпретації тверджень (висловлювань, суджень), що входять до складу наукової (математичної) теорії, полягає в тому, що з інтуїціоністського погляду кожне твердження *A* тлумачиться в смислі «*A* (конструктивно) доведене» («маємо конструктивне доведення того, що *A»)*. Таке розуміння має свої наслідки і для інтуїціоністської інтерпретації логічних зв'язок, яке суттєвим чином відрізняється від їх класичної інтерпретації. Широко відома так звана BHK-інтерпретація інтуїціоністських логічних констант, названа так на честь Брауера, Гейтинґа і Колмогорова. Згідно з цією інтерпретацією:

(а) Кон'юнктивне твердження $A \wedge B$ вважається доведеним тоді й тільки тоді, коли доведено *A* і доведено *B*.

(б) Диз'юнктивне твердження $A \vee B$ вважається доведеним тоді й тільки тоді, коли доведено *A* або доведено *B* і при цьому точно відомо, який саме член диз'юнкції є доведеним.

(в) Заперечне твердження $\sim A$ вважається в інтуїціонізмі доведеним тоді й тільки тоді, коли *A* є спростованим. Своєю чергою, інтуїціоністськи спростувати твердження *A* означає показати, що припущення доведення *A* призводить до суперечності.

(г) Імплікативне твердження $A \supset B$ вважається доведеним тоді й тільки тоді, коли маємо спосіб перетворення будь-якого доведення твердження *A* на доведення твердження *B*.

Наведену інтерпретацію можна точно формалізувати за допомоги модельних структур Крипке. А саме: семантична модель для інтуїціоністської логіки визначається як трійка $< \mathrm{W}, \leq, v >$, де W є деякою непорожньою множиною, $\leq$ — рефлексивним і транзитивним відношенням на множині W і v — інтуїціоністською оцінкою, що задовольняє таким умовам:

Означення 4. (Інтуїціоністська оцінка)

(1) $v_\alpha(A) = \mathrm{T}$ і $\alpha \leq \beta \Rightarrow v_\beta(A) = \mathrm{T}$;

(2) $v_\alpha(A \wedge B) = \mathrm{T} \Leftrightarrow v_\alpha(A) = \mathrm{T}$ і $v_\alpha(B) = \mathrm{T}$, інакше $v_\alpha(A \wedge B) = \mathrm{F}$;

(3) $v_\alpha(A \vee B) = \mathrm{T} \Leftrightarrow v_\alpha(A) = \mathrm{T}$ або $v_\alpha(B) = \mathrm{T}$, інакше $v_\alpha(A \vee B) = \mathrm{F}$;
(4) $v_\alpha({\sim}A) = \mathrm{T} \Leftrightarrow \forall\beta\ (\alpha \leq \beta \Rightarrow v_\beta(A) = \mathrm{F})$, інакше $v_\alpha({\sim}A) = \mathrm{F}$;
(5) $v_\alpha(A \supset B) = \mathrm{T} \Leftrightarrow \forall\beta\ (\alpha \leq \beta \Rightarrow (v_\beta(A) = \mathrm{T} \Rightarrow v_\beta(B) = \mathrm{T}))$,
інакше $v_\alpha(A \supset B) = \mathrm{F}$.

Розглянемо тепер змістовне тлумачення цієї семантики. Якщо взяти до уваги зауваження Аренда Гейтинґа (див.: [Heyting, 1958: 107]), що інтуїціоністська логіка є «логікою знання» (на відміну від класичної логіки, яка є «логікою буття»), то цілком природно буде витлумачити множину можливих світів W як множину теоретичних конструкцій, або як множину станів деякої інтуїціоністської теорії. Тоді, відповідно до «інтуїціоністської методології», $v_\alpha(A) = \mathrm{T}$ має бути витлумачене як твердження, що A конструктивно доведено в рамках теоретичної конструкції α (у стані теорії α), а $v_\alpha(A) = \mathrm{F}$ — як твердження, що A не є конструктивно доведеним у рамках теоретичної конструкції α (у стані теорії α). Відношення ≤ може бути витлумачене як (можливе) відношення в часі між різними станами деякої теорії. Отже, якщо дані дві теоретичні конструкції α і β, то α ≤ β означає, що стан теорії α передує станові теорії β, тобто теоретична конструкція β є результатом можливого розвитку теоретичної конструкції α. Інтуїціоністська модельна структура являє собою картину *розвитку нашої теорії* з плином часу. При цьому ми беремо до уваги не тільки актуальне «розгортання» теорії, але також і можливі потенційні шляхи розвитку (багато з яких ніколи не актуалізуються).

Варто звернути увагу на умову (1), яка, по суті, виражає характеристичний для інтуїціоністської логіки *принцип збереження*, який полягає в тому, що якщо істинність твердження встановлено (твердження конструктивно доведено), то воно залишається істинним і в майбутньому. Цей принцип виражає специфіку конструктивних тверджень, а також суттєву особливість конструктивного тлумачення поняття істини — істинні висловлювання можуть тільки накопичуватися (кумулятивність конструктивного знання).

Система інтуїціоністського слідування $\mathbf{I}_{cn}$ визначається такими схемами аксіом і правил виводу:

a0. $A \vdash A$
a1. $A \wedge B \vdash A$;
a2. $A \wedge B \vdash B$;
a3. $A \vdash A \vee B$;
a4. $B \vdash A \vee B$;
a5. $A \wedge (B \vee C) \vdash (A \wedge B) \vee C$;
a6. $A \vdash {\sim}{\sim}A$;
a8. $A \wedge {\sim}A \vdash B$;
a9. $A \wedge (A \supset B) \vdash B$;

r1. $A \vdash B,\ B \vdash C\ /\ A \vdash C$;
r2. $A \vdash B,\ A \vdash C\ /\ A \vdash B \wedge C$;
r3. $B \vdash A,\ C \vdash A\ /\ B \vee C \vdash A$;
r4. $A \vdash B\ /\ {\sim}B \vdash {\sim}A$;
r5. $A \wedge B \vdash C\ /\ A \wedge {\sim}C \vdash {\sim}B$;
r6. $A \wedge B \vdash C\ /\ A \vdash B \supset C$.

Відношення інтуїціоністського слідування $\vDash_I$ визначається аналогічно до того, як визначається слідування модальної логіки (див. означення 3). Також за аналогією маємо доведення теореми про повноту і несуперечливість:

Теорема 5. (Повнота і несуперечливість I_{cn})
$A \vDash_I B \Leftrightarrow A \vdash_I B$.

Важливою особливістю інтуїціоністської логіки, на відміну від класичної, є неможливість вираження логічних зв'язок однієї через іншу. Зокрема, інтуїціоністську імплікацію неможливо визначити за допомоги заперечення і диз'юнкції. І якщо інтуїціоністські кон'юнкція і диз'юнкція, згідно з умовами (2) і (3) означення 4 залишаються взаємно дуальними, то інтуїціоністське заперечення й інтуїціоністська імплікація не мають дуальних відповідників у межах самої інтуїціоністської логіки. Для формування повної системи дуальних інтуїціоністських зв'язок виникає потреба в побудові окремої дуальної інтуїціоністської логіки.

Дуальну інтуїціоністську логіку отримуємо через дуальну інтерпретацію тверджень, з якими має справу наукове пізнання. А саме: істинність висловлювання витлумачується тут як його гіпотетична прийнятність, причому останню ми розуміємо як відсутність фальсифікації. Як показав Карл Поппер[3] (див. [Shramko, 2005]), саме таке розуміння притаманне емпіричним наукам, які базуються на досвідному пізнанні й використовують інструмент фальсифікації для перевірки наукових гіпотез. Справді, якщо математичне знання має справу з апріорними (й остаточними) доведеннями на підставі аксіоматичних конструкцій, то фізичне, хімічне, історичне пізнання оперує гіпотезами, які висуваються для розв'язання наявних наукових проблем і які можуть бути відкинуті в перебігу їх дослідної перевірки (тобто внаслідок спроби їх фальсифікації). Отже, дуальна інтуїціоністська логіка базується на дуальності, яка має місце між доведеністю і гіпотетичністю, вона відкидає принцип збереження істини й відходить від кумулятивістської моделі знання.

Можна запропонувати таке змістовне розуміння логічних зв'язок на основі поняття гіпотетичної прийнятності висловлювань, що є дуальним щодо інтуїціоністської ВНК-інтерпретації:

(а) Кон'юнктивне твердження $A \wedge B$ вважається прийнятним тоді й тільки тоді, коли прийнятне A і прийнятне B.

(б) Диз'юнктивне твердження $A \vee B$ вважається прийнятним тоді й тільки тоді, коли прийнятне A або прийнятне B (при цьому не обов'язково відомо, який член диз'юнкції є прийнятним).

---

[3] У статті збережено транслітерацію даного імені за принципами, яких дотримується автор. — *Прим. ред.*

(в) Заперечне твердження $\sim A$ вважається прийнятним тоді й тільки тоді, коли A є спростовним. Своєю чергою, спростовність твердження A означає несуперечливість припущення спростування A.

(г) Субтрактивне твердження $A \subset B$ вважається прийнятним тоді й тільки тоді, коли маємо спосіб продемонструвати, що A є спростовним і одночасно B є прийнятним.

Семантична модель Крипке для дуальної інтуїціоністської логіки, що формалізує зазначену інтерпретацію, визначається як трійка $< \mathrm{W}, \leq, v >$, де W є деякою непорожньою множиною, $\leq$ — рефлексивним і транзитивним відношенням на множині W і v — дуальною інтуїціоністською оцінкою, що задовольняє таким умовам:

Означення 5. (Дуальна інтуїціоністська оцінка)

(1) $v_\alpha(A) = \mathrm{T}$ і $\beta \leq \alpha \Rightarrow v_\beta(A) = \mathrm{T}$;
(2) $v_\alpha(A \wedge B) = \mathrm{T} \Leftrightarrow v_\alpha(A) = \mathrm{T}$ і $v_\alpha(B) = \mathrm{T}$, інакше $v_\alpha(A \wedge B) = \mathrm{F}$;
(3) $v_\alpha(A \vee B) = \mathrm{T} \Leftrightarrow v_\alpha(A) = \mathrm{T}$ або $v_\alpha(B) = \mathrm{T}$, інакше $v_\alpha(A \vee B) = \mathrm{F}$;
(4) $v_\alpha(\sim A) = \mathrm{T} \Leftrightarrow \exists\beta$ ($\alpha \leq \beta$ і $v_\beta(A) = \mathrm{F}$), інакше $v_\alpha(\sim A) = \mathrm{F}$;
(5) $v_\alpha(A \subset B) = \mathrm{T} \Leftrightarrow \exists\beta$ ($\alpha \leq \beta$ і $v_\beta(A) = \mathrm{F}$ і $v_\beta(B) = \mathrm{T}$), інакше $v_\alpha(A \subset B) = \mathrm{F}$.

Знову ж таки, варто звернути увагу на умову (1). Цього разу вона виражає характеристичний для дуальної інтуїціоністської логіки *принцип зворотного збереження*, який полягає в тому, що якщо істинність твердження встановлено (твердження прийнято як гіпотеза), то це означає, що воно було істинним і в минулому (завжди було прийнятним як гіпотеза, тобто, ніколи не було спростованим).

Систему дуального інтуїціоністського слідування $\mathbf{DI}_{\mathrm{cn}}$ отримуємо із системи $\mathbf{I}_{\mathrm{cn}}$ шляхом заміни певних схем аксіом і правил виводу їх дуальними аналогами:

a0. $A \vdash A$
a1. $A \wedge B \vdash A$;
a2. $A \wedge B \vdash B$;
a3. $A \vdash A \vee B$;
a4. $B \vdash A \vee B$;
a5. $A \wedge (B \vee C) \vdash (A \wedge B) \vee C$;
a7. $\sim\sim A \vdash A$;
a8$^{\mathrm{d}}$. $B \vdash A \vee \sim A$.
a9$^{\mathrm{d}}$. $B \vdash A \vee (A \subset B)$;

r1. $A \vdash B, B \vdash C \,/\, A \vdash C$;
r2. $A \vdash B, A \vdash C \,/\, A \vdash B \wedge C$;
r3. $B \vdash A, C \vdash A \,/\, B \vee C \vdash A$;
r4. $A \vdash B \,/\, \sim B \vdash \sim A$;
r5$^{\mathrm{d}}$. $C \vdash A \vee B \,/\, \sim B \vdash A \vee \sim C$;
r6$^{\mathrm{d}}$. $C \vdash \mathrm{A} \vee \mathrm{B} \,/\, \mathrm{B} \subset \mathrm{C} \vdash \mathrm{A}$.

Відношення дуального інтуїціоністського слідування $\models_{\mathrm{DI}}$ визначається аналогічно до того, як в означені 3 визначається слідування модальної логіки. Також за аналогією маємо доведення теореми про повноту і несуперечливість:

Теорема 6. (Повнота і несуперечливість $\mathbf{DI}_{cn}$)

$A \vDash_{DI} B \Leftrightarrow A \vdash_{DI} B$.

Наступна теорема встановлює дуальний характер взаємозв'язку між $\mathbf{I}_{cn}$ і $\mathbf{DI}_{cn}$:

Теорема 7. (Семантична і синтаксична дуальність між $\mathbf{I}_{cn}$ і $\mathbf{DI}_{cn}$)

Нехай A і B є довільними висловлюваннями системи $\mathbf{I}_{cn}$ і нехай A^o і B^o отримувані з A і B заміною в них всюди $\wedge$ на $\vee$ і навпаки, а також $\supset$ на $\subset$. Тоді:

(1) $A \vDash_{I} B \Leftrightarrow B^o \vDash_{DI} A^o$;
(2) $A \vdash_{I} B \Leftrightarrow B^o \vdash_{DI} A^o$.

Отже, хоча інтуїціоністська логіка, на відміну від логіки класичної, не є самодуальною, її дуалізацію можна здійснити шляхом побудови окремої дуальної інтуїціоністської логіки, теореми якої є в точності дуальними аналогами теорем інтуїціоністської логіки.

4. Модальний переклад інтуїціоністської і дуальної інтуїціоністської логіки

Зазначена дуальність у співвідношенні між інтуїціоністською і дуальною інтуїціоністською логікою може бути точно експлікована з використанням механізму перекладу висловлювань інтуїціоністської і дуальної інтуїціоністської логіки мовою модальної логіки **S4**. Такий переклад для інтуїціоністської логіки є добре відомим і був запропонований Куртом Ґеделем ще у 1933 році [Gödel, 1933]. Головна ідея полягає в тому, щоб інтерпретувати необхідність логіки **S4** як *оператор доведення*. Тоді, враховуючи зазначену вище інтерпретацію інтуїціоністських тверджень, природно припустити, як це і зробив Ґедель, що приписування до кожного істинного інтуїціоністського висловлювання префікса $\Box$ має дати нам істинне висловлювання модальної логіки.

Отже, функція * перекладу інтуїціоністських висловлювань мовою логіки **S4** визначається так:

Означення 6. (Модальний переклад інтуїціоністських висловлювань)

Нехай p є атомарним висловлюванням системи $\mathbf{I}_{cn}$, а A і B — будь-якими висловлюваннями системи $\mathbf{I}_{cn}$. Тоді:

1. $p^* = \Box p$;
2. $(A \wedge B)^* = A^* \wedge B^*$;
3. $(A \vee B)^* = A^* \vee B^*$;
4. $(A \supset B)^* = \Box(\sim A^* \wedge B^*)$;
5. $(\sim A)^* = \Box \sim A^*$.

Можна показати, що функція * забезпечує вкладення системи $\mathbf{I}_{cn}$ до системи $\mathbf{S4}_{cn}$, що означає адекватність запропонованого перекладу:

Теорема 8. (Вкладення $\mathbf{I}_{cn}$ у $\mathbf{S4}_{cn}$)
(1) $A \vDash_{I} B \Leftrightarrow A^* \vDash_{S4} B^*$;
(2) $A \vdash_{I} B \Leftrightarrow A^* \vdash_{S4} B^*$.
Доведення див.: [Shramko, 2016: 259].

Техніка модального перекладу дає чудову нагоду переконатись у потужності евристичного потенціалу принципу дуальності. А саме, беручи до уваги загальну дуальність інтерпретацій висловлювань інтуїціоністської та дуальної інтуїціоністської логік і, зокрема, дуальність модальних операторів $\Box$ та $\Diamond$, можна припустити, що приписування до кожного дуального інтуїціоністського висловлювання префікса $\Diamond$ буде визначати адекватний модальний переклад висловлювань дуальної інтуїціоністської логіки.

Означення 7. (Модальний переклад дуальних інтуїціоністських висловлювань)

Нехай p є атомарним висловлюванням системи $\mathbf{DI}_{cn}$, а A і B — будь-якими висловлюваннями системи $\mathbf{DI}_{cn}$. Тоді:
1. $p^\bullet = \Diamond p$;
2. $(A \wedge B)^\bullet = A^\bullet \wedge B^\bullet$;
3. $(A \vee B)^\bullet = A^\bullet \vee B^\bullet$;
4. $(A \subset B)^\bullet = \Diamond({\sim}A^\bullet \wedge B^\bullet)$;
5. $({\sim}A)^\bullet = \Diamond{\sim}A^\bullet$.

Нескладно бачити, що запропонований модальний переклад цілком відповідає змістовній інтерпретації дуальних інтуїціоністських висловлювань — можливість твердження доволі природно витлумачується як його гіпотетична прийнятність: якщо те чи те твердження є можливим, його можна використати як гіпотезу в наукових дослідженнях.

У [Shramko, 2016: 260–261] доведено теорему, що забезпечує адекватність функції $^\bullet$ як операції вкладення системи $\mathbf{DI}_{cn}$ до системи $\mathbf{S4}_{cn}$:

Теорема 9. (Вкладення $\mathbf{DI}_{cn}$ у $\mathbf{S4}_{cn}$)
(1) $A \vDash_{DI} B \Leftrightarrow A^\bullet \vDash_{S4} B^\bullet$;
(2) $A \vdash_{DI} B \Leftrightarrow A^\bullet \vdash_{S4} B^\bullet$.

5. Перспективи застосування принципу дуальності у філософії

На завершення коротко окреслимо можливі перспективи застосування принципу дуальності до аналізу філософських проблем. Насамперед нагадаємо, що логіка є однією з найважливіших філософських дисциплін, а центральні логічні категорії (істина і хиба) є засадничими філософськими поняттями загалом. Тому, зокрема, гносеологічні твердження, які базуються на цих категоріях, мають підпорядковуватися описаному вище механізмові логічної дуальності. Онтологічними відповідниками істини й хиби є категорії буття і небуття (див.: [Plato. Sophist, 236d-264d]), що відкриває шлях до застосування принципу дуальності до тверджень, які оперують цими категоріями, а отже, до аналізу онтологічних проблем.

Іншу класичну пару дуальних філософських понять утворюють категорії матерії і свідомості (буття і мислення, душі й тіла тощо). Декарт продемонстрував можливість побудови дуалістичної онтології, виходячи з розуміння цих категорій як рівноправних субстанцій, що доповнюють одна одну. Проте більш цікавою демонстрацією філософської плідності принципу дуальності видається концепція психофізичного паралелізму Спінози, яка пропонує оригінальне розв'язання психофізичної проблеми, що спирається на строгу дуальність всіх характеристик єдиної й вічної субстанції. Головними серед цих характеристик є атрибути протяжності та мислення, які в усьому аналогічні. «Порядок і зв'язок ідей є тим самим, що й порядок і зв'язок речей» [Spinoza, 2012] — ця відома теза Спінози є, по суті, парадигмальним формулюванням принципу дуальності на рівні філософської онтології.

Слід відрізняти обґрунтоване і науково виважене застосування принципу дуальності як інструменту справжнього філософського пізнання від легковажного й безглуздого жонґлювання дуальними поняттями, використовуваного задля пустопорожніх метафізичних спекуляцій. У такому разі ми маємо справу зі свого роду зловживанням принципом дуальності, коли він втрачає свій позитивний зміст і перетворюється на власну карикатуру. Типовим прикладом останнього є вигаданий Фіхте «антитетичний метод», що під назвою «діалектичного» інтенсивно розроблявся в системах німецького ідеалізму й надалі був успадкований марксистською філософією. Характерним для цього так званого «методу» є обов'язкове витлумачення дуальних понять як «протилежностей», хоч би як неприродно це не виглядало, і намагання поєднати їх у якомусь «вищому» синтезі, видаючи його за черговий етап «розвитку» вихідних категорій. Достатньо порівняти громіздку штучність і кострубатість побудов «Логіки» Геґеля з логічною стрункістю і витонченістю структури «Етики» Спінози та зіставити голослівність і безплідність геґелівського слоґану «Все розумне дійсне, все дійсне розумне» [Hegel, 1972: 11] з потужною евристичністю наведеної вище блискучої формули Спінози, аби наочно переконатись у разючій різниці між туманним хитромудрствуванням і реальним науковим дослідженням дійсних філософських проблем.

Як приклад евристичної продуктивності принципу дуальності можна розглянути можливість його ефективного застосування для розв'язання такої складної проблеми, як визначення предмета філософії. Навколо цієї проблеми точаться подекуди запеклі дискусії, і серед представників різних філософських напрямків немає єдності щодо визначення предметного поля філософських досліджень. Саме у справі такого визначення і стає у пригоді принцип дуальності, використовуваний тут, з огляду на наявність фундаментальної дуальності між такими науками, як філософія і математика. Справді, існує всього дві абсолютно (за Кантовим виразом, «чисті») апріорні науки, тобто такі, що геть позбавлені власного емпіричного змісту і в емпіричному аспекті можуть мати лише прикладне значення — математика і філософія. Як такі вони утворюють дуальну пару наук, що взаємодоповнюють одна одну в царині чистого апріорного знання, вичерпуючи його. Тепер, враховуючи, що ще з часів Аристотеля математика традиційно визначається як наука про чисту кількість як таку (див., напр.: [Franklin, 2009: 104]), нескладно залучити принцип дуальності і, замінивши поняття кількості на дуальне до нього поняття якості, витлумачити філософію як науку про чисті якісні визначеності буття. Докладніше про природу філософії та її предмет див. у [Shramko, 2015]; тут лише ще раз підкреслимо перспективність застосування принципу дуальності для аналізу не тільки цієї, а й багатьох інших філософських проблем.

Насамкінець доречно згадати слова Фреґе, який цілком у дусі неокантіанської традиції якось зазначив, що слово «істинний» спрямовує логіку так само, як слово «прекрасний» спрямовує естетику, а «добрий» — етику (див.: [Frege, 1993: 58]; пор.: [Windelband, 1915: 62–63]). Це спостереження дає підстави припустити (за аналогією з логічною дуалізацією, розглянутою в цій статті) можливість відповідної естетичної та етичної дуалізаціїі на засадах наявної дуальності прекрасного і потворного та доброго і злого.

ДЖЕРЕЛА / REFERENCES

Atiyah, M. (2008). Duality in mathematics and physics. *Conferències FME*. Vol. V, Curs Riemann (2007–2008). Barcelona: Facultat de Matemàtiques i Estadística, 69-91.

Franklin, J. (2009). Aristotelian realism. *The Philosophy of Mathematics*, ed. A. Irvine (Handbook of the Philosophy of Science series), North-Holland Elsevier.

Frege, G. (1990). *Schriften zur Logik und Sprachphilosophie*. Hamburg: Felix Meiner Verlag.

Frege, G. (1993). *Logische Untersuchungen*. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Gödel, K. (1933). Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls. *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, 4, 39–40. [Reprinted, with English translation, in Gödel, K. (1986). *Collected Works*. I: Publications 1929–1936, S. Feferman et al., editors. Oxford: Oxford University Press, 300-303.]

Hegel, G.W.F. (1972). *Grundlinien der Philosophie des Rechts*. Naturrecht und Staatswissenschaft, herausgegeben und eingeleitet von Helmut Reichelt. Frankfurt am Main; Ullstein.

Heyting, A. (1958). Intuitionism in mathematics. In R. Klibansky (ed.), *Philosophy in the Mid-Century: A Survey*. Vol. 1: Logic and Philosophy of Science. Florence: La Nuova Italia Editrice, 101-115.

Kleene, S.C. (1967). *Mathematical Logic*. New York: Wiley.

Kripke, S. (1963). Semantical considerations on modal logic. *Acta Philosophica Fennica*, 16, 83-94.

Łukasiewicz, J. (1970). Two-valued logic. *Selected Works*, L. Borkowski (ed.), Amsterdam: North-Holland, 89-109.
Plato. *The Sophist*.
Shramko, Y. (2005). Dual intuitionistic logic and a variety of negations: the logic of scientific research. *Studia Logica*, 80, 347-367.
Shramko, Y. (2015). The nature of philosophy and its subject-matter. [In Ukrainian] *Actual Problems of Mind*, 15, 1-15.
Shramko, Y. (2016). A modal translation for dual-intuitionistic logic. *The Review of Symbolic Logic*, 9, 251-265.
Shramko, Y., Wansing, H. (2011). *Truth and Falsehood. An Inquiry into Generalized Logical Values*. Dordrecht: Springer.
Spinoza, B. (2012). *Ethica: Ordine Geometrico Demonstrata*... (Latin Edition), Nabu Press.
Stigt, W. van (1990). *Brouwer's Intuitionism*. Amsterdam: North-Holland.
Urbas, I. (1996). Dual-intuitionistic logic. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 37, 440-451.
Windelband, W. (1915). *Präludien: Aufsätze und Reden zur Philosophie und ihrer Geschichte* (Band 1). Tübingen: Verlag von J.C.B. Mohr (Paul Siebeck).

Статтю одержано / Received 15.06.16.

Yaroslav Shramko

THE PRINCIPLE OF DUALITY IN LOGIC AND PHILOSOPHY

The paper examines the specificity of the implementation of the duality principle in some important logical systems. We give an exact definition of the logical duality based on the notions of truth and falsity, which play a central role in the understanding of the subject-matter of logic. We construct the consequence systems for the classical, modal, intuitionistic and dual-intuitionistic logic, and demonstrate that both classical and modal logics are self-dual, whereas intuitionistic logic needs a special dual-intuitionistic logic for its dualization. We propose a function of a modal translation for the dual-intuitionistic propositions which consists in prefixing the possibility operator to every proposition of the dual-intuitionistic logic. We also sketch some prospects of an applicability of the duality principles to analysis of philosophical problems, the problem of the subject-matter of philosophy among them.

Keywords: duality principle, classical logic, modal logic, intuitionistic logic, dual-intuitionistic logic, modal translation

***Шрамко, Ярослав** — доктор філософських наук, професор кафедри філософії Криворізького державного педагогічного університету. Сфера наукових інтересів — логіка та аналітична філософія.*

***Shramko, Yaroslav** — D-r of sciences in philosophy, professor at the Department of Philosophy, State Pedagogical University of Kryvyi Rih. Academic interests: logic and analytical philosophy.*