

## ПРОСТЫЕ МОДЕЛИ УСТАЛОСТНОЙ ПОВРЕЖДАЕМОСТИ ГЕТЕРОГЕННЫХ МАТЕРИАЛОВ С ОЧЕНЬ СЛОЖНОЙ ДИНАМИКОЙ

С.Х. Шамирзаев\*, К.Э. Онаркулов\*\*, Д.А. Юсупова\*\*, Э.Д. Мухамедиев\*

\*Физико-технический институт АН РУз (Ташкент)

\*\*Ферганский государственный университет  
Узбекистан

Поступила в редакцию 12.06.2006

Исследованы чувствительные к наложенной деформации объемные и пленочные варианты гетерогенных сред (ГС) на основе теллуридов висмута-сурьмы, селенидов свинца а также карбонильного железа. Изучен характер необратимого изменения эффективных параметров ГС в условиях наложения случайного спектра деформации. Реакция ГС в условиях наложения случайного спектра деформации изучена путем периодических наблюдений за изменением его эффективного электрического сопротивления ( $R$ ). Рассчитаны реакции ГС на произвольные последовательности регулярных операторов нагружения. Проведено сопоставление с экспериментальными данными.

### ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] рассмотрен реальный конструкционный материал (КМ) имеющий запутанный механический потенциальный рельеф. В таком КМ имеются пары точек (равновесные точки) обладающих одинаковым потенциалом. Их пространственная функция распределения  $f_n(x, y, z)$  может быть представлена полным ортонормированным рядом функций  $\{\varphi_n, 1\}$ , которые подчиняются преобразованию пекаря ( $B$ ). После наложения спектра нагрузок, избранные равновесные точки мигрируют в пространстве КМ. Их пространственная функция распределения  $f_v$  также подчиняется преобразованию пекаря ( $B$ ). Это дало возможность найти общий закон, управляющий миграцией комплекса дефектов. Миграция дефектов в работе [1] увязана с зависимостью эффективного внутреннего трения

$Q_n^{-1}$  КМ от числа  $n$  – наложенных циклов, а в работе [2] с зависимостью также от  $n$  эффективного импеданса  $Z_n = \text{Re}Z_n + j \cdot \text{Im}Z_n$  ( $\text{Re}Z_n(\omega=0) = R_n$ ) полупроводникового чувствительного элемента (ПЧЭ), жестко установленного на КМ. Причем, как для  $Q_n^{-1}$  так и для  $Z_n$  впервые установлены и подтверждены экспериментально следующие рекуррентные соотношения:

$$Q_{n+1}^{-1} = H_n \cdot Q_n^{-1} + (1 - H_n) \cdot G_n, \quad (1)$$

$$Z_{n+1} = B_n \cdot Z_n + (1 - B_n) \cdot M_n. \quad (2)$$

Здесь  $H_n, G_n$  и  $B_n, M_n$  – технологические параметры КМ и ПЧЭ.

В настоящей работе показано, что рекуррентное соотношение для  $R_n$  – может быть сведено к логистическому уравнению, описывающему потоки комплекса дефектов, формирующих эффективное электрическое сопротивление ПЧЭ –  $R_n$ . Это впервые дает возможность теоретического исследования процесса усталостной повреждаемости гетерогенных материалов, и выявить границы технологических параметров, связанных с процессом усталостной повреждаемости.

### ПРОВОДИМОСТЬ ГЕТЕРОГЕННЫХ СРЕД В УСЛОВИЯХ НАЛОЖЕНИЯ НЕОБРАТИМОЙ СЛУЧАЙНОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Ниже кратко представлены полученные из анализа проведенных нами экспериментов особенности необратимого изменения эффективного электрического сопротивления –  $R_n$  гетерогенной среды (ГС) в условиях наложения случайного спектра деформации.

*Объекты исследования* – объемные и пленочные варианты ГС на основе теллуридов висмута-сурьмы, селенидов свинца а также карбонильного железа с объемными содержаниями, обеспечивающими высокую чувствительность ГС к наложенной деформации.

**Методика исследования.** Реакция ГС в условиях наложения случайного спектра деформации изучена путем систематических наблюдений за изменением его эффективного электрического сопротивления –  $R_n$ . То есть, исследуются, измеренные через равное число ( $n$ ) циклов, последовательности значений  $R_n$  ГС в условиях наложения спектра простых и сложных (хаотических) деформаций. Эта последовательность  $\{R(0), R(n), R(2n), \dots, R(k \cdot n)\}$ ;  $k$  – произвольное целое число} носит следы всех других переменных, участвующих в формировании динамики ГС.

### РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

Простые и сложные режимы нагружения приводят к разной реакции ГС. Экспериментально показано, что для простых режимов  $R[(k + 1) \cdot n]$ -ое значение сопротивления ГС линейно связано с его предыдущим значением –  $R[k \cdot n]$ :

$$R[(k + 1) \cdot n] = b \cdot R[k \cdot n] + (1 - b) \cdot M = Q(n, b, M) \cdot R[k \cdot n]. \quad (3)$$

Здесь  $Q(n, b, M)$  – линейный оператор нагружения переводящий  $R(k \cdot n)$  в  $R[(k + 1) \cdot n]$ ,  $b$  и  $M$  – константы, зависящие от амплитуды и степени асимметрии наложенных регулярных циклов деформации.  $L$ -кратное применение оператора  $Q$  переводит  $R(k \cdot n)$  в  $R[(k + L) \cdot n]$ .

Для двух разных операторов нагружения  $Q(n_1, b_1, M_1)$  и  $Q(n_2, b_2, M_2)$  приведены условия их коммутативности. Рассчитаны реакции ГС на различные ситуации нагружения: произвольные последовательности регулярных (но отличающихся параметрами нагружения) операторов; оператор математического ожидания; Марковские цепи для операторов нагружения ГС. Ниже проведено сопоставление с экспериментальными данными.

Электрофизические свойства и эффективные параметры прессованной смеси порошков, разных, технологически совместимых материалов, зависят от параметров компонент смеси и характера формируемой микро неоднородности. При наложении циклической механической деформации в таком ГС

может происходить процесс накопления рассеянных по всему объему микрповреждений. На некоторой стадии накопления микрповреждений происходит заметное изменение сопротивления гетерогенного материала (ГМ). На этой же или отличных стадиях меняются и другие его параметры, в частности величины эффективных термоэзд или импеданса.

Основными причинами необратимых изменений эффективного сопротивления гранулированных, прессованных полупроводниковых смесей являются пластическая деформация гранул и межгранульных областей. Микрповреждения в ГМ возникают непрерывно в течении всего процесса деформирования. Следовательно, наблюдая за изменением сопротивления (или другого легко измеряемого физического параметра) можно установить особенности накопления микрповреждений (характерных для измеряемого параметра) при наложении произвольного спектра деформаций.

### ОПИСАНИЕ ДИНАМИКИ ГС ВРЕМЕННОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬЮ ЕЕ ЭФФЕКТИВНЫХ СОПРОТИВЛЕНИЙ

Рассмотрим ГС, находящуюся в установившемся режиме. Будем регистрировать изменение ее сопротивления через равное число циклов  $n$  – наложенной деформации:  $R(N), R(N + n), R(N + 2n), \dots$ .  $N$  – произвольное число предварительно наложенных на ГС циклов деформации. Допустим, что динамика рассматриваемой ГС эффективно описывается всего одной независимой переменной. Тогда на плоскости  $R(N_j), R(N_{j+1})$  все точки последовательности  $R(N_1), R(N_2), R(N_3), \dots$ , будут ложиться на прямую

$$R[N_{j+1}] = a \cdot R[N_j] + C \quad (4)$$

$j$  – последовательность точек, в которых проведены замеры сопротивлений;  $a$  и  $C$  – константы, характеризующие прямую (4).

Теперь рассмотрим ситуацию, когда динамика ГС описывается двумя независимыми переменными. В этом случае точки  $N_j$  уже не ложатся на прямую линию, а будут слож-

ным образом разбросаны по плоскости  $R(N_j)$ ,  $R(N_{j+1})$ . То есть, теперь  $R(N_{j+1})$  может однозначно определяться только двумя предыдущими значениями  $R(N_j)$  и  $R(N_{j-1})$ . Иными словами, если размерность динамической системы равна  $k$ , то величина  $R(N_{j+1})$  оказывается функционально зависимой от  $R(N_j)$ ,  $R(N_{j-1})$ ,  $R(N_{j-2})$ ,  $R(N_{j-3})$ , ...,  $R(N_{j-k})$ ,  $k$ -штук предшествующих значений измеряемой физической величины.

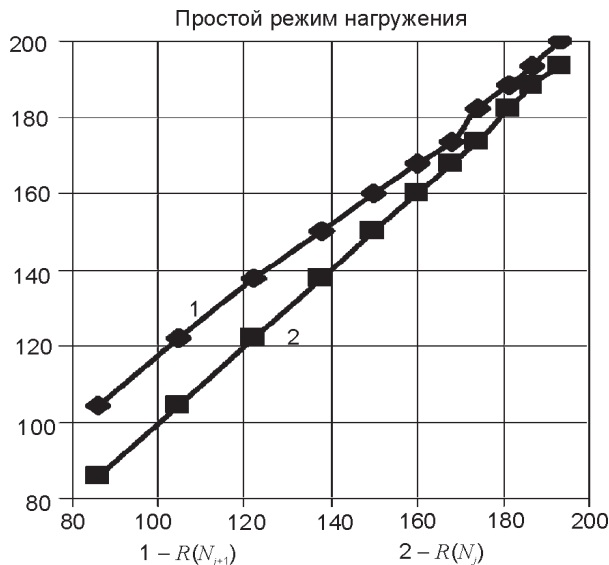


Рис. 1. Зависимость  $R(N_{j+1})=f(R(N_j))$  для простого режима нагружения. По этим экспериментальным данным находят константы  $b$  и  $M$ , входящие в формулу (3).

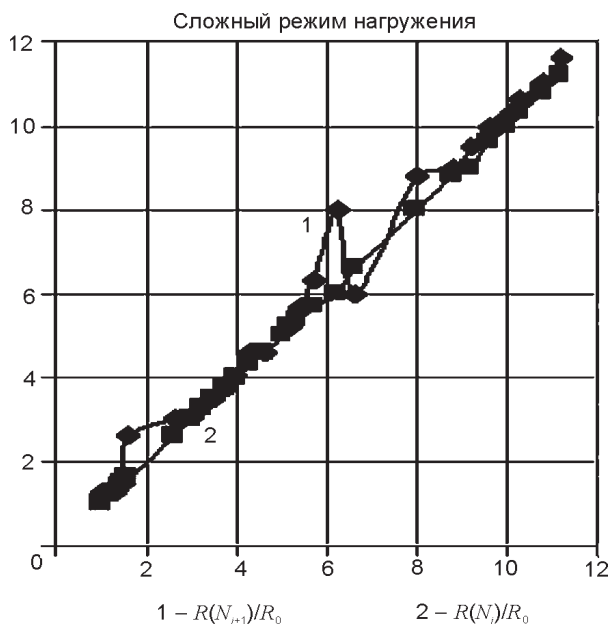


Рис. 2. Точечное отображение для сложного режима нагружения. Точки пересечения кривой  $R(N_{j+1}) = f(R(N_j))$  с прямой  $R(N_j) = f(R(N_j))$  являются предельными точками операторов, соответствующих “событиям”.

На рис. 1 и рис.2 представлены экспериментальные зависимости  $R(N_{j+1})$  от  $R(N_j)$  для простых и сложных режимов нагружения ГС. Параметры  $a$  и  $C$  зависят от величины и характера наложенных напряжений, а также от технологии изготовления пленочных ГС. В случае сложных режимов нагружения видно, что параметры  $a$  и  $C$  меняются. То есть, с изменением структуры ГС характер миграции дефектов также меняется.

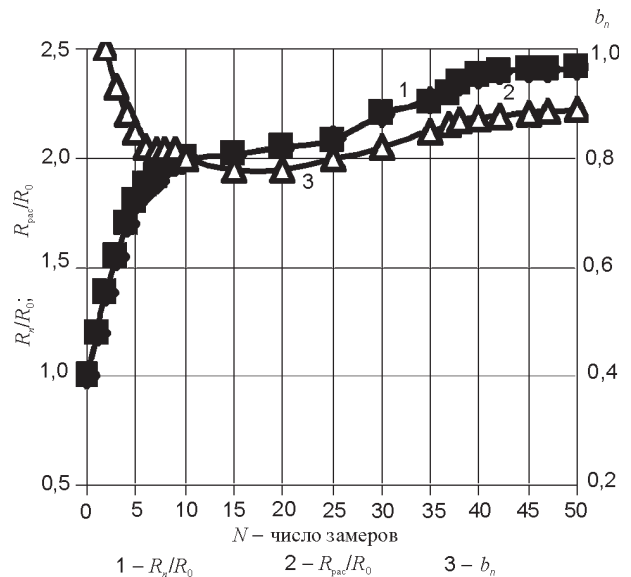


Рис. 3. Зависимости  $R(N)$  для симметричного режима нагружения  $\sigma_{\text{экв}} = 17 \text{ кГ/мм}^2$ .

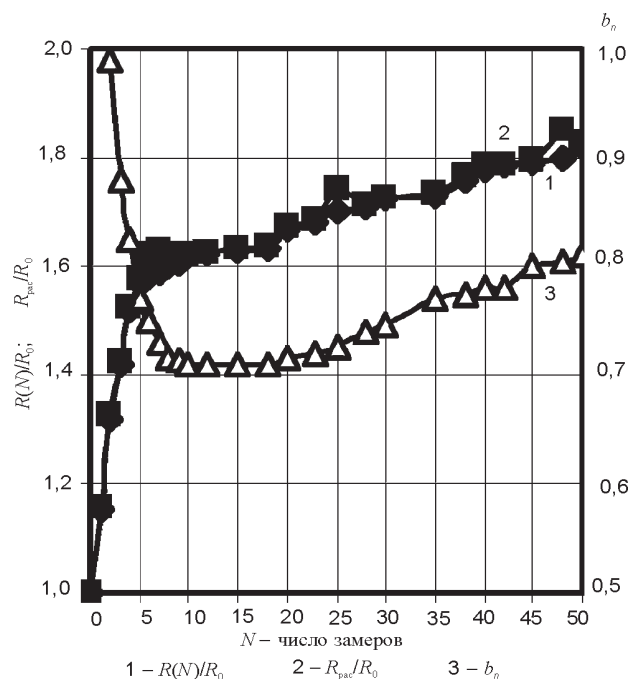


Рис. 4. Зависимости  $R(N)$  для отнулевого режима нагружения  $\sigma_{\text{экв}} = 17 \text{ кГ/мм}^2$ .

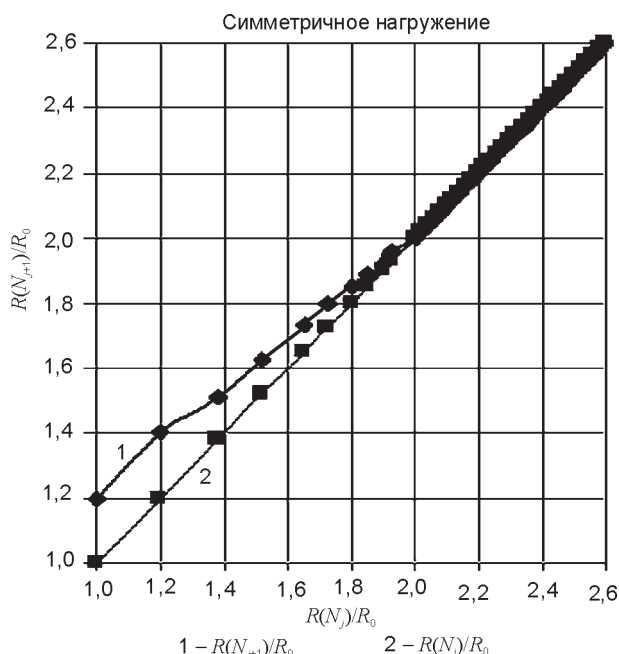


Рис. 5. Точечное отображение в плоскости  $R(N_{j+1}), R(N_j)$  для симметричного режима нагружения.  $\sigma_{\text{экв}} = 17 \text{ кГ/мм}^2$ .

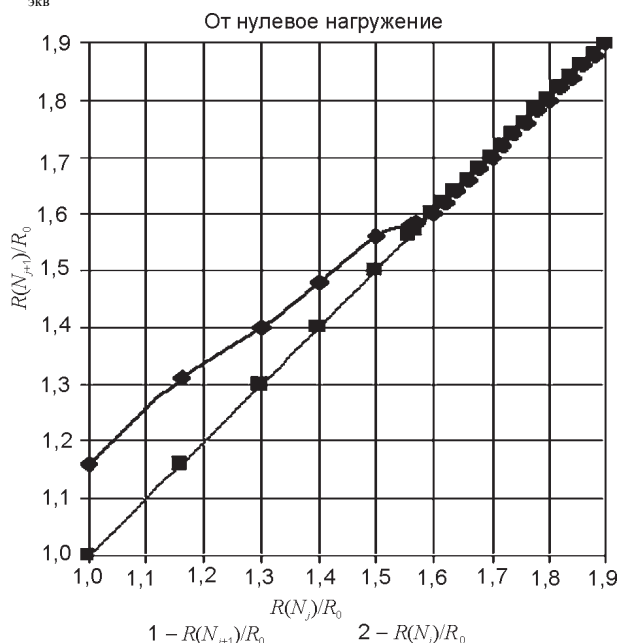


Рис. 4. Зависимости  $R(N)$  для от нулевого режима нагружения  $\sigma_{\text{экв}} = 17 \text{ кГ/мм}^2$ .

На рис. 3 и рис. 4 приведены зависимости  $R(N)$  для симметричного и от нулевого режимов нагружения, соответствующих одному и тому же эквивалентному напряжению –  $17 \text{ кГ/мм}^2$ .

На рис. 5 и рис. 6 в плоскости  $R(N_{j+1}), R(N_j)$  построены графики для этих же экспериментальных данных.

Формула (4) может быть представлена в виде:

$$R_{j+1} = b \cdot R_j + (1 - b) \cdot M = Q(j, b, M) \cdot R_j, \quad (5)$$

где  $b$  и  $M$  – константы в случае простых режимов нагружения;  $j$  – номер события: оно состоит в том, что на ГС наложено очередных  $m$  циклов деформации, после чего проводится измерение ее сопротивления.

Для ГС с фиксированной начальной структурой и фиксированными параметрами нагружения коэффициенты  $b$  и  $M$  могут быть определены из системы уравнений, построенной с использованием экспериментальных данных:

$$\sum_{j=0}^N [R_{j+1}] = b \cdot \sum_{j=0}^N [R_j] + N \cdot (1 - b) \cdot M, \quad (6)$$

$N$  – число замеров, в пределах которых  $b$  и  $M$  не меняются.

На рис. 3 и рис. 4 приведены экспериментально найденные зависимости  $b(N)$ , которые

$$\sum_{j=0}^N [R_j \cdot R_{j+1}] = b \cdot \sum_{j=0}^N [R_j^2] + (1 - b) \cdot M \cdot \sum_{j=0}^N [R_j] \quad (7)$$

могут быть представлены в виде:

$$b(N) = 1 - C \cdot (R(N) - R_0) / R_0. \quad (8)$$

Для последовательности двух идентичных событий, можно непосредственно вычислить результат применения оператора  $Q(m, b, M)$ :

$$R_{j+2} = Q \cdot R_{j+1} = Q \cdot Q \cdot R_j = Q^2 \cdot R_j = b^2 \cdot R_j + (1 - b^2) \cdot M. \quad (9)$$

Поэтому последовательное действие  $N$  – штук операторов  $Q$  дает:

$$R(N) = Q_N \cdot R_0 = b(N) \cdot R_0 + (1 - b(N)) \cdot M. \quad (10)$$

В этой ситуации, если коэффициент  $b < 1$ , то при  $N \rightarrow \infty, R(N) \rightarrow M$ . То есть, точка  $M$  является предельной точкой оператора  $Q$ . Другими словами, последовательное действие идентичных операторов  $Q$  на начальное значение  $R_0$  при  $N \rightarrow \infty$  приводит к тому, что сопротивление ГС становится равным величине  $M$ .

Для сложных последовательностей нагружения (событий) оператору  $Q$  следует присвоить индекс. Например,  $Q_1 = Q(m_1)$  или  $Q_2 = Q(m_2)$ . То есть,  $Q_1$  описывает событие, состоящее в том, что на ГС наложено  $m_1$  – циклов деформации, после чего фиксируется его сопротивление, а для  $Q_2$  сопротивление ГС фиксируется после наложения  $m_2$  – циклов

той же деформации. В дальнейшем, нижний индекс будет также присваиваться операторам  $Q_j$ , имеющим разные предельные точки  $M_j$  и коэффициенты  $b_j$

$$Q_j = Q(m_j; b_j; M_j). \quad (11)$$

Подчеркнем, что для структурно идентичных ГС, различие  $M_j$  и  $b_j$  означает, что на них наложены различные деформации. Различие может быть обусловлено как амплитудой ( $\sigma_j$ ), числом промежуточных циклов ( $m_j$ ), так и по структуре наложенных напряжений.

## КОММУТАТИВНОСТЬ ОПЕРАТОРОВ $Q_1$ И $Q_2$

Для описания сложных режимов нагружения необходимо исследовать коммутативность операторов  $Q_1$  и  $Q_2$ . Итак, сначала на  $R_0$  действует оператор  $Q_2 = Q(m_2; b_2; M_2)$ , а затем оператор  $Q_1 = Q(m_1; b_1; M_1)$ :

$$Q_1 \cdot Q_2 \cdot R_0 = b_1 \cdot b_2 \cdot R_0 + (1 - b_1 \cdot b_2) \cdot M_{12}. \quad (12)$$

Здесь  $M_{12}$  – предельная точка сложного оператора  $Q_{12} = Q_1 \cdot Q_2$ , связана с предельными точками  $M_1$  и  $M_2$  следующим соотношением:  $(1 - b_1 b_2) \cdot M_{12} = b_1(1 - b_2) \cdot M_2 + (1 - b_1) \cdot M_1$ . (13)

Для обратной последовательности действия этих же операторов имеем:

$$Q_2 \cdot Q_1 \cdot R_0 = b_1 \cdot b_2 \cdot R_0 + (1 - b_1 \cdot b_2) \cdot M_{21}, \quad (14)$$

где предельная точка  $M_{21}$  в этой ситуации, вообще говоря, отличается от  $M_{12}$  и равна:

$$M_{21} = [b_2(1 - b_1) \cdot M_1 + (1 - b_2) \cdot M_2] / (1 - b_2 b_1). \quad (15)$$

Таким образом, коммутативность операторов  $Q_1$  и  $Q_2$  имеет место в одной из трех ситуаций:  $b_1 = 1$ ;  $b_2 = 1$ ;  $M_1 = M_2$ .

Первое и второе условия соответствуют ситуации единичного оператора, то есть один из операторов есть единичный оператор. Третье условие соответствует идентичности предельных точек рассматриваемых операторов.

## СИСТЕМАТИЧЕСКАЯ

### ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ $[Q^v \cdot Q^u]^n$

Рассмотрим более сложную ситуацию, когда оператор  $Q_2$  действует  $u$ -раз, затем оператор  $Q_1$  действует  $v$ -раз и такая комбинация повторяется  $n$ -раз. Для сложного оператора

$Q_{v,u} = Q_1^v \cdot Q_2^u$  находим  $Q_{v,u} R_0 = b_{u,v} R_0 + (1 - b_{u,v}) M_{u,v}$ , где  $b_{u,v} = b_1^u \cdot b_2^v$ , а

$$M_{u,v} = \frac{[b_2^v \cdot (1 - b_1^u) \cdot M_1 + (1 - b_2^v) \cdot M_2]}{1 - b_{u,v}}.$$

Если  $u$  – фиксировано, а  $v$  стремится к бесконечности, то получим  $\lim_{v \rightarrow \infty} M_{u,v} = M_2$ .

Если же  $v$  – фиксировано, а  $u$  стремится к бесконечности, то

$$\lim_{u \rightarrow \infty} M_{u,v} = b_2^v \cdot M_1 + (1 - b_2^v) \cdot M.$$

Таким образом, становится возможным анализировать действие любой последовательности операторов, которая многократно повторяется. Справедливо также и обобщение этих результатов, когда число операторов больше двух.

*Оператор математического ожидания и Марковские цепи для операторов ГС* также могут быть найдены если известны соответствующие вероятности.

## ВЫВОДЫ

Созданные как методы принципы оценки выходных параметров конструкционного материала и их изменение при наложении необратимой усталостной деформации, так и новый путь анализа динамики реологических структур, формирующих необратимые выходные параметры материалов. Для реальной конструкционной балки с установленными датчиками накопленной усталостной повреждаемости получены экспериментальные результаты подтверждающие разработанную количественную модель.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Shamirzaev S. Modelling a fatigue imperfection of structural materials//International Journal of Fatigue. – 2002. – № 24. – P. 777-782.
2. Shamirzaev S. The theory of output parameters of a pressing powder mixture with random packaging density//Solid State Sciences. – 2004. – № 6. – P. 1125-1129.
3. Shamirzaev S. and Shamirzaeva G. The rheological model of fatigue damage of CM. / Proceedings of the XIII<sup>th</sup> International Congress of Rheology. Cambridge, UK. Published by the



- British Society of Rheology. – 2000. – Vol. 3. – P. 377-379.
4. Шамирзаев С.Х. и др. Тензорезистивная структура гетерогенных материалов: Препринт № 140-90-ФПП. ФТИ НПО „Физика-Солнце” АН РУз.
5. Shamirzaev S., Mukhamediev E. and Shamirzaeva G. Molecular-kinetic processes of fatigue of aluminum alloys// Proc. of the Third International Conference on Very High Cycle Fatigue (VHCF-3) (Japan). – 2004. – P.108- 115.

**ПРОСТІ МОДЕЛІ ВТОМЛЮВАЛЬНОЇ  
ПОШКОДЖУВАНОСТІ ГЕТЕРОГЕННИХ  
МАТЕРІАЛІВ З ДУЖЕ СКЛАДНОЮ  
ДИНАМІКОЮ**

**С.Х. Шамірзаєв, К.Э. Онаркулов,  
Д.А. Юсупова, Э.Д. Мухамедієв**

Досліджено чуттєві до накладеної деформації об'ємні і плівкові варіанти гетерогенних середовищ (ГС) на основі телуридів вісмуту-сурми, селенідів свинцю а також карбонільного заліза. Вивчено характер необоротної зміни ефективних параметрів ГС в умовах накладення випадкового спектра деформації. Реакція ГС в умовах накладення випадкового спектра деформації вивчена шляхом періодичних спостережень за зміною його ефективного електричного опору ( $R$ ). Розраховано реакції ГС на довільні послідовності регулярних операторів навантаження. Проведено зіставлення з експериментальними даними.

**SIMPLE MODELS OF FATIGUE  
DAMAGEABILITY OF HETEROGENEOUS  
MATERIALS WITH VERY DIFFICULT  
DYNAMICS**

**S.H. Shamirzaev, K.E. Onarkulov,  
D.A. Yusupova, E.D. Mukhamediev**

Sensitive to imposed deformation volumetric and film of variants of heterogeneous environments (HE) on a basis telluride of vismut-antimony selenide-lead and also carbonic of iron are investigated. The character of irreversible change of effective parameters of HE in conditions of imposing of a casual spectrum of deformation is investigated. The reaction of HE in conditions of imposing of a casual spectrum of deformation is investigated by periodic supervision over change its effective electrical resistance ( $R$ ). The reactions of HE on any sequences of the regular operators of loading are calculated. The comparison to experimental data is carried out.