

УДК 620.16

**Р. А. Гасанов**<sup>1</sup>, д-р техн. наук; **И. Я. Ширали**<sup>2</sup>, канд. техн. наук, **А. С. Гулгазли**<sup>1</sup>, канд. физ.-мат. наук, **Ю. А. Оруджев**<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Азербайджанская Государственная Нефтяная Академия, г. Баку

<sup>2</sup>Государственная Нефтяная Компания Азербайджанской Республики, г. Баку

## ОБ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ВЫНОСЛИВОСТИ КОНСТРУКЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

В предложенной статье разработано энергетическое условие прочности для анизотропных тел и применено к расчетам на прочность стен глубоких нефтегазовых скважин. Получено аналитическое выражение для избыточного давления, при котором происходит разрушение стен скважины.

**Ключевые слова:** прочность, анизотропия, изотропия, ортотроп, критерий, деформация, напряжения, тензор.

### Введение

Известно, что многие детали машин и оборудования за период эксплуатации подвергаются действию циклических нагрузок. Например, оси колес вагонов, вращающиеся вместе с колесами подвергаются циклическим нагружениям растяжения–сжатия.

Результаты опытов показывают, что при действии циклически изменяющихся нагружений элементы конструкций разрушаются при более низком напряжении, чем напряжение, вызванное действием статических нагрузок. Это связано с тем, что в диаграмме растяжения–сжатия упругая зона, которую обычно считают прямолинейной и подчиняющейся закону Гука, в действительности не прямая. До определенного значения напряжения часть диаграммы является прямой. Это значение напряжения принято называть пределом выносливости. При напряжении меньше предела выносливости элемент конструкции может выдерживать большое количество циклов нагружений, т. е. способен работать неограниченно долго. Несмотря на то что при напряжении больше предела выносливости деформации упругие, эта часть диаграммы является кривой линией с малой кривизной. Когда напряжение оказывается в этой области после определенного количества циклов, материал разрушается. Причем, чем больше напряжение, тем меньше циклов для разрушения.

### Постановка задачи

При разгрузке после нагружения усилием больше предела выносливости диаграмма не совпадает с диаграммой нагружения и образуется петля гистерезиса (рис. 1) [1]. Площадь, образованная замкнутой кривой *ABCD*, на рис. 1 является потерянной энергией за один цикл. Требуется определить количество циклов для разрушения. Это определяется из условия равенства суммы потерянной энергии при повторном нагружении и энергии разрушения при одном цикле.

### Содержание работы

Кривые *AB*, *BC*, *CD* и *DA* несущественно отличаются от прямой, заменим их прямыми отрезками (рис. 2).

Тогда энергия, которая поглощается при каждом цикле, будет равняться площади параллелограмма *ABCD* на рис. 2. На рис. 2  $\sigma$ ,  $\sigma_0$  – напряжение соответственно нормальное и остаточное. Как видно на рис. 2, площадь параллелограмма *ABCD*, т. е. потерянная энергия при каждом цикле:

$$S = 2\sigma_0 \frac{\sigma}{E}. \quad (1)$$

Для произвольного напряженного состояния за пределами упругости между компонентами

напряжений нормального и остаточных напряжений получены следующие зависимости[2]:

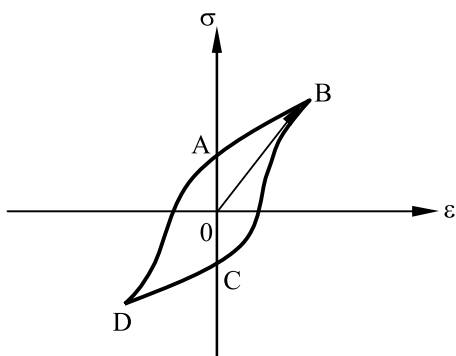


Рис. 1. Петля гистерезиса при циклическом деформировании

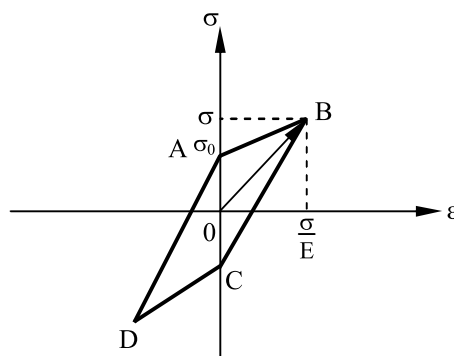


Рис. 2. Упрощенная диаграмма петли гистерезиса

$$\sigma_{ij}^0 = \frac{1-k_0}{2} \sigma_{ij}, \quad (2)$$

где  $\sigma_{ij}$  – компоненты тензора напряжений;  $\sigma_{ij}^0$  – компоненты тензора остаточных напряжений.

$$k_0 = \sqrt{\frac{2\sigma_T^2}{J_1^2 + 2(1+\nu)J_2} - 1}; \quad (3)$$

$\nu$  – коэффициент Пуассона;  $\sigma_T$  – предел текучести;  $J_1, J_2$  – инварианты тензора напряжений соответственно первый и второй.

При одноосном растяжении–сжатии  $J_1 = \sigma, J_2 = 0$  и (3) представляют:

$$k_0 = \sqrt{\frac{2\sigma_T^2}{\sigma^2} - 1}. \quad (4)$$

Когда нормальное напряжение больше предела выносливости и меньше предела упругости, роль предела текучести  $\sigma_T$  играет предел выносливости  $\sigma_B$  и (4) приобретают вид:

$$k_0 = \sqrt{\frac{2\sigma_B^2}{\sigma^2} - 1}. \quad (5)$$

С учетом (5) в (2) и (2) в (1) после несложных преобразований для потерянной энергии за  $N$  циклов получаем

$$A = S \cdot N = \frac{\sigma}{E} \left( \sigma - \sqrt{2\sigma_B^2 - \sigma^2} \right) N = \frac{\sigma^2}{E} (1 - k_0) N, \quad (6)$$

где  $E$  – модуль Юнга.

Известно [2], разрушение материала начинается тогда, когда сумма удельных энергий максимальных упругих деформаций в двух противоположных направлениях в пространстве напряжений равняется величине  $\sigma_T^2/E$ .

Следовательно, для момента начала разрушения материала должно выполняться условие

$$\frac{\sigma}{E} \left( \sigma - \sqrt{2\sigma_B^2 - \sigma^2} \right) N = \frac{\sigma_T^2}{E},$$

откуда определяется количество циклов, при котором начинается процесс усталостного разрушения:

$$N = \frac{\sigma_T^2}{\sigma \left( \sigma - \sqrt{2\sigma_B^2 - \sigma^2} \right)}. \quad (7)$$

Чтобы число циклов было положительное, должны выполняться условия

$$\begin{cases} \sigma - \sqrt{2\sigma_b^2 - \sigma^2} > 0 \\ 2\sigma_b^2 - \sigma^2 \geq 0 \end{cases}$$

Отсюда

$$\sigma_b \leq \sigma \leq \sqrt{2} \sigma_b. \quad (8)$$

С другой стороны,

$$\sigma_b \leq \sigma \leq \sigma_T \quad (9)$$

Из сравнения (8) и (9) получаем следующий теоретический результат:

$$\sigma_b \leq \frac{\sigma_T}{\sqrt{2}} \quad (10)$$

Из (7) при  $\sigma = \sqrt{2} \sigma_b$   $N = 1$ , а при  $\sigma = \sigma_b$  получаем  $N = \infty$ . Это означает, что при  $\sigma \rightarrow \sigma_T$  элемент конструкции разрушается при первом же цикле, а при  $\sigma \rightarrow \sigma_b$  конструкция может работать бесконечно долго. График зависимости усталостного напряжения от количества циклов, при котором происходит усталостное разрушение, показан на рис. 3.

Известно, что для некоторых, так называемых нелинейно упругих материалов, из-за ярко выраженной петли гистерезиса невозможно определять модуль Юнга. Такими материалами например являются медь и алюминий. Чтобы определить модуль Юнга таких материалов, сначала их растягивают до возникновения пластической деформации, а потом разгружают (при вторичном нагружении не возникает петля гистерезиса) и определяют модуль Юнга [3]. Это связано с тем, что после пластического деформирования растяжения по эффекту Баушингера пределы прочности, упругости и текучести увеличиваются при растяжении и уменьшаются при сжатии. Точно такое же происходит с пределом выносливости. Поэтому чтобы увеличить срок службы отдельного элемента конструкции, которая подвергается несимметричному циклическому нагружению, т. е. напряжение не изменяет знак. Сначала конструкцию подвергают нагружению до появления пластических деформаций. Тем самым увеличивается предел выносливости в одном направлении, что приводит к увеличению количества циклов, необходимых для усталостного разрушения. Можно привести множество примеров изложенного, включая технологию изготовления стволов орудий.

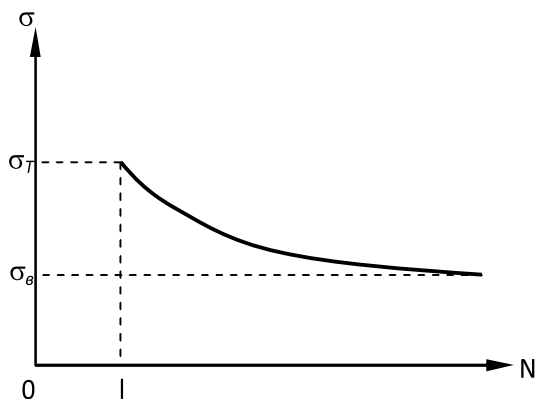


Рис. 3. Зависимость влияния количества циклов на усталостное разрушение

Из равенства (7) получается, что предел выносливости может увеличиваться в  $\sqrt{2} \approx 1,4$  раза.

Для произвольного напряженного состояния сумма максимальных удельных работ по двум противоположным направлениям согласно формуле (2)

$$A = [J_1^2 + 2(1 + \nu)J_2^2] / E. \quad (11)$$

Тогда количество циклов при произвольном напряженном состоянии определяется по формуле

$$N = \frac{\sigma_T^2}{[J_1^2 + 2(1 + \nu)J_2^2] (1 - k_0)}, \quad (12)$$

где

$$k_0 = \sqrt{\frac{2\sigma_b^2}{J_1^2 + 2(1 + \nu)J_2^2}} - 1. \quad (13)$$

Как видно из (12), при  $k_0 \rightarrow 1$  из (12) получаем  $N \rightarrow \infty$ . Из (13) при  $k_0=1$  имеем

$$J_1^2 + 2 \cdot (1 + \nu) \cdot J_2^2 = \sigma_b^2. \quad (14)$$

Формула (14) означает, что если путь нагружения в пространстве напряжений еще не вышел за пределы выносливости, следовательно, элемент конструкции может работать

бесконечно долго.

При  $k_0 = 0$  из (13) получим

$$J_1^2 + 2(1 + \nu) \cdot J_2^2 = 2\sigma_B^2 = \sigma_T^2. \quad (15)$$

Подставив (15) в (12) получим  $N = 1$ .

Условие (15) означает, что если конец пути нагружения в пространстве напряжений уже находится на поверхности текучести, при первом же цикле возникает пластическая деформация.

#### **Выводы**

1. Получено выражение для симметричных циклов при одноосном растяжении–сжатии, после которых материал разрушается в зависимости от значения максимального нормального напряжения.

2. Доказано, что между пределом выносливости  $\sigma_B$  и пределом текучести  $\sigma_T$  существует связь  $\sigma_T = \sqrt{2} \sigma_B$ .

3. За счет упрочнения материала предел выносливости может увеличиваться  $\sqrt{2} \approx 1,4$  раза.

4. Когда максимальное значение нормального напряжения  $\sigma = \sqrt{2} \sigma_B = \sigma_T$ , материал разрушается после первого же цикла.

5. При  $\sigma < \sigma_B$ , т. е. когда максимальное значение нормального напряжения не больше предела выносливости, количество циклов, необходимых для разрушения материала равняется бесконечности. В таком случае деталь может работать неограниченно долго.

6. Получено выражение для циклов, после которых материал разрушается при произвольном напряженном состоянии.

*В запропонованій статті розроблено енергетичну умову міцності для анізотропних тіл і застосовано до розрахунків на міцність стін глибинних нафтогазових свердловин. Отримано аналітичний вираз для надлишкового тиску, при якому відбувається руйнування стін свердловини.*

**Ключові слова:** міцність, анізотропія, ізотропія, ортотроп, критерій, деформація, напруги, тензор.

*In the proposed article is elaborated the energetic condition of strength for anisotropic solids and applied to calculations of the strength for the walls of deep oil and gas wells. An analytical expression for the pressure at which the destruction of the walls of the well.*

**Key words:** the strength of the anisotropy, isotropy, orthotropic, criterion, deformation, stress, tensor.

#### **Литература**

1. Иванова В. С. Усталостное разрушение металлов. Гос. Науч.-техн. изд-во л-ры по черной и цветной металлургии. – М., 1963. – 272 с.
2. Гулгасли А. С. Новое энергетическое условие прочности для упруго-пластических тел // Механика. Машиностроение. – 2003. – № 1. Б. – С. 8–10.
3. Феодосьев В. И. Сопrotивление материалов. – М.: Наука, 1970. – 544 с.
4. Серенсен С. В., Когаев В. П., Шнейдерович В. М. Несущая способность и расчеты деталей машин на прочность. – М.: Машиностроение, 1975. – 488 с.

*Поступила 21.06.12*