

НЕКОТОРЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПРИМЕНЕНИЯ НАНОЧАСТИЦ ПРИ ДИАГНОСТИКЕ И ЛЕЧЕНИИ ОНКОЛОГИЧЕСКИХ ЗАБОЛЕВАНИЙ

Л.Б. Лерман

*Институт химии поверхности им. А. А. Чуйко Национальной академии наук Украины,
ул. Генерала Наумова 17, Киев Украина, 03164, e-mail: llerman@yandex.ru*

Анализируются возможности использования в медицине золотых и биметаллических наночастиц с серебряным ядром и золотой оболочкой, а также магнитных композитных наночастиц. Для слоистых сферических и цилиндрических частиц получены новые решения связанных задач электродинамики и теплопроводности. Приводятся результаты расчетно-экспериментальных исследований магнитных полей и технических характеристик аппликаторов для модельных источников поля. Разработана методика определения конфигурации магнитных систем для локализации области действия магнитной силы и экспериментально найдены магнитные моменты агрегатов наночастиц. Определены кинематические характеристики движения магнитных наночастиц в кровеносных сосудах при действии внешнего поля и установлены условия удержания носителей в органе-мишени. Полученные соотношения для расчета температурных полей в окрестности наночастиц позволили связать температуры в клетке и межклеточной жидкости с характеристиками электромагнитного поля, и тем самым установить необходимые для достижения требуемых значений температур электрическую напряженность и магнитную индукцию внешнего поля.

Введение

В современную медицину в настоящее время начинают активно проникать достижения нанотехнологий, стимулируя развитие нового направления медицинской физики, получившего название «наномедицина». Наномедицина – это современное медицинское применение нанотехнологий, и по определению, данному первооткрывателем в этой области науки Р. Фрейтасом [1], это «слежение, исправление, генетическая коррекция и контроль биологических систем организма человека на молекулярном уровне, использующая наноустройства и наноструктуры». Таким образом, наномедицина охватывает широкий спектр различных медицинских и биофизических задач [2]. В настоящее время интенсивно ведутся разработки новых медицинских препаратов, инструментов, лекарств и т.п. на основе уже известных свойств некоторых наноматериалов [3–5].

В онкологии используют различные типы наночастиц, такие как полимерные наночастицы, фуллерены, керамические и металлические наночастицы, углеродные нанотрубки, нанокристаллы, магнитные наночастицы, квантовые точки и др. Одной из серьезных проблем в медицине является целенаправленная доставка препаратов в определенное место организма в строго определенных дозах. Нанотехнологи ведут поиски новых материалов и разработку оборудования для транспортировки, которые помогли бы решить эту проблему для конкретных заболеваний. Одним из них, при лечении которого необходима точечная доставка лекарства, является рак, и, возможно, именно нанотехнологии станут панацеей от этой страшной болезни. Главной идеей при этом является инициация апоптоза¹, сокращение числа раковых клеток с помощью точечной доставки цитотоксинов – особого вида антител, повреждающих клетки при взаимодействии с их антигенами или нарушающих работу клеток РНК, но при этом не

¹ Апоптоз (греч. *αποπτωσις* – опадание листьев) – явление программируемой клеточной смерти.

повреждающих здоровые клетки, что обычно происходит при химиотерапии. Наночастицы из золота или кадмия можно создавать таким образом, что иммунная система не будет обнаруживать и отторгать их, и при этом вследствие большого значения отношения площади поверхности наночастиц к объему их нетрудно покрыть нуклеиновыми кислотами и белками. Все же обычно из-за высокой токсичности препарат вводят малыми дозами, однако при использовании наночастиц лекарство непосредственно проникает в опухолевые клетки, и это позволяет радикально увеличивать дозировку. В настоящее время доля рынка лекарств с модифицированной системой доставки составляет 20% от общего объема рынка фармпрепаратов [6].

Наночастицы с препаратом могут попасть в опухолевую ткань либо пассивным, либо активным образом. Для растущей опухоли, которая нуждается в непрерывном увеличении поступления кислорода и глюкозы, характерно ускоренное образование сосудов. Это приводит к тому, что в них возникают дефекты, вызывающие повышенную проницаемость для наночастиц. Обнаружено [7], что минимальный диаметр пор в дефектных сосудах составляет приблизительно 200 нм, что позволяет наночастицам свободно проникать в опухоль и накапливаться в ней. При использовании химического присоединения к наночастицам компонента, избирательно взаимодействующего с антигеном на раковых клетках, реализуется активная доставка наночастиц в пораженный орган [7, 8]. В [9] приведены результаты, демонстрирующие экспериментально обнаруженную концентрацию наночастиц золота, самопроизвольно проникающих в онкологические образования.

В случае магнитных наночастиц и магнетосом естественно использовать магнитное поле для их транспортировки и удержания в нужном месте организма. Идея применения магнитных полей с этой целью известна достаточно давно [10] и все время совершенствовалась как путем создания новых материалов [11–18], так и разработкой системы источников (аппликаторов) для получения априори заданной конфигурации магнитного поля в рабочей зоне организма [19–25]. В последнем случае задача проектирования рассматривается как задача синтеза, т.е. как обратная задача [23–25], состоящая в нахождении системы постоянных магнитов или размещения в пространстве электромагнитных катушек, определении значений токов и геометрии магнитных систем, обеспечивающих необходимую конфигурацию магнитного поля.

После накопления препарата в опухоли для лечения используется либо его непосредственное действие, либо получившие в последнее время широкое распространение методы термотерапии, которые включают общую гипертермию, магнитную гипертермию и термоабляцию² (радиочастотную, микроволновую и лазерную). Магнитная гипертермия биологических тканей с применением наночастиц магнетита подробно рассмотрена в статье [26]. Там же приведены результаты компьютерного моделирования изменения температуры в опухоли в зависимости от объемной концентрации в ней магнитных частиц. В обзорной статье [27] приведена сводная таблица физических механизмов, процедур, предклинических и клинических данных для некоторых типов термотерапии. Из этих данных следует, что при воздействии различных типов электромагнитного излучения после доставки наночастиц в опухоль удается достичь температуры 40°C–43°C, а при магнитной гипертермии и 45°C. Там же отмечается, что гипертермию целесообразно использовать в сочетании с радиационным облучением и химиотерапией. Эффективность комбинирования радиотерапии и гипотермии продемонстрирована на примере клинических испытаний при лечении рака молочной железы (ссылки на

² Абляция – отторжение части тканей посредством излучений. Излучения воздействуют на белки тканей и вызывают отторжение части клеток.

соответствующие сообщения приведены в [27]). Показано, что в некоторых случаях наблюдается возрастание полной ремиссии рака молочной железы с 44% до 70%. Также показано, что такое сочетание полной или частичной гипертермии тела с другими методами лечения онкологических заболеваний приводит к повышению эффективности действия лекарственных препаратов, особенно при наличии метастазов.

В настоящей работе рассматриваются золотые наночастицы [28–30], биметаллические наночастицы [31–33] с серебряным ядром и золотой оболочкой и магнитные композитные наночастицы на основе магнетита [13–17]. К последнему классу частиц также следует отнести магнитную керамику [18] и магнетосомы³ [34, 35]. В отличие и в дополнение к результатам статьи [26], в которой рассмотрено только магнитное поле, автором учитываются обе составляющие электромагнитной энергии (ЭМЭ): электрическая и магнитная.

В связи с вышеизложенным, при теоретическом анализе возможности использования указанных классов наночастиц возникает ряд физических задач, из которых целесообразно выделить следующие:

- нахождение энергии электромагнитного поля (ЭМП), выделяющейся в слоистых частицах;
- расчет пространственного распределения магнитных полей в пространстве для различных источников поля;
- расчет температурных полей в окрестности немагнитных наночастиц при воздействии электромагнитного излучения и определение необходимой мощности источника для достижения требуемых температур;
- расчет температурных полей в окрестности магнитных наночастиц при воздействии переменного ЭМП и определение необходимых для достижения требуемых значений температур физических характеристик полей;
- определение конструкции и технических характеристик источников магнитного поля (аппликаторов), которое обеспечивает удержание магнитных частиц в нужной части организма;
- расчет кинематических характеристик движения магнитных наночастиц и их агрегатов в кровеносных сосудах при действии внешнего магнитного поля.

Нагрев наночастиц происходит за счет поглощения в материале частицы части энергии электромагнитного излучения (ЭМИ) и перехода ее в тепловую. Для немагнитных частиц поглощение определяется комплексной частью частотно-зависимой диэлектрической проницаемости, а для магнитных частиц – дополнительно комплексной частью магнитной проницаемости. Здесь возникает две связанные задачи: задача электродинамики, состоящая в нахождении распределения энергии ЭМИ в наночастице и тепловых потерь, которые определяют мощность внутренних источников тепла, и задача теплопроводности, состоящая в нахождении распределения температурных полей в наночастице и окружающей ее среде при наличии найденных источников. В [36] рассмотрен нагрев золотой сферической наночастицы и золотых наночастиц в полимерной оболочке, которые помещались в лед. Под действием внешнего электрического поля нагрев частицы приводит к плавлению льда и образованию водяной оболочки. Задача рассматривалась в условиях радиальной симметрии. Вместе с тем известно [40], что даже в условиях симметрии, имеющей место при действии постоянного однонаправленного электрического поля, в сферической частице возникает антисимметричное поле. Поэтому решение, приведенное в [36], является приближенным и нуждается в уточнении, которое

³ Магнетосома (бактериальная магнитная наночастица, англ. *magnetosome*) – мембранная структура бактерий, характерная для обладающих [магнитотаксисом](#) бактерий, содержащая монодоменные ферромагнитные кристаллы. Обычно в клетке содержится от 15 до 20 кристаллов [магнетита](#).

выполнено в [40]. В этой статье с использованием метода трансляционных матриц (transfer matrix method, МТМ) [40, 41] найдены напряженности электрического поля в слоях радиально-неоднородной сферической частицы, что позволяет определить ЭМЭ и соответственно мощность тепловых источников в каждом слое.

Следует отметить, что при использовании магнитотерапии безопасность физиологического воздействия магнитного поля на живые организмы является определяющим. Эмпирическое неравенство [1] $f|\mathbf{H}| \leq 4,85 \cdot 10^8 \text{ A/(м}\cdot\text{с)}$, где f – линейная частота, \mathbf{H} – напряженность внешнего ЭМП, позволяет установить необходимые ограничения для обеспечения безопасности человеческого организма.

1. ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

1.1. Объекты исследования

Рассматриваются слоистые радиально-неоднородные наночастицы сферической или цилиндрической формы с поверхностями раздела в виде N концентрических сфер или соосных круговых цилиндрических поверхностей (рис. 1.1). Частицы находятся под действием ЭМИ, гармонически изменяющегося во времени с круговой частотой ω , пропорционально временному множителю $\exp(i\omega t)$, i – мнимая единица (монохроматическое излучение).

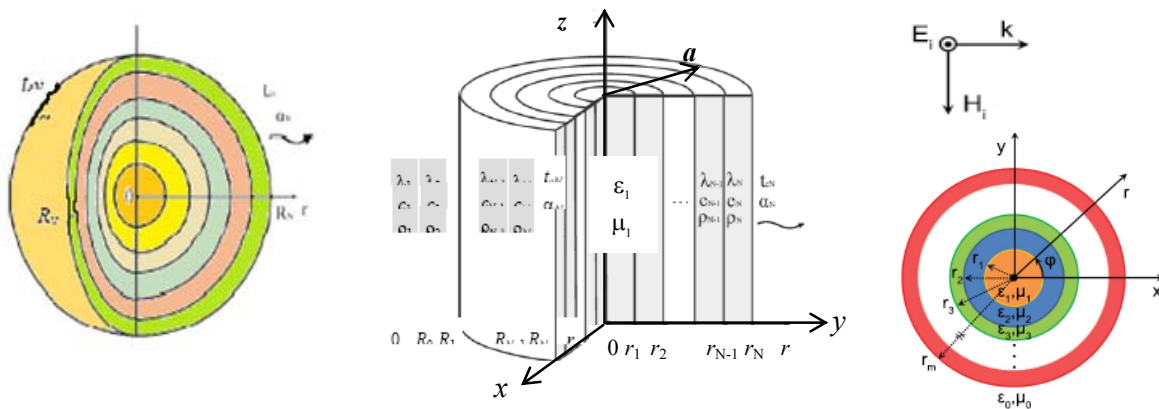


Рис. 1.1. Слоистые сферические и цилиндрические частицы.

Нумерация слоев (j – номер слоя, $j = 1, 2, \dots, N$) начинается с центрального шара или центрального цилиндра, для которых $j = 1$: для внешней среды $j = N + 1$. Радиусы поверхностей раздела обозначены через r_j , а для радиуса внешней сферы или внешней цилиндрической поверхности также используется обозначение $a = r_N$.

Слои характеризуются частотно-зависимыми относительными комплексными (отмечаются точкой над символами) диэлектрическими (ДП) $\dot{\epsilon}_j = \dot{\epsilon}_j(\omega)$ и магнитными (МП) $\dot{\mu}_j = \dot{\mu}_j(\omega)$ проницаемостями, которые записываются в виде

$$\dot{\epsilon}_j = \epsilon'_j - i\epsilon''_j = |\dot{\epsilon}_j| \exp(-itg\delta_j), \quad \dot{\mu}_j = \mu'_j - i\mu''_j = |\dot{\mu}_j| \exp(-itg\delta_{\mu,j}). \quad (1.1)$$

где $tg\delta_j = \epsilon''_j / \epsilon'_j = \sigma_j / (\omega\epsilon'_j)$ – тангенс угла диэлектрических потерь, $tg\delta_{\mu,j} = \mu''_j / \mu'_j = r_j / (\omega L)$ – тангенс угла магнитных потерь, σ_j – удельная проводимость, r_j – сопротивление, L_j – индуктивность материала j -го слоя.

Величины ε''_j , μ''_j определяют электрические и магнитные потери⁴. Для внешней среды принимаются действительные значения ДП и МП $\varepsilon_{med} = \varepsilon'_{N+1}$, $\mu_{med} = \mu'_{N+1}$. В случае комплексных ДП и МП показатели преломления $\dot{n}_j = \sqrt{\dot{\varepsilon}_j \dot{\mu}_j}$ и волновые числа слоев $\dot{k}_j = k'_j - ik''_j = \dot{n}_j \omega / c$ (c – скорость света) также будут комплексными.

1.2. Глубина проникновения электромагнитного излучения в материал и нахождение электромагнитной энергии

Ввиду наличия потерь ЭМЭ при комплексных значениях ДП, МП и волновых чисел при проникновении ЭМИ в тело человека поле будет затухать. Поэтому практическое значение приобретает оценка возможности получения необходимого для развития гипертермии уровня поля во внутреннем органе. Расстояние Δ_0 , при прохождении которого поле ослабевает в e раз, принято называть глубиной проникновения поля в среду, т.е. имеет место соотношение $\kappa \Delta_0 = 1$, где κ – коэффициент ослабления ЭМИ [37]. Тогда глубина проникновения ЭМИ составит:

- для диэлектриков

$$\Delta_0 = \frac{1}{\kappa} = \frac{1}{\omega} \sqrt{(1/2)\varepsilon'\mu'(\sqrt{1+\text{tg}^2\delta}-1)} \approx \frac{\text{tg}\delta}{2\omega} \sqrt{\varepsilon'\mu'} = \frac{\lambda \text{tg}\delta}{4\pi} \sqrt{\varepsilon'\mu'}, \quad (1.2)$$

- для металлов

$$\Delta_0 = \sqrt{2 / (\omega \mu' \sigma)} = \sqrt{\lambda / (\pi \mu' \sigma)}. \quad (1.3)$$

Формула (1.3) определяет толщину скин-слоя, в котором выделяется 86,5% энергии. Таким образом, глубина проникновения электрического поля определяется характеристиками среды и зависит от частоты, причем, чем выше частота (короче длина волны), тем меньше Δ_0 . Для наночастиц золота или серебра толщина скин-слоя может превосходить размеры частиц, поэтому можно считать, что ЭМП распространяется на весь объем частицы. Для диэлектриков глубина проникновения обычно составляет 2–3 см [37], а для биологических объектов также зависит от типа ткани и расположения органа в организме.

В слоях ЭМП описывается векторами электрической $\tilde{\mathbf{D}}_j = \dot{\mathbf{D}}_j \exp(i\omega t)$ и магнитной $\tilde{\mathbf{B}}_j = \dot{\mathbf{B}}_j \exp(i\omega t)$ индукций, которые при учете поглощения связаны с напряженностями электрического $\tilde{\mathbf{E}}_j = \dot{\mathbf{E}}_j \exp(i\omega t)$ и магнитного $\tilde{\mathbf{H}}_j = \dot{\mathbf{H}}_j \exp(i\omega t)$ полей уравнениями

$$\tilde{\mathbf{D}}_j = \varepsilon_0 \dot{\varepsilon}_j \tilde{\mathbf{E}}_j, \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{D}}_j = \varepsilon_0 \dot{\varepsilon}_j \dot{\mathbf{E}}_j, \quad \dot{\mathbf{B}}_j = \mu_0 \dot{\mu}_j \dot{\mathbf{H}}_j, \quad (1.4)$$

где $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м электрическая и магнитная постоянные (ДП и МП проницаемости вакуума), $\dot{\mathbf{D}}_j$, $\dot{\mathbf{B}}_j$, $\dot{\mathbf{E}}_j$, $\dot{\mathbf{H}}_j$ – комплексные векторные амплитуды.

Величину ЭМЭ, запасённой в некотором объёме V , принято обозначать буквой W , а ее объемную плотность w определять как предел $w = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} (\Delta W / \Delta V)$. В макроскопической теории ЭМП существует связь между векторами поля и его

⁴ В выражениях для комплексных ДП и МП выбор знака «+» или «-» перед мнимой частью зависит от выбора знака в частотной зависимости ЭМИ и имеет энергетическую трактовку.

энергетическими характеристиками [37, 38]. Так, объемная плотность ЭМЭ представляет собой сумму электрической и магнитной энергий, и для j -го слоя можно записать

$$w_j = w_e^{(j)} + w_m^{(j)}, \quad (1.5)$$

где $w_e^{(j)}, w_m^{(j)}$ – объемные плотности энергии электрического и магнитного полей соответственно.

Используя связь между векторами индукций и напряженностей, можно записать

$$w_e^{(j)} = \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{D}}_j \cdot \tilde{\mathbf{E}}_j) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 |\dot{\mathbf{e}}_j| \cdot |\dot{\mathbf{E}}_j|^2 \exp(2i\omega t), \quad w_m^{(j)} = \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{B}}_j \cdot \tilde{\mathbf{H}}_j) = \frac{1}{2} \mu_0 |\dot{\mathbf{h}}_j| \cdot |\dot{\mathbf{H}}_j|^2 \exp(2i\omega t), \quad (1.6)$$

$$w_j = \frac{1}{2} \left[\varepsilon_0 |\dot{\mathbf{e}}_j| \cdot |\dot{\mathbf{E}}_j|^2 + \mu_0 |\dot{\mathbf{h}}_j| \cdot |\dot{\mathbf{H}}_j|^2 \right] \exp(2i\omega t). \quad (1.7)$$

Таким образом, плотность энергии в слоях зависит от модулей комплексных ДП и МП, пространственных координат и изменяется во времени по закону $\exp(2i\omega t)$, т.е. с частотой, вдвое большей, чем частота возбуждающего поля. Энергия ЭМП, запасенная в объеме V_j , вычисляется по формуле

$$W_j = \int_{V_j} w_j dv = \frac{1}{2} \int_{V_j} (\tilde{\mathbf{D}}_j \cdot \tilde{\mathbf{E}}_j + \tilde{\mathbf{B}}_j \cdot \tilde{\mathbf{H}}_j) dv, \quad (1.8)$$

а усредненные за период τ плотности энергии полей

$$\langle w_e^{(j)} \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau w_e^{(j)} dt = \frac{1}{4} \varepsilon_0 |\dot{\mathbf{e}}_j| |\dot{\mathbf{E}}_j|^2, \quad \langle w_m^{(j)} \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau w_m^{(j)} dt = \frac{1}{4} \mu_0 |\dot{\mathbf{h}}_j| |\dot{\mathbf{H}}_j|^2. \quad (1.9)$$

Для немагнитных материалов типа золота или серебра объемные плотности источников $P_e^{(j)}$ могут быть найдены по формулам:

$$P_e^{(j)} = \frac{1}{4\pi} \varepsilon_0 \varepsilon'_j \omega \operatorname{tg} \delta_j |\tilde{\mathbf{E}}_j|^2 = \frac{c}{2\lambda} \varepsilon_0 \varepsilon''_j |\tilde{\mathbf{E}}_j|^2, \quad (1.10)$$

а для чисто магнитных материалов объемные плотности источников $P_m^{(j)}$ равны:

$$P_m^{(j)} = \frac{1}{2} \mu_0 \mu'_j \operatorname{tg} \delta_{\mu,j} \omega |\tilde{\mathbf{H}}_j|^2 = \frac{2\pi c}{\lambda} \mu_0 \mu''_j |\tilde{\mathbf{H}}_j|^2. \quad (1.11)$$

Таким образом, для нахождения энергии в слоях необходимо определить напряженности электрического и магнитного полей с учетом их зависимости от пространственных координат. В общем случае следует учитывать вклад обеих составляющих ЭМЭ, однако для конкретных материалов преобладающими могут оказаться как электрическая, так и магнитная компоненты.

1.3. Векторные волновые уравнения для напряженностей полей

Из полной системы уравнений Максвелла для j -го слоя при отсутствии внутренних источников поля с учетом поглощения в слоях при удельной проводимости $\sigma_j \neq 0$ следуют уравнения

$$\text{rot}\tilde{\mathbf{H}}_j = \sigma_j \tilde{\mathbf{E}}_j + \varepsilon_0 \dot{\varepsilon}_j \frac{\partial \tilde{\mathbf{E}}_j}{\partial t}, \quad \text{rot}\tilde{\mathbf{E}}_j = -\mu_0 \dot{\mu}_j \frac{\partial \tilde{\mathbf{H}}_j}{\partial t}, \quad (1.12)$$

в которых учтено, что токи в слоях $\dot{\mathbf{J}}_j = \sigma_j \dot{\mathbf{E}}_j$.

В соответствии с [44] система (1.12) сводится к векторным уравнениям вида

$$\Delta \tilde{\mathbf{E}}_j = \varepsilon_0 \mu_0 \dot{\varepsilon}_j \dot{\mu}_j \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{E}}_j}{\partial t^2} + \sigma_j \mu_0 \dot{\mu}_j \frac{\partial \tilde{\mathbf{E}}_j}{\partial t}, \quad \Delta \tilde{\mathbf{H}}_j = \varepsilon_0 \mu_0 \dot{\varepsilon}_j \dot{\mu}_j \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{H}}_j}{\partial t^2} + \sigma_j \mu_0 \dot{\mu}_j \frac{\partial \tilde{\mathbf{H}}_j}{\partial t}, \quad (1.12 \text{ a})$$

где под оператором Δ , действующим на векторы, понимается оператор $\Delta = \text{grad div} - \text{rot rot}$ [44]. В случае принятой временной зависимости напряженностей от времени ($\sim \exp(i\omega t)$) будем иметь

$$\text{grad div}\dot{\mathbf{E}}_j - \text{rot rot}\dot{\mathbf{E}}_j + \dot{k}_j^2 \dot{\mathbf{E}}_j = 0, \quad \text{grad div}\dot{\mathbf{E}}_j - \text{rot rot}\dot{\mathbf{E}}_j + \dot{k}_j^2 \dot{\mathbf{E}}_j = 0, \quad (1.13)$$

где $\dot{k}_j^2 = \dot{\varepsilon}_j \dot{\mu}_j k_0^2 - i\sigma_j \mu_0 \dot{\mu}_j \omega$ – квадраты волновых чисел, $k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$ – волновое число вакуума. В дальнейшем точку над комплексными волновыми числами \dot{k}_j опускаем.

Как отмечалось в [44, разд. 7.1], векторные уравнения (1.13) всегда могут быть заменены системами трех скалярных уравнений, но «разрешить эти системы относительно какой-либо из компонент векторов в большинстве случаев оказывается невозможным. Лишь в тех случаях, когда существует возможность разложить векторы напряженностей на три ортогональные компоненты, можно получить три независимых уравнения, а оператор Δ может быть представлен уже как в прямоугольных, так и в криволинейных ортогональных координатах». Именно такие случаи имеют место в случае цилиндрических и сферических координат, и тогда можно записать три независимых скалярных волновых уравнения относительно компонент векторов вида

$$\Delta E_s^{(j)} + \dot{k}_j^2 E_s^{(j)} = 0, \quad \Delta H_s^{(j)} + \dot{k}_j^2 H_s^{(j)} = 0, \quad (1.14)$$

где индекс s принимает значения $s = r, \varphi, z$ для цилиндрических и $s = r, \theta, \varphi$ для сферических координат, а оператор Лапласа в тех же координатах представляется в виде

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right]. \quad (1.15)$$

Дальнейшие шаги состоят в построении решений для уравнений (1.14).

1.4. Цилиндрические радиально-слоистые частицы при воздействии плоских электромагнитных волн

Рассмотрим протяженную вдоль оси z цилиндрическую частицу и используем для расчета приближенную модель бесконечно длинного цилиндра. Предполагается, что на цилиндр падает плоская волна, распространяющаяся в положительном направлении оси x . Ограничимся случаем TM поляризации, когда вектор напряженности в падающей волне $\mathbf{E}^{inc} = \{E_r, E_\varphi, E_z\} = \{0, 0, E_z\}$ имеет одну отличную от

нуля составляющую. Результаты для TE поляризации получаются при использовании принципа двойственности [44]. Для представления полей в слоях используем функции Бесселя целого порядка I-го и II-го рода J_n, Y_n , для падающего поля функции I-го рода J_n , а для рассеянного поля – функции Ханкеля целого порядка II-го рода $H_n^{(2)}$ комплексного аргумента.

Напряженность электрического поля в падающей плоской волне единичной амплитуды представляется в виде суперпозиции цилиндрических волн [38, 42]

$$\mathbf{E}^{inc} = \mathbf{i}_z E_z = \mathbf{i}_z \sum_{n=0}^{\infty} i^{-n} \delta_n J_n(k_0 r) \cos n\varphi, \quad r > a, \quad (1.16)$$

где здесь и далее \mathbf{i}_z – орт оси z , $\delta_0 = 1$ и $\delta_n = 2$ при $n \geq 1$. Поле в окружающем пространстве представляет собой сумму падающего и рассеянного \mathbf{E}^{sca} электрических полей

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{inc} + \mathbf{E}^{sca}, \quad \mathbf{E}^{sca} = \mathbf{i}_z \sum_{n=0}^{\infty} i^{-n} \delta_n c_n H_n^{(2)}(k_0 r) \cos n\varphi, \quad r > a, \quad (1.17)$$

и c_n – неизвестные коэффициенты ряда рассеяния [38].

Решения уравнения (1.14) для j -го слоя ($j > 1$) могут быть записаны в виде

$$\mathbf{E}^{(j)} = \mathbf{i}_z E_z^{(j)} = \mathbf{i}_z \sum_{n=0}^{\infty} i^{-n} \delta_n \left[A_n^{(j)} J_n(k_j r) + B_n^{(j)} Y_n(k_j r) \right] \cos n\varphi, \quad r_{j-1} < r < r_j. \quad (1.18)$$

Для внутреннего цилиндра поле ограничено при $r = 0$, поэтому для $j = 1$ решение (1.17) принимает вид

$$\mathbf{E}^{(1)} = \mathbf{i}_z E_z^{(1)} = \mathbf{i}_z \sum_{n=0}^{\infty} i^{-n} \delta_n A_n^{(1)} J_n(k_1 r) \cos n\varphi, \quad 0 < r < r_1. \quad (1.19)$$

Магнитное поле в слоях может быть выражено через электрическую составляющую с помощью уравнений Максвелла. В частности, для угловой компоненты вектора напряженности магнитного поля имеет место представление

$$H_\varphi^{(j)} = \frac{k_j}{i\omega\mu_j} \sum_{n=0}^{\infty} i^{-n} \delta_n \left[A_n^{(j)} J_n'(k_j r) + B_n^{(j)} Y_n'(k_j r) \right] \cos n\varphi, \quad r_{j-1} < r < r_j, r_0 = 0. \quad (1.20)$$

На поверхностях раздела слоев и внешней поверхности должны выполняться условия непрерывности тангенциальных составляющих $E_z^{(j)}$, $H_\varphi^{(j)}$ векторов напряженностей полей:

$$E_z^{(j+1)} \Big|_{r=r_j} = E_z^{(j)} \Big|_{r=r_j}, \quad H_\varphi^{(j+1)} \Big|_{r=r_j} = H_\varphi^{(j)} \Big|_{r=r_j}, \quad 1 < j < N-1, \quad (1.21)$$

$$E_z^{(N)} \Big|_{r=r_N} = E_z^{ins} \Big|_{r=r_N} + E_z^{sca} \Big|_{r=r_N}, \quad H_\varphi^{(N)} \Big|_{r=r_N} = H_\varphi^{ins} \Big|_{r=r_N} + H_\varphi^{sca} \Big|_{r=r_N}. \quad (1.22)$$

Подстановка представлений решений (1.17)–(1.19) в условия (1.20), (1.21) приводит для каждого n к семейству независимых систем линейных алгебраических уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов разложений в рядах

$$\begin{aligned}
& A_n^{(2)} J_n(k_2 r_1) + B_n^{(2)} Y_n(k_2 r_1) = A_n^{(1)} J_n(k_1 r_1), \\
& A_n^{(j+1)} J_n(k_{j+1} r_j) + B_n^{(j+1)} Y_n(k_{j+1} r_j) = A_n^{(j)} J_n(k_j r_j) + B_n^{(j)} Y_n(k_j r_j), \quad j = 2, 3, \dots, N-1, \\
& J_n(k_0 r_N) + c_n H_n^{(2)}(k_0 r_N) = A_n^{(N)} J_n(k_N r_N) + B_n^{(N)} Y_n(k_N r_N), \\
& (k_2 / \mu_2) \left[A_n^{(2)} J'_n(k_2 r_1) + B_n^{(2)'} Y'_n(k_2 r_1) \right] = (k_1 / \mu_1) A_n^{(1)} J'_n(k_1 r_1), \\
& (k_{j+1} / \mu_{j+1}) \left[A_n^{(j+1)} J'_n(k_{j+1} r_j) + B_n^{(j+1)'} Y'_n(k_{j+1} r_j) \right] = (k_j / \mu_j) \left[A_n^{(j)} J'_n(k_j r_j) + B_n^{(j)'} Y'_n(k_j r_j) \right], \\
& (k_0 / \mu_{N+1}) \left[J'_n(k_0 r_N) + c_n H_n^{(2)'}(k_0 r_N) \right] = (k_N / \mu_N) \left[A_n^{(N)} J'_n(k_N r_N) + B_n^{(N)'} Y'_n(k_N r_N) \right]. \quad (1.23)
\end{aligned}$$

Для решения задачи применяется МТМ, который позволяет переносить граничные условия со слоя на слой. Тогда при использовании трансляционных матриц остается только два семейства неизвестных постоянных $A_n^{(1)}$, c_n , $n = 0, 1, \dots$, которые определяют поле в слоях и вне цилиндра. Система линейных алгебраических уравнений для нахождения неизвестных постоянных аналогична соответствующей системе для сплошного цилиндра [38] и в развернутом виде имеет вид

$$\begin{aligned}
& \left[t_{11}^{(n)} J_n(k_N a) + t_{21}^{(n)} Y_n(k_N a) \right] A_n^{(1)} - H_n(k_0 a) c_n = J_0(k_0 a), \\
& (k_N / \mu_N) \left[t_{11}^{(n)} J'_n(k_N a) + t_{21}^{(n)} Y'_n(k_N a) \right] A_n^{(1)} - (k_0 / \mu_{N+1}) H'_n(k_0 a) c_n = (k_0 / \mu_{N+1}) J'_0(k_0 a), \quad (1.24)
\end{aligned}$$

где $t_{11}^{(n)}$, $t_{21}^{(n)}$ элементы трансляционных матриц (для каждого n) при переходе от первого к N -му слою

$$T_n(r_N, r_1) = \prod_{j=1}^{N-1} T_n^{(N-j)}. \quad (1.25)$$

В формуле (1.24) элементы матриц перехода $T_n^{(j)}$ от j -го к $(j+1)$ -му слою для цилиндра в соответствии с (1.23) имеют вид

$$\begin{aligned}
& t_{11,j}^{(n)} = \mu_j k_{j+1} J_n(k_j r_j) Y'_n(k_{j+1} r_j) - \mu_{j+1} k_j J'_n(k_j r_j) Y_n(k_{j+1} r_j), \\
& t_{21,j}^{(n)} = \mu_j k_{j+1} J_n(k_{j+1} r_j) J Y_n(k_j r_j) - \mu_j k_{j+1} J'_n(k_{j+1} r_j) J_n(k_j r_j), \\
& t_{12,j}^{(n)} = \mu_j k_{j+1} Y_n(k_j r_j) Y'_n(k_{j+1} r_j) - \mu_{j+1} k_j Y J'_n(k_j r_j) Y_n(k_{j+1} r_j), \\
& t_{22,j}^{(n)} = \mu_{j+1} k_j Y'_n(k_j r_j) J_n(k_{j+1} r_j) - \mu_j k_{j+1} Y_n(k_j r_j) J'_n(k_{j+1} r_j). \quad (1.26)
\end{aligned}$$

Из системы (1.24) находим

$$A_n^{(1)} = \Delta_1^{(n)} / \Delta^{(n)}, \quad c_n = \Delta_2^{(n)} / \Delta^{(n)}, \quad (1.27)$$

где определители $\Delta_1^{(n)}$, $\Delta_2^{(n)}$, $\Delta^{(n)}$ задаются формулами

$$\begin{aligned}
& \Delta^{(n)} = (k_N / \mu_N) H_n(k_0 a) \left[t_{11}^{(n)} J'_n(k_N a) + t_{21}^{(n)} Y'_n(k_N a) \right] - (k_0 / \mu_{N+1}) H'_n(k_0 a) \left[t_{11}^{(n)} J_n(k_N a) + t_{21}^{(n)} Y_n(k_N a) \right], \\
& \Delta_1^{(n)} = (k_0 / \mu_{N+1}) J'_0(k_0 a) H_n(k_0 a) - (k_0 / \mu_{N+1}) J_0(k_0 a) H'_n(k_0 a), \\
& \Delta_2^{(n)} = (k_0 / \mu_{N+1}) J'_0(k_0 a) \left[t_{11}^{(n)} J_n(k_N a) + t_{21}^{(n)} Y_n(k_N a) \right] - (k_N / \mu_N) J_0(k_0 a) \left[t_{11}^{(n)} J'_n(k_N a) + t_{21}^{(n)} Y'_n(k_N a) \right].
\end{aligned}$$

Теперь для разложений напряженностей электрических полей во внутреннем цилиндре и в окружающей среде можно записать

$$\mathbf{E}^{(1)} = \mathbf{i}_z \mathbf{E}_z^{(1)} = \mathbf{i}_z \sum_{n=0}^{\infty} i^{-n} \delta_n \left[\Delta_1^{(n)} / \Delta^{(n)} \right] J_n(k_1 r) \cos n\varphi, \quad 0 < r < r_1, \quad (1.28)$$

$$\mathbf{E}^{sca} = \mathbf{i}_z \sum_{n=0}^{\infty} i^{-n} \delta_n \left[\Delta_2^{(n)} / \Delta^{(n)} \right] H_n^{(2)}(k_0 r) \cos n\varphi, \quad r > a. \quad (1.29)$$

При этом постоянные $A_n^{(j)}, B_n^{(j)}$ для каждого члена соответствующих разложений выражаются через единственную постоянную $A_n^{(1)}$ с помощью трансляционных матриц $T_n^{(j)}(r_1, r_j)$ перехода от 1-го к j -му слою, и тогда будем иметь

$$\mathbf{E}^{(j)} = \mathbf{i}_z E_z^{(j)} = \mathbf{i}_z \sum_{n=0}^{\infty} i^{-n} \delta_n \left(\Delta_1^{(n)} / \Delta^{(n)} \right) \left[t_{11,j}^{(n)} J_n(k_j r) + t_{21,j}^{(n)} Y_n(k_j r) \right] \cos n\varphi, \quad r_{j-1} < r < r_j. \quad (1.30)$$

На практике удобнее использовать рекурсивные формулы, как это сделано в [42]

$$\gamma_n^{(j+1)} = T_n^{(j)} \gamma_n^{(j)}. \quad (1.31)$$

Остается подставить найденные ряды в соответствующие формулы для нахождения интенсивности внутренних источников. В общем случае для вычисления квадратов модулей напряженностей необходимо возводить ряды (1.20)–(1.24) в квадрат. Вместе с тем, для электрически тонких слоев формулы существенно упрощаются.

Далее считается, что центральный цилиндр и последующие слои электрически тонкие. Это означает [38, 42] выполнение сильных неравенств $|k_1 r_1| \ll 1, |k_2 r_2| \ll 1, \dots, |k_N r_N| \ll 1, k_0 r_j \ll 1$. При этом, с учетом результатов, полученных в [42], достаточно ограничиться рассмотрением только нулевой гармоник, т.е. случая $n=0$ и воспользоваться разложениями функций Бесселя $J_0(z), Y_0(z), H_0^{(2)}(z) = J_0(z) - iY_0(z)$ в ряды при малых значениях аргумента. С точностью до бесконечно малых высшего порядка для цилиндрических функций и их производных имеют место представления [43]:

$$\begin{aligned} J_0(z) &= 1 - z^2/4, & Y_0(z) &= (2/\pi) \{ [\ln(z/2) + \gamma] (1 - z^2/4) + z^2/4 \}, \\ H_0^{(2)} &= 1 - z^2/4 - i(2/\pi) \{ [\ln(z/2) + \gamma] (1 - z^2/4) + z^2/4 \} \\ J'_0(z) &= -z/2, & Y'_0(z) &= (2/\pi) \{ (1/z) + z/4 - [\ln(z/2) + \gamma] (z/2) \}, \\ Y'_0(z) &= (2/\pi) \{ (1/z) + z/4 - [\ln(z/2) + \gamma] (z/2) \}, \\ (H_0^{(2)}(z))' &= -z/2 - i(2/\pi) \{ (1/z) + z/4 - [\ln(z/2) + \gamma] (z/2) \}, \end{aligned} \quad (1.32)$$

где константа $\gamma = 0,5772156649\dots$ [43].

В этом случае элементы матриц перехода (1.25) $T_j^{(0)}$ и определители (1.27) принимают вид

$$\begin{aligned} t_{11,j}^{(0)} &= 2\mu_0 / (\pi r_j), & t_{21,j}^{(0)} &= 0,5k_0^2 \mu_0 r_j (\dot{\epsilon}_{j+1} - \dot{\epsilon}_j), \\ t_{12,j}^{(0)} &= [(2\mu_0) / (\pi^2 r_j)] \ln(\dot{\epsilon}_j / \dot{\epsilon}_{j+1}), & t_{22,j}^{(0)} &= 2\mu_0 / (\pi r_j), \end{aligned} \quad (1.33)$$

$$\Delta^{(0)} = \alpha_{11} \alpha_{22} - \alpha_{12} \alpha_{21}, \quad \Delta_1^{(0)} = b_1 \alpha_{22} - b_2 \alpha_{21}, \quad \Delta_2^{(0)} = b_2 \alpha_{11} - b_1 \alpha_{21}, \quad (1.34)$$

где

$$\begin{aligned}
\alpha_{11} &= \left\{ t_{11}^{(0)} \left[1 - (k_N a)^2 / 4 \right] + \left[2t_{21}^{(0)} / \pi \right] \left[\left(\ln(k_N a / 2) + \gamma \right) \left(1 - (k_N a)^2 / 4 \right) + (k_N a)^2 / 4 \right] \right\}, \\
\alpha_{12} &= \left[1 - (k_0 a)^2 / 4 \right] - i(2 / \pi) \left\{ \left[\ln(k_0 a / 2) + \gamma \right] \left[1 - (k_0 a)^2 / 4 \right] + (k_N a)^2 / 4 \right\}, \\
\alpha_{21} &= (k_N \mu_{N+1}) \left\{ \left[-t_{11}^{(0)} k_N a / 2 \right] + t_{21}^{(0)} (2 / \pi) \left\{ 1 / (k_N a) + k_N a / 2 \right\} - \left[\ln(k_N a / 2) + \gamma \right] k_N a / 2 \right\}, \\
\dot{\varepsilon}_{N+1} = \varepsilon_{N+1} \alpha_{22} &= (k_0 \dot{\mu}_N) \left\{ -k_0 a / 2 - i(2 / \pi) \left[1 / (k_0 a) + k_0 a / 4 - (k_0 a / 2) \left(\ln(k_0 a / 2) + \gamma \right) \right] \right\}, \\
\dot{\varepsilon}_{N+1} = \varepsilon_{N+1}, \quad b_1 &= 1 - (k_0 a)^2 / 4, \quad b_2 = -(k_0 k_N \mu_N a) / 2. \tag{1.35}
\end{aligned}$$

Тогда выражения для сечения рассеяния (1.26) и напряженностей в слоях (1.20)–(1.24) принимают вид

$$\sigma_s = (4 / k_0) \left| \left[\Delta_2^{(0)} / \Delta^{(0)} \right]^2 \right|, \tag{1.36}$$

$$\mathbf{E}^{(1)} = \mathbf{i}_z \mathbf{E}_z^{(1)} = \mathbf{i}_z \Delta_1^{(0)} / \Delta^{(0)}, \quad 0 < r < r_1, \tag{1.37}$$

$$\mathbf{E}^{(j)} = \mathbf{i}_z E_z^{(j)} = \mathbf{i}_z \left[\Delta_1^{(0)} / \Delta^{(0)} \right] \left[t_{11,j}^{(0)} + t_{21,j}^{(0)} (2 / \pi) \ln(k_j r) \right], \quad r_{j-1} < r < r_j, \tag{1.38}$$

$$\mathbf{H}^{(1)} = 0, \quad 0 < r < r_1, \quad \mathbf{H}^{(j)} = \mathbf{i}_\varphi H_\varphi^{(j)} = \mathbf{i}_\varphi \frac{2}{\pi \mu_0 \dot{\mu}_j \omega} \left[\Delta_1^{(0)} / \Delta^{(0)} \right] t_{21,j}^{(0)} \ln(k_j r), \quad r_{j-1} < r < r_j. \tag{1.39}$$

В свою очередь плотности ЭМЭ в слоях и объемная плотность тепловых источников будут равны

$$w_e^{(1)} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 |\dot{\varepsilon}_1| \cdot \left| \Delta_1^{(0)} / \Delta^{(0)} \right|^2, \quad w_e^{(j)} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 |\varepsilon_j| \cdot \left| \left[\Delta_1^{(0)} / \Delta^{(0)} \right] \left[t_{11,j}^{(0)} + t_{21,j}^{(0)} (2 / \pi) \ln(\pi k_j r) \right] \right|^2, \tag{1.40}$$

$$w_m^{(j)} = \frac{1}{2 \mu_0 |\dot{\mu}_j| \omega} \cdot \left| \left[\Delta_1^{(0)} / \Delta^{(0)} \right] t_{21,j}^{(0)} (2 / \pi) \ln(\pi k_j r) \right|^2, \tag{1.41}$$

$$q^{(1)} = \left| \Delta_1^{(0)} / \Delta^{(0)} \right|^2 \omega^2 \varepsilon' \operatorname{tg} \delta, \tag{1.42}$$

$$q^{(j)} = \left| \left[\Delta_1^{(0)} / \Delta^{(0)} \right] \left[t_{11,j}^{(0)} + t_{21,j}^{(0)} (2 / \pi) \ln(\pi k_j r) \right] \right|^2 \omega^2 \varepsilon' \operatorname{tg} \delta. \tag{1.43}$$

1. Взаимодействие электромагнитных волн со сферическими радиально-слоистыми частицами

Возможно, наиболее важной и исследованной из задач взаимодействия ЭМВ с малыми частицами является задача о шаре с произвольным радиусом и известными показателями преломления шара и среды. Для ее решения могут быть использованы различные аналитические методы, каждый из которых имеет определенные преимущества при обобщении результатов на слоистые, анизотропные, слоисто-неоднородные с непрерывным изменением ДП шара и сферические частицы с поверхностными зарядами. Из известных методов решения выделим три: метод Стреттона [44, 45] метод потенциалов Дебая [46, 47] и метод Т-матриц [48, 49]. Все они приводят к тому же самому результату, который принято называть решением Ми [45].

Обобщение решения Ми на двухслойный шар получено в [45–47, 50], а в [47] приведено аналитическое решение для трехслойного шара. Радиально-неоднородные шары с произвольным числом слоев рассмотрены в статьях [51–53] и работах автора [54–61], в которых используется метод потенциалов Дебая, а решение задачи получено с применением трансляционных матриц. Эти решения дают выражения для нахождения

коэффициентов ряда рассеяния, после чего становится возможным нахождение поглощения, экстинкции, рассеяния и др. Однако в этих работах отсутствуют выражения для ЭМЭ. Необходимые для этого расчетные формулы в электростатическом приближении получены автором в [61]. В настоящем разделе в отличие от метода, использованного для слоистого цилиндра, решения уравнений Максвелла строятся с использованием потенциалов Дебая [44, 45].

Введем сферическую систему координат r, φ, θ , связанную с центром шара. Будем обозначать электрические потенциалы в слоях через U_j , магнитные через V_j . В соответствии с известными результатами [44, 45] потенциалы U_0, V_0 падающей волны (для постоянного поля), распространяющейся вдоль оси z , можно представить в виде следующих рядов:

$$U_0 = \frac{1}{rk_N^2} \sum_{l=1}^{\infty} i^{l-1} \frac{2l+1}{l(l+1)} \Psi_l(k_{N+1}r) P_l(\cos \theta) \sin \varphi, \quad (1.44)$$

$$V_0 = \frac{\sqrt{\varepsilon_{N+1}}}{rk_N^2} \sum_{l=1}^{\infty} i^{l-1} \frac{2l+1}{l(l+1)} \Psi_l(k_{N+1}r) P_l(\cos \theta) \sin \varphi. \quad (1.45)$$

Потенциалы рассеянной волны и волн, распространяющихся в слоях шара, должны иметь по координатам φ, θ такое же представление, как и для падающей волны. В центральном шаре с учетом ограниченности решений при $r \rightarrow 0$ будет

$$U_1 = \frac{1}{rk_1^2} \sum_{l=1}^{\infty} B_l^{(1)} \Psi_l(k_1r) P_l(\cos \theta) \cos \varphi, \quad 0 < r < r_1, \quad (1.46)$$

$$V_1 = \frac{\sqrt{\varepsilon_{N+1}}}{rk_1^2} \sum_{l=1}^{\infty} D_l^{(1)} \Psi_l(k_1r) P_l(\cos \theta) \sin \varphi, \quad 0 < r < r_1. \quad (1.47)$$

В j -м сферическом слое ($j = 2, 3, \dots, N$) разложения для потенциалов имеют вид

$$U_j = \frac{1}{rk_j^2} \sum_{l=1}^{\infty} \left[A_l^{(j)} \zeta_l(k_jr) + B_l^{(j)} \Psi_l(k_jr) \right] P_l(\cos \theta) \cos \varphi, \quad r_{j-1} < r < r_j, \quad (1.48)$$

$$V_j = \frac{\sqrt{\varepsilon_j}}{rk_j^2} \sum_{l=1}^{\infty} \left[C_l^{(j)} \zeta_l(k_jr) + D_l^{(j)} \Psi_l(k_jr) \right] P_l(\cos \theta) \sin \varphi, \quad r_{j-1} < r < r_j. \quad (1.49)$$

В области вне шара распространяются падающая и рассеянная волны, и потенциалы последней записываются в виде

$$U_{N+1} = \frac{1}{rk_{N+1}^2} \sum_{l=1}^{\infty} \left[A_l^{(N+1)} \zeta_l(k_{N+1}r) + B_l^{(N+1)} \Psi_l(k_{N+1}r) \right] P_l(\cos \theta) \cos \varphi, \quad r_N < r < \infty, \quad (1.50)$$

$$V_{N+1} = \frac{\sqrt{\varepsilon_{N+1}}}{rk_{N+1}^2} \sum_{l=1}^{\infty} \left[C_l^{(N+1)} \zeta_l(k_{N+1}r) + i^{l-1} \frac{2l+1}{l(l+1)} \Psi_l(k_{N+1}r) \right] P_l(\cos \theta) \sin \varphi, \quad r_N < r < \infty. \quad (1.51)$$

В формулах (1.46)–(1.53) $\Psi_l(z)$, $\zeta_l(z)$ – функции Риккати-Бесселя и Риккати-Ханкеля I-го рода, $P_l(\cos \theta)$ – полиномы Лежандра, $A_l^{(j)}, B_l^{(j)}, C_l^{(j)}, D_l^{(j)}$ –

коэффициенты, подлежащие определению. При этом $A_l^{(1)} = 0$, $C_l^{(1)} = 0$, $B_l^{(N+1)} = 0$, $D_l^{(N+1)} = 0$.

На поверхности шара и поверхностях раздела слоев r_j ($j = 1, 2, \dots, N$) должны выполняться условия сопряжения

$$\dot{\epsilon}_{j+1} [r_j U_{j+1}] = \dot{\epsilon}_j [r_j U_j], \quad \frac{\partial}{\partial r} [r U_{j+1}] \Big|_{r=r_j} = \frac{\partial}{\partial r} [r U_j] \Big|_{r=r_j}, \quad (1.52)$$

$$\dot{\mu}_{j+1} [r_j V_{j+1}] = \dot{\mu}_j [r_j V_j], \quad \frac{\partial}{\partial r} [r V_{j+1}] \Big|_{r=r_j} = \frac{\partial}{\partial r} [r V_j] \Big|_{r=r_j}. \quad (1.53)$$

Задача состоит в определении $4N+4$ произвольных постоянных, входящих в разложения потенциалов, для которых из условий (1.52), (1.53) имеем столько же линейных уравнений. Решения задач для электрической и магнитной составляющих поля полностью аналогичны.

Рассмотрим электрическое поле. Элементы матриц перехода $T_l^{(j)}$ от j -го к $(j+1)$ -му слою для шара имеют вид [62]

$$t_{11,j}^{(l)} = \frac{1}{\sqrt{\dot{\epsilon}_{j+1}}} \zeta_l(k_j r_j) \Psi_l'(k_{j+1} r_j) + \Psi_l(k_j r_j) \Psi_l(k_{j+1} r_j), \quad (1.54)$$

$$t_{12,j}^{(l)} = \frac{1}{\sqrt{\dot{\epsilon}_{j+1}}} \zeta_l(k_j r_j) \zeta_l'(k_{j+1} r_j) + \Psi_l(k_j r_j) \zeta_l(k_{j+1} r_j), \quad (1.55)$$

$$t_{21,j}^{(l)} = \frac{1}{\sqrt{\dot{\epsilon}_{j+1} \dot{\epsilon}_j}} \zeta_l'(k_j r_j) \Psi_l'(k_{j+1} r_j) + \frac{1}{\sqrt{\dot{\epsilon}_j}} \Psi_l'(k_j r_j) \Psi_l(k_{j+1} r_j), \quad (1.56)$$

$$t_{22,j}^{(l)} = \frac{1}{\sqrt{\dot{\epsilon}_{j+1} \dot{\epsilon}_j}} \zeta_l'(k_j r_j) \zeta_l'(k_{j+1} r_j) + \frac{1}{\sqrt{\dot{\epsilon}_j}} \Psi_l'(k_j r_j) \zeta_l(k_{j+1} r_j). \quad (1.57)$$

Трансляционные матрицы $T_l(r_N, r_1)$ определяются по формулам (1.24) при замене индекса n на l . На поверхности шара при $r = r_N = a$ будем иметь неоднородную линейную систему уравнений второго порядка относительно двух (для каждого значения индекса слоя l) постоянных $B_l^{(1)}$, $A_l^{(N+1)}$

$$\begin{aligned} \left[t_{12}^{(l)} \zeta_l(k_N r_N) + t_{22}^{(l)} \Psi_l(k_N r_N) \right] B_l^{(1)} - \zeta_l(k_{N+1} r_N) A_l^{(N+1)} &= i^{l-1} \frac{2l+1}{l(l+1)} \Psi_l(k_{N+1} r_N), \\ \frac{1}{\sqrt{\dot{\epsilon}_N}} \left[t_{12}^{(l)} \zeta_l'(k_N r_N) + t_{22}^{(l)} \Psi_l'(k_N r_N) \right] B_l^{(1)} - \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{N+1}}} \zeta_l'(k_{N+1} r_N) A_l^{(N+1)} &= \\ \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{N+1}}} i^{l-1} \frac{2l+1}{l(l+1)} \Psi_l'^N(k_{N+1} r_N), & \end{aligned} \quad (1.58)$$

где $t_{12}^{(l)}$, $t_{22}^{(l)}$ – соответствующие элементы трансляционных матриц $T_l(r_N, r_1)$. Из системы (1.58) находим

$$B_l^{(1)} = \Delta_1^{(l)} / \Delta_l, \quad A_l^{(N+1)} = \Delta_2^{(l)} / \Delta_l, \quad (1.59)$$

где

$$\Delta_1^{(l)} = i^{l-1} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{N+1}}} \frac{2l+1}{l(l+1)} \left[\Psi_l'^N(k_{N+1}r_N) \zeta_l(k_{N+1}r_N) - \zeta_l'(k_{N+1}r_N) \Psi_l(k_{N+1}r_N) \right],$$

$$\Delta_2^{(l)} = \frac{i^{l-1}}{\sqrt{\varepsilon_{N+1}}} \frac{2l+1}{l(l+1)} \left\{ \Psi_l(k_{N+1}r_N) \sqrt{\varepsilon_{N+1} / \dot{\varepsilon}_N} \left[t_{12}^{(l)} \zeta_l'(k_N r_N) + t_{22} \Psi_l'(k_N r_N) \right] + \right. \\ \left. + \Psi_l'^N(k_{N+1}r_N) \left[t_{12} \zeta_l(k_N r_N) + t_{22}^{(l)} \Psi_l(k_N r_N) \right] \right\},$$

$$\Delta_l = \left\{ \begin{aligned} & \left(1 / \sqrt{\dot{\varepsilon}_N} \right) \left[t_{12}^{(l)} \zeta_l'(k_N r_N) + t_{22}^{(l)} \Psi_l'(k_N r_N) \right] \zeta_l(k_{N+1}r_N) - \\ & - \left(1 / \sqrt{\varepsilon_{N+1}} \right) \left[t_{12}^{(l)} \zeta_l(k_N r_N) + t_{22}^{(l)} \Psi_l(k_N r_N) \right] \zeta_l'(k_{N+1}r_N) \end{aligned} \right\}.$$

Коэффициенты $A_l^{(N+1)}$ определяют амплитуды парциальных рассеянных волн, а коэффициенты $B_l^{(1)}$ используются при вычислении потенциалов в слоях.

Решение задачи для магнитного потенциала полностью аналогично. Соответствующие матрицы перехода $Q_l^{(j)}$ и трансляционные матрицы $Q_l(r_N, r_1)$ приведены в [62]. Коэффициенты $D_l^{(1)}$, $C_l^{(N+1)}$ находятся из системы, аналогичной системе (1.58). В сферических координатах в общем случае напряженности электрического $\mathbf{E}(r, \theta, \varphi, t)$ и магнитного $\mathbf{H}(r, \theta, \varphi, t)$ полей связаны с потенциалами $U = U(r, \theta, \varphi, t)$, $V = V(r, \theta, \varphi, t)$ соотношениями

$$\mathbf{E}(r, \theta, \varphi, t) = \text{grad}U(r, \theta, \varphi, t) = \frac{\partial U}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta, \quad (1.60)$$

$$\mathbf{H}(r, \theta, \varphi, t) = \text{grad}V(r, \theta, \varphi, t) = \frac{\partial V}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta, \quad (1.61)$$

где $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_\theta$ – орты сферической системы координат.

Находим выражения частных производных потенциалов в слоях для общего случая их разложений в ряды по сферическим гармоникам:

$$\frac{\partial}{\partial r} U_j(r, \theta, \varphi, t) = \frac{1}{rk_j^2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} A_{lm}^{(1)} k_j \left[t_{11,1j}^{(lm)} \zeta_l'(k_j r) + t_{21,1j}^{(lm)} \Psi_l'(k_j r) \right] P_{lm}(\cos \theta) (\cos m\varphi + \sin m\varphi), \quad (1.62)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} U_j(r, \theta, \varphi, t) = \frac{1}{rk_j^2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} A_{lm}^{(1)} k_j \left[t_{11,1j}^{(lm)} \zeta_l(k_j r) + t_{21,1j}^{(lm)} \Psi_l(k_j r) \right] \left[-P_{lm}'(\cos \theta) (\cos m\varphi + \sin m\varphi) \sin \theta \right], \quad (1.63)$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} U_j(r, \theta, \varphi, t) = \frac{1}{rk_j^2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} A_{lm}^{(1)} k_j \left[t_{11,1j}^{(lm)} \zeta_l(k_j r) + t_{21,1j}^{(lm)} \Psi_l(k_j r) \right] \left[m P_{lm}(\cos \theta) (-\sin m\varphi + \cos m\varphi) \right]. \quad (1.64)$$

Для нахождения мощности тепловых источников необходимо подставить найденные ряды в формулы для напряженностей полей, возвести полученные выражения в квадрат и выполнить необходимые преобразования. Эти выражения достаточно гомоздки и здесь не приводятся.

2. ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

Лазерное излучение с успехом используется в научных исследованиях и различных областях техники. Его уникальные свойства, такие как монохроматичность, когерентность, малое пространственное расхождение пучка и возможность при фокусировке получать чрезвычайно высокую плотность энергии обеспечивают широкое применение лазеров. Основной эффект взаимодействия лазерного излучения с

твердым телом состоит в его пространственно-неоднородном нагреве. Этот раздел продолжает исследования, начатые в работах [63–70]. В них рассматривались температурные поля, создаваемые системой источников или интерференционной картиной, возникающей при использовании системы источников. В обоих случаях получаем одномерную или двумерную периодические задачи для параболического уравнения теплопроводности [71, 72]. Дополнительно в [70] учтена конечная скорость распространения тепла. Для изотропных тел закон, обобщающий классический закон Фурье, предложил А.В. Лыков [71] как гипотезу о конечных скоростях распространения тепла и массы для тепло- и влагопереноса в капиллярно-пористых телах, т.е. телах, содержащие большое количество пустот, характерный размер которых весьма мал по сравнению с характерным размером тела. Использование этого уравнения представляется естественным при действии короткодействующих импульсов лазерного излучения (время действия импульсов 10^{-15} - 10^{-12} с), когда тепловая энергия не успевает распространиться на значительное расстояние от зоны активного действия лазерного луча.

В предыдущих разделах приведены расчетные формулы для нахождения ЭМЭ в слоистых цилиндрических и сферических частицах и потерь энергии, определяющих их нагрев. В общем случае, как и внешнее ЭМП, энергия будет гармонически изменяться во времени, однако с практической точки зрения больший интерес представляет окончательный результат нагрева. С этой целью естественно использовать величины, усредненные за период, и использовать средние значения мощности внутренних источников. Формально это означает сведение нестационарных уравнений теплопроводности к уравнениям Пуассона. Таким образом, дифференциальные уравнения для каждого слоя будут неоднородными и реализация МТМ для слоистых объектов в этом случае будет связана с некоторыми особенностями.

2.1. Построение трансляционных матриц для неоднородных уравнений

Рассмотрим слоистый цилиндр или шар в криволинейных ортогональных координатах α, β, γ (цилиндрических r, φ, z или сферических r, φ, θ), где α, β – гауссовы координаты в срединных поверхностях слоев, а $\gamma(r)$ – координата, направленная по нормали к граничной поверхности первого слоя. Задача рассматривается в линейной постановке. Поверхности $\gamma_j = \text{const}$ ($j = 1, 2, \dots, N$) задают поверхности, разделяющие слои трехмерного N -слоистого объекта. Каждый слой характеризуется своим набором физических характеристик, а физические поля в каждом из них описываются системами дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\mathfrak{M}_j u_j = f_j, \quad j = 1, 2, \dots, N-1, \quad (2.1)$$

где \mathfrak{M}_j – матричный дифференциальный оператор, квадратная матрица которого имеет размерность $k \times k$, $k = 2$ или $k = 3$; $u_j = u_j(\alpha, \beta, \gamma)$, $f_j = f_j(\alpha, \beta, \gamma)$ – k -мерные векторные функции.

Операторы \mathfrak{M}_j однотипны и отличаются друг от друга только коэффициентами уравнений, которые зависят от физико-механических характеристик слоев. Предполагается, что системы (2.1) допускают разделение переменных. Зададим полную систему ортогональных функций $\Phi_{mn}^{(j)}(\alpha, \beta)$, которые на границах $\alpha = \alpha_1$, $\alpha = \alpha_2$, $\beta = \beta_1$, $\beta = \beta_2$ удовлетворяют определенным граничным условиям. Такую систему можно

построить, например, решив соответствующую задачу Штурма-Лиувилля [72, 82–84].
Неизвестные функции, правые части и граничные условия представим в виде рядов

$$u_j = \sum_{m,n=1}^{\infty} U_{mn}^{(j)}(\gamma) \Phi_{mn}^{(j)}(\alpha, \beta), \quad f_j = \sum_{m,n=1}^{\infty} f_{mn}^{(j)}(\gamma) \Phi_{mn}^{(j)}(\alpha, \beta), \quad (2.2)$$

где $f_{mn}^{(j)}(\gamma)$ – известные коэффициенты разложений функций внутренних источников.

Будем считать, что решение однородной системы уравнений $\mathfrak{A}_j(\gamma)$, полученное при определенных граничных условиях для слоистого тела, построено. Остается для каждого j найти решение неоднородной системы

$$\mathfrak{A}_{mn}^{(j)} U_{mn}^{(j)}(\gamma) = f_{mn}^{(j)}(\gamma), \quad j = 1, 2, \dots, N; \quad m, n = 0, 1, \dots, \infty, \quad (2.3)$$

Это можно сделать различными способами, например, методом вариации произвольных постоянных для каждого слоя или с использованием матриц Грина [72, 82–84]. Возможно и другое представление решений [72]. Например, альтернативный подход состоит в использовании метода конечных интегральных преобразований, который на примере задач теплопроводности для слоистых тел канонической формы изложен в [73].

Для каждого слоя общее решение системы (2.3) есть сумма общего $S_{mn}^{(j)}(\gamma) \xi_{mn}^{(j)}$, где $S_{mn}^{(j)}(\gamma)$ – матрица фундаментальных решений, $\xi_{mn}^{(j)}$ – вектор произвольных постоянных, и частного $v_{lm}^{(j)}(\gamma)$ решений. Решения неоднородных уравнений (2.1) запишутся в виде

$$U_{mn}^{(j)}(\gamma) = S_{mn}^{(j)}(\gamma) \xi_{mn}^{(j)} + v_{lm}^{(j)}(\gamma). \quad (2.4)$$

Следует иметь в виду, что в равенстве (2.4) $\xi_{mn}^{(j)}, v_{lm}^{(j)}(\gamma)$ – это векторы размерности k . Как и для однородных систем, рассматриваем матрицы фундаментальных решений $S_{mn,0,j}(\gamma)$, $\gamma_{j-1} < \gamma < \gamma_j$, $S_{mn,1,j}(\gamma)$, $\gamma_j < \gamma < \gamma_{j+1}$ для однородных уравнений и вводим числовые матрицы

$$S_{mn,j}^0 = S_{mn,0,j}(\gamma_j), \quad S_{mn,j}^1 = S_{mn,1,j}(\gamma_j), \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (2.5)$$

Условия сопряжения в данном случае принимают вид

$$S_{mn,j}^0 \xi_{mn}^{(j)} + v_{lm}^{(j)}(\gamma_j) = S_{mn,j}^1 \xi_{mn}^{(j+1)} + v_{lm}^{(j+1)}(\gamma_j), \quad j = 1, 2, \dots, N-1. \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \xi_{mn}^{(j+1)} &= \left[S_{mn,j}^1 \right]^{-1} S_{mn,j}^0 \xi_{mn}^{(j)} + \left[S_{mn,j}^1 \right]^{-1} \left[v_{lm}^{(j)}(\gamma_j) - v_{lm}^{(j+1)}(\gamma_j) \right] = \\ &= T_{mn}^{(j)} \xi_{mn}^{(j)} + \left[S_{mn,j}^{(1)} \right]^{-1} \left[v_{lm}^{(j)}(\gamma_j) - v_{lm}^{(j+1)}(\gamma_j) \right], \end{aligned} \quad (2.7)$$

в которых матрицы $T_{mn}^{(j)}$ связывают произвольные постоянные в представлении решений при переходе через j -ю поверхность раздела в граничащих слоях

$$T_{mn}^{(j)} = \left[S_{mn,j}^1 \right]^{-1} S_{mn,j}^0, \quad T_{mn}^{(j)} = \begin{bmatrix} t_{11,mn}^{(j)} & t_{12,mn}^{(j)} \\ t_{21,mn}^{(j)} & t_{22,mn}^{(j)} \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Полагая в (2.7) $j = j + 1$, получим

$$\xi_{mn}^{(j+2)} = T_{mn}^{(j+1)} \xi_{mn}^{(j+1)} + \left[S_{mn,j+1}^1 \right]^{-1} \left[v_{lm}^{(j+1)}(\xi_{j+1}) - v_{lm}^{(j+2)}(\xi_{j+1}) \right],$$

а с учетом выражения (2.8)

$$\begin{aligned} \xi_{mn}^{(j+2)} = & T_{mn}(\gamma_j, \gamma_{j+1}) \xi_{mn}^{(j)} + T_{mn}^{(j+1)} \left[S_{mn,j}^1 \right]^{-1} \left[v_{lm}^{(j)}(\gamma_j) - v_{lm}^{(j+1)}(\gamma_j) \right] + \\ & + \left[S_{mn,j+1}^1 \right]^{-1} \left[v_{lm}^{(j+1)}(\xi_{j+1}) - v_{lm}^{(j+2)}(\xi_{j+1}) \right], \end{aligned} \quad (2.9)$$

где $T_{mn}(\gamma_j, \gamma_{j+1}) = T_{mn}^{(j+1)} \cdot T_{mn}^{(j)}$ – матрица перехода от j -го к $(j+1)$ -му слою через j -ю поверхность раздела. Повторяя эту процедуру, при переходе от первой к N -й поверхности раздела, получим

$$\xi_{mn}^{(N)} = T_{mn}(\gamma_N, \gamma_1) \xi_{mn}^{(1)} + Q_{mn}, \quad (2.10)$$

где

$$T_{mn}(\gamma_N, \gamma_1) = \prod_{j=1}^{N-1} T_{mn}^{(N-j)} = \begin{bmatrix} t_{11}^{(mn)} & t_{12}^{(mn)} \\ t_{21}^{(mn)} & t_{22}^{(mn)} \end{bmatrix}, \quad (2.11)$$

$$Q_{mn} = \sum_{j=1}^{N-1} \left\{ T_{mn}^{(j+1)} \left[S_{mn,j}^1 \right]^{-1} \left[v_{mn}^{(j)}(\gamma_j) - v_{mn}^{(j+1)}(\gamma_j) \right] + \left[S_{mn,j+1}^1 \right]^{-1} \left[v_{lm}^{(j+1)}(\xi_{j+1}) - v_{lm}^{(j+2)}(\xi_{j+1}) \right] \right\}. \quad (2.12)$$

Таким образом, трансляционные матрицы для неоднородных систем построены. Ее элементы находятся перемножением матриц перехода и суммированием частных решений по формулам (2.11), (2.12). Система для нахождения основных неизвестных произвольных постоянных, через которые выражаются постоянные для каждого слоя, получается при использовании выражений (2.10) и условий на внешней поверхности.

2.2. Нагрев радиально-слоистого цилиндра под действием лазерного излучения

В отличие от работ [63–69], в которых на поверхности тела принимались условия теплоизоляции, на поверхности цилиндра принимаются условия теплообмена по закону Ньютона. Решение нестационарной задачи теплопроводности с учетом конечной скорости распространения тепла строится с помощью метода конечных интегральных преобразований [72, 73], теория которых была разработана Н.С. Кошляковым [72]. Дальнейшее развитие теории этого метода получила в работах Е.М. Карташова [72–82]. Применение такого подхода позволяет получать обыкновенные дифференциальные уравнения с временной переменной и использовать интеграл Дюамеля при записи решений для произвольной формы импульса.

Как и в предыдущем разделе, рассматриваются слоистые радиально-неоднородные цилиндры с поверхностями раздела в виде N соосных круговых цилиндрических поверхностей (рис. 1.1). Все обозначения при этом сохраняются.

Для определения температурных полей будем исходить из гиперболического уравнения теплопроводности, которое можно записать в одном из видов:

$$\frac{1}{w_j^2} \frac{\partial^2 T_j}{\partial t^2} + \frac{1}{\chi_j} \frac{\partial T_j}{\partial t} = \Delta T_j + \frac{1}{\lambda_j} Q_j(r, \varphi, t), \quad \tau_{p,j} \frac{\partial^2 T_j}{\partial t^2} + \frac{\partial T_j}{\partial t} = \chi_j \Delta T_j + \frac{1}{c_j \rho_j} Q_j(r, \varphi, t), \quad (2.13)$$

$$0 < r < r_1, r_1 < r < r_2, \dots, r_{N-1} < r < r_N; j = 1, 2, \dots, N,$$

где для каждого слоя: $T_j = T_j(r, \varphi, t)$ – температура, t – время, r, φ – полярные координаты, λ_j – коэффициент теплопроводности, c_j – теплоемкость, ρ_j – плотность, $\chi_j = \lambda_j / (c_j \rho_j)$ – коэффициент температуропроводности, $w_j = \sqrt{\chi_j / \tau_{p,j}}$ – скорость распространения тепловой волны, $\tau_{p,j}$ – время релаксации теплового потока, $Q_j(r, \varphi, t)$ – функция внутренних источников энергии и Δ – оператор Лапласа для бесконечно длинного цилиндра, записанный в цилиндрических координатах r, φ, z , (см. (1.14)).

Начальные условия принимаются нулевыми:

$$T_j(r, \varphi, t) \Big|_{t=0} = \partial T_j(r, \varphi, t) / \partial t \Big|_{t=0} = 0. \quad (2.14)$$

По координате φ должны выполняться условия периодичности

$$T_j(r, \varphi + 2\pi, t) = T_j(r, \varphi, t), \quad (2.15)$$

и решение должно быть ограничено при $r \rightarrow 0$ и при $r \rightarrow \infty$:

$$\lim_{r \rightarrow 0} T_1(r, \varphi, t) < \infty, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} T_{N+1}(r, \varphi, t) < \infty. \quad (2.16)$$

На поверхностях раздела слоев $r = r_j$, $j = 1, 2, \dots, N-1$ принимаются условия идеального теплового контакта – равенство температур и тепловых потоков:

$$T_j(r, \varphi, t) \Big|_{r=r_j} = T_{j+1}(r, \varphi, t) \Big|_{r=r_j}, \quad \lambda_j \frac{\partial T_j(r, \varphi, t)}{\partial r} \Big|_{r=r_j} = \lambda_{j+1} \frac{\partial T_{j+1}(r, \varphi, t)}{\partial r} \Big|_{r=r_j}. \quad (2.17)$$

На внешней поверхности цилиндра $r = r_N$ задаются условия конвективного теплообмена с окружающей средой, температура которой принимается нулевой:

$$\lambda(\partial T / \partial r) + \alpha T \Big|_{r=r_N} = \lambda_N (\partial T_N / \partial r) + \alpha T_N \Big|_{r=r_N} = 0, \quad (2.18)$$

где α – коэффициент теплообмена.

2.2.1. Сведение к одномерным уравнениям

К первому из уравнений (2.13) применим конечное интегральное преобразование Фурье по координате φ с ядром $\cos(n\varphi)$

$$T_j^{(n)} = T_j^{(n)}(r, t) = \int_0^\pi T_j(r, \varphi, t) \cos(n\varphi) d\varphi, \quad Q_j^{(n)}(r, t) = \int_0^\pi Q_j(r, \varphi, t) \cos(n\varphi) d\varphi. \quad (2.19)$$

$$\mathfrak{A}_n(r) = [R_1^{(n)}(r), R_2^{(n)}(r), \dots, R_N^{(n)}(r)]^T, \quad (2.26)$$

то для $\mathfrak{A}_n(r)$ формально можно записать уравнение задачи на собственные значения

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\mathfrak{A}_n(r)}{dr} \right) - \frac{n^2}{r^2} \mathfrak{A}_n(r) = -\eta_n^2 \mathfrak{A}_n(r), \quad 0 < r < a \quad (2.27)$$

и соответствующие граничные условия

$$\mathfrak{A}_n(0) < \infty, \quad \lambda_N d\mathfrak{A}_n(r) / dr + \alpha \mathfrak{A}_n(r) \Big|_{r=a} = 0. \quad (2.28)$$

В точках $r = r_j$ производные $\mathfrak{A}_n(r)$ по r в обычном смысле не существуют. Этот недостаток можно устранить, если рассматривать $\mathfrak{A}_n(r)$ как обобщенную функцию [85] с соответствующими правилами дифференцирования. С другой стороны, для каждой функции $R_j^{(n)}$, определенную в j -м слое цилиндра, можно записать те же уравнения, которые следует рассматривать в соответствующих интервалах

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR_j^{(n)}}{dr} \right) - \frac{n^2}{r^2} R_j^{(n)} = -\eta_n^2 R_j^{(n)} \Leftrightarrow r^2 \frac{d^2 R_j^{(n)}}{dr^2} + r \frac{dR_j^{(n)}}{dr} + (\eta_n^2 r^2 - n^2) R_j^{(n)} = 0, \quad r_{j-1} < r < r_j. \quad (2.29)$$

На поверхностях раздела слоев при $r = r_j$ требуется выполнение условий

$$R_j^{(n)}(r_j) = R_{j+1}^{(n)}(r_j), \quad \lambda_j \frac{dR_j^{(n)}(r_j)}{dr} = \lambda_{j+1} \frac{dR_{j+1}^{(n)}(r_j)}{dr}, \quad (j = 1, 2, \dots, N-1), \quad (2.30)$$

а для $j = N$, т.е. для последней поверхности раздела при $r = r_N$, условия (2.23) в соответствии с (2.28) заменяются на условие

$$\lambda_N \frac{dR_N^{(n)}(r_N)}{dr} + \alpha R_N^{(n)}(r_N) = 0. \quad (2.31)$$

На оси z при $r = 0$ также в соответствии с (2.28) следует принять

$$R_1^{(n)}(0) < \infty, \quad . \quad (2.32)$$

Решение сформулированной задачи снова построим с использованием МТМ. Общее решение уравнений Бесселя (2.29) для слоев записывается в виде

$$R_n^{(1)}(r) = A_n^{(1)} J_n(\eta_n r), \quad R_n^{(j)}(r) = A_n^{(j)} J_n(\eta_n r) + B_n^{(j)} Y_n(\eta_n r), \quad j = 2, 3, \dots, N, \quad (2.33)$$

где $A_n^{(1)}, A_n^{(j)}, B_n^{(j)}$ – постоянные, подлежащие определению, $J_n(z), Y_n(z)$ – функции Бесселя целого порядка первого и второго рода соответственно. Запишем также выражение для производных решений

$$\frac{dR_n^{(1)}(r)}{dr} = A_n^{(1)} \eta_n J_n'(\eta_n r), \quad \frac{dR_n^{(j)}(r)}{dr} = A_n^{(j)} \eta_n J_n'(\eta_n r) + B_n^{(j)} \eta_n Y_n'(\eta_n r). \quad (2.34)$$

Трансляционные матрицы $T_n(r_j, r_{j+m-1})$ устанавливают связь между произвольными постоянными j -го и $(j+m)$ -го слоев:

$$\gamma_{j+m}^{(n)} = T_n(r_j, r_{j+m-1})\gamma_j^{(n)}, \quad (2.35)$$

где $\gamma_n^{(1)} = [A_n^{(1)}, 0]^T$, $\gamma_n^{(j)} = [A_n^{(j)}, B_n^{(j)}]^T$ – векторы-столбцы произвольных постоянных j -го слоя, $T_n(r_j, r_{j+m-1}) = T_{j+m-1}^{(n)} \cdot T_{j+m-2}^{(n)} \cdot \dots \cdot T_j^{(n)}$ – трансляционная матрица для перехода от постоянных j -го слоя к постоянным $(j+m)$ -го слоя, а $T_j^{(n)}$ – матрицы перехода от j -го к $(j+1)$ -му слою, связывающие постоянные соседних слоев. Элементы матриц перехода

$$T_j^{(n)} = \frac{1}{2\lambda_{j+1}/(\pi r_j)} \begin{bmatrix} t_{11,j}^{(n)} & t_{12,j}^{(n)} \\ t_{21,j}^{(n)} & t_{22,j}^{(n)} \end{bmatrix}, \quad (2.36)$$

представляют собой фундаментальные решения уравнений (2.29) и имеют вид

$$\begin{aligned} t_{11,j}^{(n)} &= \lambda_{j+1}\eta_n J_n(\eta_n r_j) Y_n'(\eta_n r_j) - \lambda_j \eta_n Y_n(\eta_n r_j) J_n'(\eta_n r_j), \\ t_{12,j}^{(n)} &= \lambda_{j+1}\eta_n Y_n(\eta_n r_j) Y_n'(\eta_n r_j) - \lambda_j \eta_n Y_n(\eta_n r_j) Y_n'(\eta_n r_j), \\ t_{21,j}^{(n)} &= \lambda_{j+1}\eta_n Y_n(\eta_n r_j) J_n'(\eta_n r_j) - \lambda_{j+1}\eta_n J_n(\eta_n r_j) J_n'(\eta_n r_j), \\ t_{22,j}^{(n)} &= \lambda_j \eta_n J_n(\eta_n r_j) Y_n'(\eta_n r_j) - \lambda_{j+1}\eta_n J_n'(\eta_n r_j) Y_n(\eta_n r_j). \end{aligned}$$

Принимая в формуле (2.35) $j=1$, $j+m=N$, получим полную трансляционную матрицу T_n , элементы которой обозначим через $t_{km,n}$, ($k, m=1, 2$). Связь между произвольными постоянными первого (ядра) и последнего слоя дается формулой

$$\begin{bmatrix} A_n^{(N)} \\ B_n^{(N)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11,n} & t_{12,n} \\ t_{21,n} & t_{22,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_n^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.37)$$

Тогда для последнего (наружного) слоя для функции $R_n^{(N)}(r)$ и ее производной можно записать выражения

$$\begin{aligned} R_n^{(N)}(r) &= A_n^{(j)} [t_{11,n} J_n(\eta_n r) + t_{21,n} Y_n(\eta_n r)], \\ dR_n^{(N)}(r)/dr &= A_n^{(j)} \eta_n [t_{11,n} J_n'(\eta_n r) + t_{21,n} Y_n'(\eta_n r)]. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Подстановка выражения (2.38) в граничные условия (2.31) приводит к уравнению для определения собственных чисел:

$$\lambda_N \eta_n [t_{11,n} J_n'(\eta_n a) + t_{21,n} Y_n'(\eta_n a)] + \alpha [t_{11,n} J_n(\eta_n a) + t_{21,n} Y_n(\eta_n a)] = 0. \quad (2.39)$$

Трансцендентное уравнение (2.39) для каждого n имеет, как и для сплошного цилиндра, счетное число корней в силу общих свойств задачи Штурма-Лиувилля. Следует отметить, что для различных значений индекса n собственные функции (СФ) и собственные значения (СЗ) будут различными, поэтому будем отмечать их двумя

индексами и обозначать $\mathfrak{A}_v^{(n)}, \eta_v^{(n)}, v = 1, 2, 3, \dots$. Функции $\mathfrak{A}_v^{(n)}$, соответствующие СЗ η_n , определяются с точностью до постоянной $A_v^{(n)}$, и их можно записать в виде

$$\mathfrak{A}_v^{(n)} = \begin{cases} J_n(\eta_v^{(n)} r), & 0 < r < r_1 \\ t_{11,n}^{(1)} J_n(\eta_v^{(n)} r) + t_{21,n}^{(1)} Y_n(\eta_v^{(n)} r), & r_1 < r < r_2 \\ \dots \\ t_{11,n} J_n(\eta_v^{(n)} r) + t_{21,n} Y_n(\eta_v^{(n)} r), & r_{N-1} < r < a \end{cases} \quad (2.40)$$

В силу общих свойств задач Штурма-Лиувилля система СФ $\{\mathfrak{A}_v^{(n)}\}_{v=1}^{\infty}$ (для каждого n) обладает свойствами ортогональности и полноты в промежутке $[0, r_N] = [0, a]$, причем СФ будут ортогональны с весом r . Квадрат нормы СФ определяется суммой интегралов

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{A}_v^{(n)}\|^2 &= \int_0^a [\mathfrak{A}_v^{(n)}(\eta_v^{(n)} r)]^2 r dr = \\ &= \int_0^{r_1} [R_{v,n}^{(1)}(\eta_v^{(n)} r)]^2 r dr + \int_{r_1}^{r_2} [R_{v,n}^{(2)}(\eta_v^{(n)} r)]^2 r dr + \dots + \int_{r_{N-1}}^a [R_{v,n}^{(N)}(\eta_v^{(n)} r)]^2 r dr. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Интегралы в (2.41) аналитически не берутся, а при их численном вычислении необходимо применять специальные приемы. Можно указать, например, такой: для малых значений аргумента разложить функции Бесселя в ряд, а для больших значений – воспользоваться асимптотическими представлениями. Нормированные СФ задаются соотношением $\mathfrak{A}_v^{(n)} / \|\mathfrak{A}_v^{(n)}\|$, и при этом произвольные постоянные $A_n^{(j)}$ сокращаются.

Система СФ для слоистого цилиндра построена.

2.2.3. Построение решений нестационарных неоднородных уравнений

В соответствии с общей идеей метода конечных интегральных преобразований для построения решения неоднородного уравнения (2.10) умножим уравнения на построенные СФ и проинтегрируем по радиусу оболочки. Введем обозначения:

$$\tilde{T}_j^{(n,v)}(t) = \int_0^a r T_j^{(n,v)}(r, t) \mathfrak{A}_v^{(n)}(r) dr, \quad \tilde{Q}_{n,v}^{(j)}(t) = \int_0^a Q_n^{(j)}(r, t) \mathfrak{A}_v^{(n)}(r) r dr. \quad (2.42)$$

Проинтегрируем первый интеграл по частям, и учтем уравнения (2.29) для СФ

$$\begin{aligned} &\int_0^a \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial T_n^{(j)}}{\partial r} \right] \mathfrak{A}_v^{(n)}(r) dr - \int_0^a r \frac{n^2}{r^2} \mathfrak{A}_v^{(n)}(r) dr = \\ &= a \frac{\partial T_n^{(N)}(a, t)}{\partial r} \mathfrak{A}_v^{(n)}(a) - a T_n^{(N)}(a, t) \frac{d\mathfrak{A}_v^{(n)}(a)}{dr} - \eta_n^2 \tilde{T}_{n,v}^{(N)}(t). \end{aligned} \quad (2.43)$$

Из граничных условий следует, что при $r = a$

$$a \frac{\partial T_n^{(N)}(a, t)}{\partial r} \mathfrak{A}_v^{(n)}(a) - a T_n^{(N)}(a, t) \frac{d\mathfrak{A}_v^{(n)}(a)}{dr} = 0.$$

В результате получаем обыкновенные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

$$\frac{1}{w_j^2} \frac{d^2 \tilde{T}_{n,v}^{(j)}(t)}{dt^2} + \frac{1}{\chi_j} \frac{d \tilde{T}_{n,v}^{(j)}(t)}{dt} + \eta_n^2 \tilde{T}_{n,v}^{(N)}(t) = \frac{1}{\lambda_j} \tilde{Q}_{n,v}^{(j)}(t). \quad (2.44)$$

Решения уравнений (2.44) при нулевых начальных условиях имеет вид

$$\tilde{T}_{n,v}^{(j)}(t) = \frac{e^{\varsigma_1 t} - e^{\varsigma_2 t}}{(\varsigma_1 - \varsigma_2)} + \frac{w_j^2}{\lambda_j (\varsigma_1 - \varsigma_2)} \int_0^t (e^{\varsigma_1 \tau} - e^{\varsigma_2 \tau}) \tilde{Q}_{n,v}^{(j)}(t - \tau) d\tau, \quad (2.45)$$

где корни характеристического уравнения ς_1, ς_2 определяются по формулам

$$\varsigma_{1,2} = -1/\chi_j \pm \sqrt{1/\chi_j^2 - 4\eta_n^2/w_j^2}. \quad (2.46)$$

Следует отметить, что эти корни будут различными для разных значений индексов j, n, v , но для сокращения записи будем их опускать.

Обращение конечного интегрального преобразования по радиальной координате записывается в виде

$$T_j^{(n)}(r, t) = \frac{1}{\|\mathfrak{A}_v^{(n)}\|^2} \sum_{v=1}^{\infty} \tilde{T}_{n,v}^{(j)}(t) \mathfrak{A}_v^{(n)}(r). \quad (2.47)$$

Учитывая зависимость от окружной координаты и представления (2.45), (2.47), получим окончательно

$$T_j(r, \varphi, t) = \frac{2}{\pi \|\mathfrak{A}_v^{(n)}\|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{v=1}^{\infty} \left[\tilde{T}_{n,v}^{(j)}(t) \mathfrak{A}_v^{(n)}(r) \right] \cos(n\varphi), \quad (2.48)$$

$$T_j^{(n)}(r, t) = \sum_{v=1}^{\infty} \left[\frac{e^{\varsigma_1 t} - e^{\varsigma_2 t}}{(\varsigma_1 - \varsigma_2)} + \frac{w_j^2}{\lambda_j (\varsigma_1 - \varsigma_2)} \int_0^t (e^{\varsigma_1 \tau} - e^{\varsigma_2 \tau}) \tilde{Q}_{n,v}^{(j)}(t - \tau) d\tau \right] \frac{\mathfrak{A}_v^{(n)}(r)}{\|\mathfrak{A}_v^{(n)}\|^2},$$

$$T_j(r, \varphi, t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{v=1}^{\infty} \left[\frac{e^{\varsigma_1 t} - e^{\varsigma_2 t}}{(\varsigma_1 - \varsigma_2)} + \frac{w_j^2}{\lambda_j (\varsigma_1 - \varsigma_2)} \int_0^t (e^{\varsigma_1 \tau} - e^{\varsigma_2 \tau}) \tilde{Q}_{n,v}^{(j)}(t - \tau) d\tau \right] \frac{\mathfrak{A}_v^{(n)}(r)}{\|\mathfrak{A}_v^{(n)}\|^2} \cos(n\varphi). \quad (2.49)$$

При известной зависимости функции источников от времени задача сводится к вычислению интегралов типа свертки

$$G_{n,v}^{(j)}(t) = \int_0^t (e^{\varsigma_1 \tau} - e^{\varsigma_2 \tau}) \tilde{Q}_{n,v}^{(j)}(t - \tau) d\tau. \quad (2.50)$$

Например, в случае действия мгновенного теплового импульса, который можно задать δ функцией, т.е. $\tilde{Q}_{n,v}^{(j)}(t - \tau) = q_0 \delta(t - \tau)$, где q_0 интенсивность импульса, будем иметь выражение $G_{n,v}^{(j)}(t) = q_0 (e^{\varsigma_1 t} - e^{\varsigma_2 t})$.

2.3. Нагрев радиально-слоистого шара под действием лазерного излучения

При рассмотрении нагрева шара считается, что в общем случае температуры в слоях $T_j = T_j(r, \theta, \varphi, t)$ и функции источников $Q_j = Q_j(r, \theta, \varphi, t)$, $j = 1, 2, \dots, N$ зависят от всех трех сферических координат r, θ, φ , и удовлетворяют уравнениям

$$\frac{1}{w_j^2} \frac{\partial^2 T_j}{\partial t^2} + \frac{1}{\chi_j} \frac{\partial T_j}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T_j}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T_j}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T_j}{\partial \varphi^2} \right] + \frac{1}{\lambda_j} Q_j, \\ 0 < r < r_1, \quad r_1 < r < r_2, \quad \dots, \quad r_{N-1} < r < r_N; \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (2.51)$$

Начальные условия (2.14), условия периодичности по φ (2.15), ограниченности решений при $r \rightarrow 0$ и при $r \rightarrow \infty$ (2.16), условия контакта слоев (2.17) и условия теплообмена на внешней поверхности (2.18) сохраняют свой вид. По переменной θ следует принять условия ограниченности решений при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$, т.е.

$$T_j(r, 0, \varphi, t) < \infty, \quad T_j(r, \pi, \varphi, t) < \infty. \quad (2.52)$$

Аналогично с рассмотренной выше задачей о нагреве цилиндра сформулированная для каждого слоя трехмерная задача сводится к одномерной задаче.

2.3.1. Сведение к одномерным уравнениям

Для получения одномерных уравнений применим классический метод разделения переменных и для этого представим температуру и функцию источников в виде разложений по сферическим гармоникам $Y_l^{(m)}(\theta, \varphi) = P_l^{(m)}(\cos \theta) \cos(m\varphi)$, $Y_l^{(m)}(\theta, \varphi) = P_l^{(m)}(\cos \theta) \sin(m\varphi)$ при $m \neq 0$ и $Y_l^{(0)}(\theta, \varphi) = P_l(\cos \theta)$ при $m = 0$ или $Y_l^{(m)}(\theta, \varphi) = P_l^{(m)}(\cos \theta) e^{im\varphi}$, где i – мнимая единица, $P_l^{(m)}(\cos \theta)$ – присоединенные функции Лежандра, $P_l(\cos \theta)$ – полиномы Лежандра:

$$T_j(r, \theta, \varphi, t) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l T_{lm}^{(j)}(r, t) P_l^{|m|}(\cos \theta) e^{im\varphi}, \\ Q_j(r, \theta, \varphi, t) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Q_{lm}^{(j)}(r, t) P_l^{|m|}(\cos \theta) e^{im\varphi}. \quad (2.52)$$

Коэффициенты разложений $Q_{lm}^{(j)}(r, t)$ при известных функциях источников находятся по формулам [84]

$$Q_{lm}^{(j)}(r, t) = \frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \int_0^{2\pi} \cos(m\varphi) d\varphi \int_0^{2\pi} Q_j(r, \theta, \varphi, t) P_l^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta. \quad (2.53)$$

Подстановка разложений (2.52) в уравнения (2.51) с учетом уравнения для сферических гармоник

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y_l^{(m)}}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y_l^{(m)}}{\partial \varphi^2} + l(l+1) Y_l^{(m)} = 0 \quad (2.54)$$

приводит к уравнениям

$$\frac{1}{w_j^2} \frac{\partial^2 T_{lm}^{(j)}}{\partial t^2} + \frac{1}{\chi_j} \frac{\partial T_{lm}^{(j)}}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T_{lm}^{(j)}}{\partial r} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} T_{lm}^{(j)} + \frac{1}{\lambda_j} Q_{lm}^{(j)}(r, t), \quad (2.55)$$

где использованы обозначения $T_{lm}^{(j)} = T_{lm}^{(j)}(r, t)$, $Q_{lm}^{(j)} = Q_{lm}^{(j)}(r, t)$.

Далее повторяем алгоритм, построенный при решении задачи для слоистого цилиндра.

2.3.2. Задача на собственные значения для слоистого шара. Применение трансляционных матриц

Рассмотрим задачу на собственные значения для однородных стационарных уравнений, соответствующих нестационарным неоднородным уравнениям (2.55). В случае слоистого шара, состоящего из N слоев, для каждого члена разложения с номером lm собственную функцию $\mathfrak{A}_{lm} = \mathfrak{A}_{lm}(r)$, соответствующую собственным числам η_{lm} , можно представить в виде, аналогичном (2.25) с заменой индекса n на двойной индекс lm . Если ввести в рассмотрение функциональный вектор, аналогичный (2.26), то для $\mathfrak{A}_{lm}(r)$ формально можно записать уравнение задачи на собственные значения

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\mathfrak{A}_{lm}}{dr} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} \mathfrak{A}_{lm} = -\eta_{lm}^2 \mathfrak{A}_{lm}, \quad 0 < r < a \quad (2.56)$$

и соответствующие граничные условия

$$\mathfrak{A}_{lm}(0) < \infty, \quad \lambda d\mathfrak{A}_{lm}(a) + \alpha \mathfrak{A}_{lm}(a) = 0. \quad (2.57)$$

Для каждой функции $R_{lm}^{(j)} = R_{lm}^{(j)}(r)$, определенной в j -м слое шара, можно записать однотипные уравнения, которые следует рассматривать в соответствующих интервалах

$$r^2 \frac{d^2 R_{lm}^{(j)}}{dr^2} + r \frac{dR_{lm}^{(j)}}{dr} + [\eta_{lm}^2 r^2 - l(l+1)] R_{lm}^{(j)} = 0, \quad r_{j-1} < r < r_j. \quad (2.58)$$

На поверхностях раздела при $r = r_j$ требуется выполнение условий

$$R_{lm}^{(j)}(r_j) = R_{lm}^{(j+1)}(r_j), \quad \lambda_j \left[dR_{lm}^{(j)}(r_j) / dr \right] = \lambda_{j+1} \left[dR_{lm}^{(j+1)}(r_j) / dr \right], \quad (j = 1, 2, \dots, N-1), \quad (2.59)$$

а при $j = N$, т.е. на внешней поверхности шара, когда $r = r_N$, имеют место условия теплообмена

$$\lambda_N \left[dR_{lm}^{(N)}(r_N) / dr \right] + \alpha R_{lm}^{(N)}(r_N) = 0. \quad (2.60)$$

В центре шара при $r = 0$ следует принять

$$R_{lm}^{(1)}(0) < \infty, \quad (2.61)$$

Решение сформулированной задачи также строится МТМ. Линейно независимыми решениями уравнений (2.58) являются сферические функции Бесселя

$$j_n(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} J_{n+1/2}(\rho), \quad y_n(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} Y_{n+1/2}(\rho),$$

где $\rho = \eta_{lm} r$, а постоянный множитель $\sqrt{\pi/2}$ введен из соображений удобства.

Уместно отметить, что сферические функции Бесселя выражаются через элементарные функции. Например, для первых двух порядков имеют место формулы

$$j_0(\rho) = \frac{\sin \rho}{\rho}, \quad j_1(\rho) = \frac{\sin \rho}{\rho^2} - \frac{\cos \rho}{\rho}, \quad y_0(\rho) = -\frac{\cos \rho}{\rho}, \quad y_1(\rho) = -\frac{\cos \rho}{\rho^2} - \frac{\sin \rho}{\rho}.$$

Определитель Вронского, который необходим при построении трансляционных матриц, определяется соотношением

$$W\{j_n(\rho), y_n(\rho)\} = 1/\rho^2.$$

Таким образом, общее решение уравнения (2.56) можно записать в виде

$$R_{lm}^{(j)}(r) = A_n^{(j)} j_n(\eta_n r) + B_n^{(j)} y_n(\eta_n r), \quad (2.62)$$

где $A_n^{(j)}, B_n^{(j)}$ – постоянные, подлежащие определению.

Запишем также выражение для производных решений

$$dR_{lm}^{(j)}(r)/dr = A_n^{(j)} \eta_n j_n'(\eta_n r) + B_n^{(j)} \eta_n y_n'(\eta_n r). \quad (2.63)$$

Связь между постоянными j -го и $(j+m)$ -го слоев дается формулой (2.35), а матрицы $T_j^{(n)}$ строятся с помощью матриц фундаментальных решений дифференциальных уравнений (2.58) и имеют вид

$$T_j^{(n)} = \frac{1}{2\lambda_{j+1}/(\pi r_j)} \begin{bmatrix} t_{11,j}^{(n)} & t_{12,j}^{(n)} \\ t_{21,j}^{(n)} & t_{22,j}^{(n)} \end{bmatrix}, \quad (2.64)$$

где на этот раз элементы матриц находятся по формулам

$$\begin{aligned} t_{11,j}^{(n)} &= \lambda_{j+1} \eta_n j_n(\eta_n r_j) y_n'(\eta_n r_j) - \lambda_j \eta_n y_n(\eta_n r_j) j_n'(\eta_n r_j), \\ t_{12,j}^{(n)} &= \lambda_{j+1} \eta_n y_n(\eta_n r_j) y_n'(\eta_n r_j) - \lambda_j \eta_n y_n(\eta_n r_j) y_n'(\eta_n r_j), \\ t_{21,j}^{(n)} &= \lambda_{j+1} \eta_n y_n(\eta_n r_j) j_n'(\eta_n r_j) - \lambda_{j+1} \eta_n j_n(\eta_n r_j) j_n'(\eta_n r_j), \\ t_{22,j}^{(n)} &= \lambda_j \eta_n j_n(\eta_n r_j) y_n'(\eta_n r_j) - \lambda_{j+1} \eta_n j_n'(\eta_n r_j) y_n(\eta_n r_j). \end{aligned}$$

Принимая в формуле (2.25) $j=1, j+m=N$, получим полную трансляционную матрицу T_n , элементы которой обозначим через $t_{km,n}$, ($k, m=1, 2$). Связь между произвольными постоянными первого и последнего слоев дается формулой (2.70).

Ввиду ограниченности решений при $r=0$ следует принять $B_n^{(1)}=0$. Тогда для последнего (наружного) слоя функцию $R_n^{(N)}(r)$ и ее производную можно записать в виде

$$\begin{aligned} R_n^{(N)}(r) &= A_n^{(j)} [t_{11,n} j_n(\eta_n r) + t_{21,n} y_n(\eta_n r)], \\ dR_n^{(N)}(r)/dr &= A_n^{(j)} \eta_n [t_{11,n} j_n'(\eta_n r) + t_{21,n} y_n'(\eta_n r)]. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Подставляя найденные выражения в граничные условия (2.20), находим уравнение для определения собственных чисел

$$\lambda_N \eta_n [t_{11,n} j_n'(\eta_n a) + t_{21,n} y_n'(\eta_n a)] + \alpha [t_{11,n} j_n(\eta_n a) + t_{21,n} y_n(\eta_n a)] = 0. \quad (2.66)$$

Трансцендентное уравнение (2.66) для каждой пары индексов lm имеет счетное число корней (в силу общих свойств задачи Штурма-Лиувилля, как и для сплошного цилиндра). Следует отметить, что для различных значений индексов l, m СФ и СЗ будут различными, поэтому будем обозначать их $\alpha_v^{(lm)}, \eta_v^{(lm)}, v=1, 2, 3, \dots$ СФ $\alpha_v^{(lm)}$,

Сила \mathbf{F} , действующая на магнитный диполь с магнитным моментом $\boldsymbol{\mu}$, (здесь и далее ∇ – оператор «набла» [43], записанный в соответствующих координатах) определяется по формуле

$$\mathbf{F} = \nabla(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}), \quad (3.1)$$

а для частиц с постоянным магнитным моментом – выражением [87, 88]

$$\mathbf{F} = (\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla) \mathbf{B}. \quad (3.2)$$

В случае, когда частицы сориентированы по полю, формула (3.1) принимает вид

$$\mathbf{F} = \nabla(|\boldsymbol{\mu}| \cdot |\mathbf{B}|) = \nabla(\mu B) \quad (3.3)$$

и в случае постоянного магнитного момента соответственно

$$\mathbf{F} = |\boldsymbol{\mu}| \nabla |\mathbf{B}| = \mu \nabla B. \quad (3.4)$$

Сила, действующая со стороны неоднородного магнитного поля на тело, которое нельзя рассматривать как одиночный точечный диполь, может быть определена суммированием сил, определяемых формулами (3.1)–(3.4), действующих на элементарные диполи, на которые можно разбить намагниченное тело. Этот принцип суперпозиции распространяется и на агрегаты магнитных наночастиц, однако, практическое его применение оказывается весьма затруднительным. В практических расчетах целесообразней использовать значения эффективных магнитных моментов агрегатов, которые можно найти экспериментально, например, методом, описанным ниже в разд. 4.1.

В работе [19] отмечено, что необходимо различать однодоменные и многодоменные частицы. Для силы, действующей на многодоменные частицы в неоднородном магнитном поле, там же приводится формула

$$\mathbf{F} = V_p \chi \nabla |\mathbf{B}|^2 / (2\mu_0), \quad (3.5)$$

где V_p – объем частицы, χ – магнитная восприимчивость материала частицы.

Известно [88], что частицы, диаметр которых меньше некоторого критического значения, являются однодоменными. К примеру, критический диаметр частиц магнетита равен приблизительно 10 нм. Однодоменные частицы характеризуются собственным магнитным моментом m_p и для силы, действующей на однодоменные частицы в неоднородном магнитном поле, в [88] предлагается использовать выражение

$$\mathbf{F} = m_p \nabla |\mathbf{B}|. \quad (3.6)$$

Формула (3.6) формально совпадает с формулой (3.4), имеющей место для произвольной магнитной частицы. Из (3.1) следует, что в тех случаях, когда магнитный момент слабо зависит от величины поля, максимальные силы будут возникать в зонах наибольших значений модуля вектора-градиента от модуля вектора магнитной индукции. При этом в точках достижения максимумов поля градиент обращается в нуль. Например, градиент модуля поля в цилиндрических координатах в

осесимметричном случае определяется выражением (r, z – цилиндрические координаты, $\mathbf{i}_r, \mathbf{i}_z$ – орты)

$$\nabla B = \frac{\partial B}{\partial r} \mathbf{i}_r + \frac{\partial B}{\partial z} \mathbf{i}_z. \quad (3.7)$$

В случае, когда модуль вектора магнитной индукции достигает максимума (минимума) необходимое условие существования экстремума функции многих переменных требует, чтобы частные производные обращались в нуль

$$\partial B / \partial r = 0, \quad \partial B / \partial z = 0. \quad (3.8)$$

Это означает, что составляющие градиента равны нулю, т.е. и сам вектор, и его модуль равны нулю. Для осесимметричной задачи модуль вектора магнитной индукции $|\mathbf{B}| = \sqrt{B_r^2 + B_z^2}$, поэтому выражение для градиента поля в развернутом виде имеет вид

$$\nabla B = \frac{1}{B} \left(B_r \frac{\partial B_r}{\partial r} + B_z \frac{\partial B_z}{\partial r} \right) \mathbf{i}_r + \frac{1}{B} \left(B_r \frac{\partial B_r}{\partial z} + B_z \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) \mathbf{i}_z. \quad (3.7)$$

Соответственно, выражение для модуля вектора-градиента записывается в виде

$$|\nabla B| = \frac{1}{B} \sqrt{\left(B_r \frac{\partial B_r}{\partial r} + B_z \frac{\partial B_z}{\partial r} \right)^2 + \left(B_r \frac{\partial B_r}{\partial z} + B_z \frac{\partial B_z}{\partial z} \right)^2}. \quad (3.8)$$

Приведенные соотношения положены в основу разработанных алгоритмов и программ, использованных в работе.

3.2. Условия существования рабочей зоны аппликатора

Из известных соотношений магнитостатики следует, что поле максимально вблизи источника и быстро убывает по мере удаления от него. В общем случае закон убывания поля может быть описан на отдельных участках пространства степенной зависимостью вида

$$B = cR^{-\alpha}, \quad (3.9)$$

где $R = \sqrt{(x-\xi)^2 + (x-\eta)^2 + (x-\zeta)^2}$ – расстояние от некоторой точки пространства с декартовыми координатами (x, y, z) до некоторой внутренней точки источника с координатами (ξ, η, ζ) , c – коэффициент пропорциональности, а значение показателя степени α зависит от вида источника.

Сказанное иллюстрируется графиками на рис. 3.1, заимствованными из [19].

В соответствии с законом убывания поля изменяются и области возникновения наибольших градиентов, при которых сила принимает максимальное значение. Для рассматриваемой задачи практический интерес представляют только такие источники поля, с помощью которых возможно получить области необходимых величин градиентов на некотором расстоянии от источника. При этом необходимо определить такие области, "рабочие зоны", в которых модуль градиента поля будет больше, чем в их окрестности. Формально это можно записать в виде неравенства

$$|\text{grad}B|_{r,z \in D} \geq |\text{grad}B|_{r,z \in D'}, \quad (3.10)$$

где через D обозначена рабочая зона, а через D' внешняя по отношению к ней часть пространства. Неравенство должно выполняться при всех r, z , что заведомо будет обеспечено при условии выполнения более сильного неравенства

$$\min_{r,z \in D} |\text{grad}B| \geq \max_{r,z \in D'} |\text{grad}B|. \quad (3.11)$$

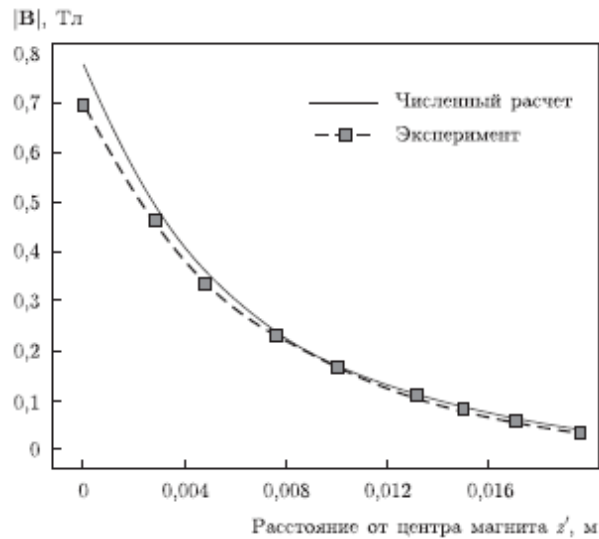


Рис. 3.1. Результаты численного расчета распределения магнитного поля и экспериментальных данных определения магнитного поля (данные работы [89]).

Неравенство (3.11) является основным в задаче нахождения конфигурации и параметров источников поля, а его решения (если они существуют) и определяют их необходимые значения.

3.3. Магнитное поле пространственных источников

Поле и его градиент являются функциями координат, зависят от формы и числа источников поля, а в случае использования электромагнитов также от величин электрических токов в витках. Поэтому в неравенство (3.11) будут входить соответствующие группы параметров, которые подлежат определению. Например, для кольцевого тока это будут радиус, координаты центра витка и сила (плотность) тока.

Для получения расчетных формул удобно использовать векторный потенциал \mathbf{A} [86–88]. Тогда вектор магнитной индукции $\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A}$. В осесимметричном случае векторный потенциал будет иметь только одну составляющую, отличную от нуля, составляющую A_φ , которая должна удовлетворять скалярному уравнению Пуассона. Это уравнение в системе СИ имеет вид

$$\Delta A_\varphi = \mu_0 j, \quad (3.12)$$

где j – плотность тока в источнике, μ_0 – магнитная постоянная.

Решение уравнения Пуассона в пространстве дается интегралом в виде объемного потенциала [82, 84, 85]

$$A_\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{j}{R} dv. \quad (3.13)$$

Интегрирование в (3.13) выполняется по области V , занимаемой источником, R – расстояние между произвольной точкой пространства и некоторой внутренней точкой источника. При наличии нескольких источников в силу вступает принцип суперпозиции полей, и в этом случае следует рассматривать сумму интегралов.

Если область V является телом вращения, удобно и в пространстве, и в интеграле перейти к цилиндрическим координатам, совместив ось z с осью симметрии, а начало координат поместить в некоторую базовую плоскость. Обозначим через r, φ, z координаты произвольной точки пространства, а через ρ, θ, ζ – координаты внутренних точек области V . Тогда расстояние R будет определяться формулой

$$R = \sqrt{(r^2 + \rho^2) - 2r\rho \cos(\varphi - \theta) + (z - \zeta)^2}.$$

В осесимметричном случае составляющие поля в цилиндрических координатах выражаются через векторный потенциал соотношениями

$$B_r = -\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}, \quad B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}. \quad (3.14)$$

Таким образом, для нахождения составляющих поля необходимо выполнить однократное дифференцирование под знаком интеграла, а для вычисления градиента соответственно двукратное. При этом при нахождении модуля градиента приходится вычислять шесть объемных интегралов: два для компонент поля и четыре для частных производных от этих компонент.

Интеграл (3.13) относится к классу несобственных интегралов, зависящих от параметров, где в качестве последних выступают координаты рассматриваемой точки, так как в области источника имеются особенности. Из теории несобственных интегралов известно [72, 82, 84, 85], что интегралы вида

$$J = \iiint_V \frac{j}{R^\alpha} dv$$

сходятся равномерно по параметру, если $\alpha < 3$, а равномерная сходимости является необходимым условием возможности дифференцирования под знаком интеграла [82, 84, 85]. В данном случае для векторного потенциала показатель $\alpha = 1$.

Дифференцирование под знаком интеграла приводит к следующим выражениям для первой и второй производных:

$$\frac{\partial J}{\partial x} = -\iiint_V \frac{j(x-\xi)}{R^3} dv, \quad \frac{\partial^2 J}{\partial x^2} = -\iiint_V j \left(\frac{1}{R^3} - 3 \frac{(x-\xi)^2}{R^5} \right) dv. \quad (3.15)$$

Известно, что дифференцирование под знаком интеграла допустимо, если полученный в результате этой операции интеграл будет сходиться равномерно по параметру [82, 84, 85]. Для вторых производных это условие нарушается. Таким образом, в области источника, где интеграл (3.13) имеет особенности, законным оказывается вычисление только составляющих поля, т.е. первых производных векторного потенциала. Для вычисления составляющих градиента в области источника необходимы специальные приемы. Вместе с тем, если рассматриваемая точка пространства расположена вне источника, то интеграл (3.13) становится собственным, что и обеспечивает возможность дифференцирования под знаком интеграла.

Задача вычисления кратных интегралов по областям, границы которых не совпадают с координатными поверхностями, является далеко непростой задачей. В простейших случаях интегралы обычно вычисляются численно с помощью замены их тройными суммами. Однако, как указывалось выше, интеграл (3.13) имеет особенность в точках, расположенных внутри источника, поэтому дифференцирование под знаком интеграла приводит к ухудшению численных результатов при вычислении поля в непосредственной близости от источника. Это обстоятельство существенно увеличивает трудоемкость расчетов, так как для получения приемлемой точности приходится использовать достаточно мелкий шаг интегрирования. К тому же, в общем случае, при разработке алгоритмов отыскания формы источников область интегрирования неизвестна, и процесс вычисления интегралов приходится многократно повторять. Поэтому непосредственное применение обычных формул численного интегрирования оказывается неэффективным.

Определенное упрощение, возможно за счет некоторой потери точности, достигается следующим образом. При замене тройных интегралов суммами фактически выполняется определенная дискретизация области. В цилиндрических координатах это приводит к замене области источников тока набором кольцевых элементов конечной ширины и высоты. В сечении каждого элемента плотность тока изменяется незначительно и ее можно считать постоянной. Но тогда усреднение по объему приводит к формулам аналогичным формулам закона Био-Савара-Лапласа для тонкого кругового кольца [84–87]. При этом вместо плотности тока в рассмотрение вводится сила тока, а реальный источник заменяется набором тонких колец определенных размеров. Число таких колец можно выбрать небольшим и тем самым избежать трудоемкого суммирования. Основное преимущество такого подхода состоит в переходе от кратных интегралов к простым интегралам, для которых оказывается возможным использование известных и апробированных эффективных численных методов.

3.4. Магнитное поле системы кольцевых токов

Векторный потенциал кольцевого тока определяется формулой [86–88]

$$A_\varphi = \frac{\mu_0 a J}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\cos \varphi d\varphi}{R}, \quad (3.16)$$

где a – радиус кольца, J – сила тока, φ – полярный угол, а расстояние R в данном случае определяется выражением

$$R = \sqrt{(r^2 + a^2 - 2ar \cos \varphi) + (z - h)^2}. \quad (3.17)$$

В формуле (3.17) h – расстояние от плоскости расположения витка до базовой плоскости отсчета $z = 0$. Применение формул (3.14) приводит к следующим интегралам для вычисления составляющих поля:

$$B_r = \frac{\mu_0 a J}{2\pi} \int_0^\pi \frac{(z - h) \cos \varphi d\varphi}{R^3}, \quad B_z = \frac{\mu_0 a J}{2\pi} \left\{ \frac{1}{r} \int_0^\pi \frac{\cos \varphi d\varphi}{R} - \int_0^\pi \frac{(r - a \cos \varphi) d\varphi}{R^3} \right\}. \quad (3.18)$$

Дифференцирование под знаком интегралов (3.18) приводит к выражениям для вычисления частных производных, необходимых при нахождении градиента модуля поля. На оси z , т.е. при $r = 0$ формула для вычисления компоненты B_z становится

неприменимой, и для устранения этого недостатка, так же как и при нахождении градиента, следует использовать специальные формулы. В этом случае будем иметь

$$B_z = \frac{\mu_0 a^2 J}{2} \frac{1}{\left(\sqrt{a^2 + (z-h)^2}\right)^3}, \quad \nabla B_z = -\frac{\mu_0 a^2 J}{2} \frac{z-h}{\left(\sqrt{a^2 + (z-h)^2}\right)^5}. \quad (3.19)$$

Так же как и в трехмерном случае, все интегралы имеют особенности. При $z = h$ и $r = a$ выражение (3.17) для R принимает вид $R = 2 \sin \varphi / 2$. При $\varphi = 0$ знаменатель во всех интегралах обращается в нуль, и все интегралы становятся несобственными с особенностями различного характера. Этот случай реализуется только при $z = h$, и использование приведенных интегралов для вычисления характеристик поля в этой плоскости вблизи самого витка становится невозможным. В общем случае интегралы являются собственными, и их нетрудно вычислить с помощью известных методов и программ.

Для определения поля, создаваемого системой кольцевых токов, используется принцип суперпозиции. Однако так как требуется вычислять модуль вектора-градиента от модуля поля, несмотря на то, что в соответствии с формулами (3.19) компоненты вектора-градиента пропорциональны силам токов, задача является нелинейной. Для компонент вектора магнитной индукции результирующего поля, создаваемого системой N токов, будем иметь

$$B_r = \sum_{j=1}^N B_r^{(j)}, \quad B_z = \sum_{j=1}^N B_z^{(j)}, \quad (3.20)$$

где $B_r^{(j)} = B_r^{(j)}(r, z; J_j, a_j, h_j)$, $B_z^{(j)} = B_z^{(j)}(r, z; J_j, a_j, h_j)$ – соответствующие компоненты векторов магнитной индукции для j -го тока с параметрами, соответствующими индексу j . Подстановка сумм (3.20) в выражение для модуля вектора индукции дает

$$B = \sqrt{B_r^2 + B_z^2} = \sqrt{\left(\sum_{j=1}^N B_r^{(j)}\right)^2 + \left(\sum_{j=1}^N B_z^{(j)}\right)^2}. \quad (3.21)$$

Вектор-градиент модуля поля содержит частные производные от модуля вектора магнитной индукции суммарного поля, и, как следует из (3.21), принцип суперпозиции становится неприменимым. Непосредственное вычисление частных производных из выражения (3.21) приводит к формулам

$$\frac{\partial B}{\partial r} = \frac{\sum_{j=1}^N B_r^{(j)} \sum_{j=1}^N \partial B_r^{(j)} / \partial r + \sum_{j=1}^N B_z^{(j)} \sum_{j=1}^N \partial B_z^{(j)} / \partial r}{\sqrt{B_r^2 + B_z^2}}, \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial B}{\partial z} = \frac{\sum_{j=1}^N B_r^{(j)} \sum_{j=1}^N \partial B_r^{(j)} / \partial z + \sum_{j=1}^N B_z^{(j)} \sum_{j=1}^N \partial B_z^{(j)} / \partial z}{\sqrt{B_r^2 + B_z^2}}. \quad (3.23)$$

Соответственно модуль вектора-градиента находится по формуле

$$|\nabla B| = \sqrt{(\partial B / \partial r)^2 + (\partial B / \partial z)^2}. \quad (3.24)$$

На оси z , т.е. при $r = 0$, следует использовать специальные формулы. В этом случае получим

$$B_r = 0, B_z = \sum_{j=1}^N B_z^{(j)}, B = \left| \sum_{j=1}^N B_z^{(j)} \right|, \partial B / \partial r = 0, |\nabla B| = |dB_z / dz| = \left| \sum_{j=1}^N dB_z^{(j)} / dz \right|, \quad (3.25)$$

и в выражениях (3.25) необходимо применять формулы (3.19).

Проиллюстрируем вышеизложенное конкретными примерами расчетов. Рассмотрим плоское тонкое кольцо радиусом a , по которому протекает ток интенсивностью J . Направим ось z вдоль оси симметрии кольца, перпендикулярно его плоскости, а начало отсчета выберем в плоскости кольца. Очевидно, что распределение характеристик поля будет осесимметричным, и тогда вектор магнитной индукции имеет две отличные от нуля составляющие: осевую B_z и радиальную $B_r = B_x$. В пределах применимости закона Био-Савара-Лапласа конечные формулы для расчета характеристик поля можно получить только на оси z , вдоль которой в силу симметрии радиальная составляющая вектора магнитной индукции обращается в нуль. Эти формулы имеют вид

$$B_z = \frac{\mu_0 a^2 J}{2} \frac{1}{(a^2 + z^2)^{3/2}}, \quad \nabla B_z = -\frac{3\mu_0 a^2 J}{2} \frac{z}{(a^2 + z^2)^{5/2}}. \quad (3.26)$$

Зависимости изменения поля и градиента вдоль оси показаны на рис. 3.2 (расчеты выполнены для витка радиусом 30 см при силе тока в 10 А, причем значения индукции для удобства графического представления умножены на 5). Из зависимостей (3.19) нетрудно найти точку наибольшего значения градиента поля на оси z , которое достигается при $z = 0,5a$, что хорошо видно на графике. Максимум градиента поля достигается на некотором расстоянии от источника, однако это выполняется только в непосредственной близости к оси симметрии кольцевого тока.

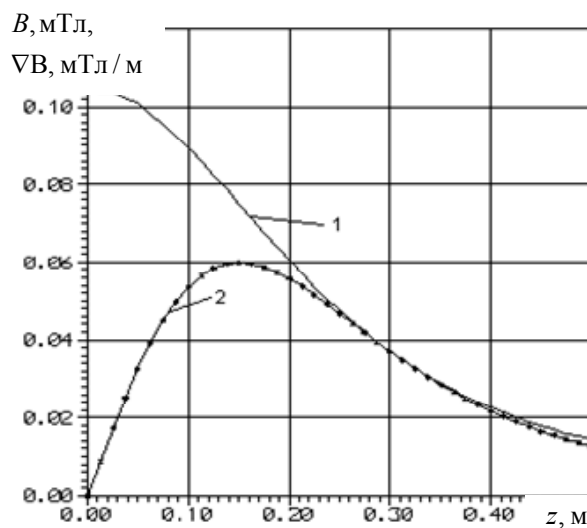


Рис. 3.2. Зависимости индукции и градиента поля на оси симметрии кольцевого тока:
1 – $5B_z$, 2 – $|\nabla B_z|$.

Для других точек пространства поле будет иметь векторный характер, и отличными от нуля будут обе составляющие вектора магнитной индукции. В этом случае характеристики поля будут определяться контурными интегралами, которые не могут быть найдены аналитически и их приходится вычислять численно.

Характерные зависимости модуля магнитной индукции и модуля градиента от радиальной координаты в некоторых сечениях, параллельных плоскости кольца, приведены на рис. 3.3, 3.4, и расчеты выполнены для указанных выше значений параметров задачи.

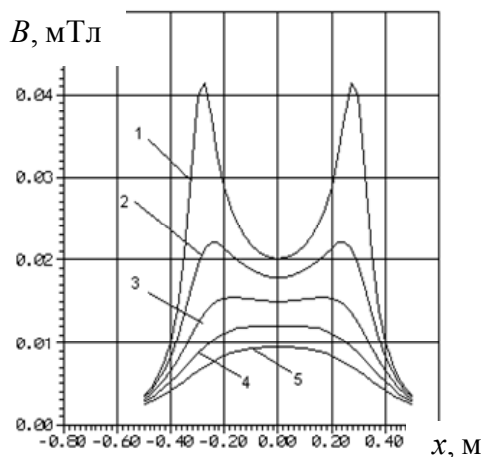


Рис. 3.3. Распределение модуля поля в сечениях, параллельных плоскости кольца:
1 – $z = 5$ см, 2 – $z = 10$ см, 3 – $z = 15$ см, 4 – $z = 20$ см, 5 – $z = 25$ см.

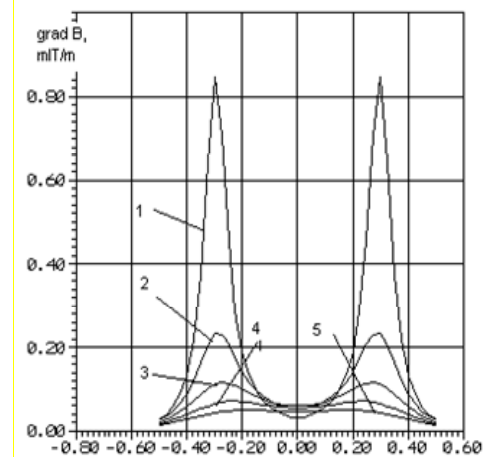


Рис. 3.4. Распределение модуля градиента поля в сечениях, параллельных плоскости кольца:
1 – $z = 5$ см, 2 – $z = 10$ см, 3 – $z = 15$ см, 4 – $z = 20$ см, 5 – $z = 25$ см.

Как видно из графиков, напротив контура кольца наблюдаются резкие всплески поля, а, значит, и его градиента, причем величины и поля, и градиента возрастают по мере приближения к плоскости кольца. Это объясняется тем, что в плоскостях, параллельных плоскости кольца, именно эти точки оказываются наиболее близкими к источнику поля, в данном случае – элементу кольца.

В качестве второго примера рассмотрим соленоид конечной длины. Известно, что в достаточно длинном соленоиде поле будет однородным и направлено параллельно его оси симметрии z . Следовательно, внутри соленоида никаких сил возникнуть не может. Такие силы возникают на краю соленоида, где поле начинает резко спадать. Поэтому, как и для одного кольца, максимум градиента будет достигаться на некотором расстоянии от края соленоида. Следовательно, размещая биологический объект вдоль оси соленоида и перемещая его вдоль нее, в принципе, можно доставить орган-мишень в необходимую точку пространства.

Вместе с тем, и в данном случае возникают определенные технические трудности. В качестве примера приведем некоторые результаты расчетов по определению характеристик магнитного поля для соленоида конечной длины. При расчетах размеры радиуса соленоида были приняты такими же, как и для кольца. Соленоид, длиной 1,45 м, моделировался системой, состоящей из тридцати колец. Результаты расчета при значениях токов в кольцах в 1 А представлены на рис. 3.5 – 3.7. На рис. 3.5 показано распределение поля вдоль оси симметрии (от центра соленоида), а на рис. 3.6, 3.7 распределение поля и модуля градиента поля в некоторых плоскостях параллельных краю соленоида. Начало отсчета оси z выбрано на краю соленоида.

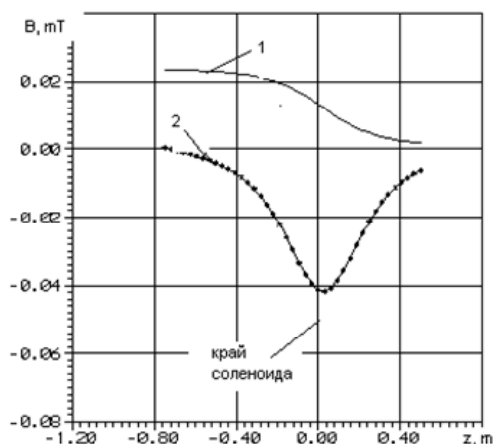


Рис. 3.5. Зависимости поля и градиента поля на оси симметрии соленоида: 1 – B_z , 2 – ∇B_z .

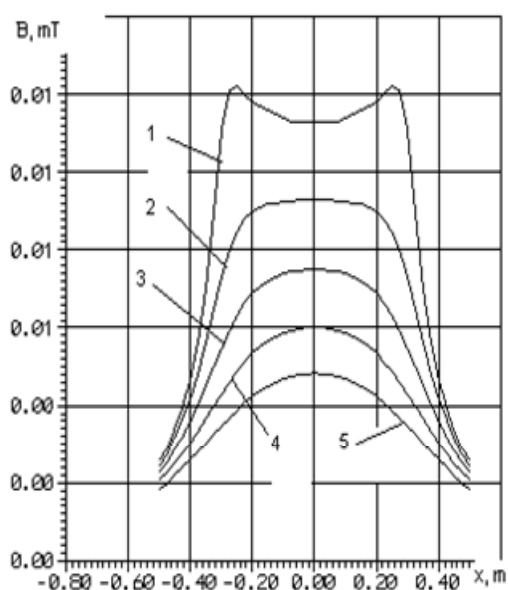


Рис. 3.6. Распределение модуля поля в сечениях, параллельных плоскости края соленоида:

1 – $z = 5$ см, 2 – $z = 10$ см, 3 – $z = 15$ см, 4 – $z = 20$ см, 5 – $z = 25$ см.

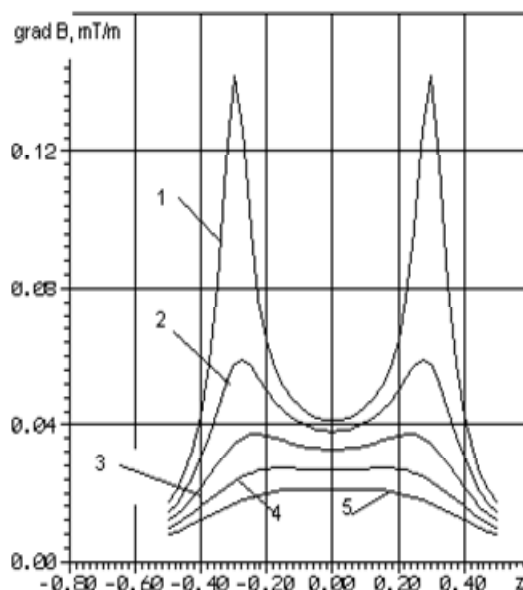


Рис. 3.7. Распределение модуля градиента поля в сечениях, параллельных плоскости края соленоида:

Из вида кривых можно сделать следующие заключения. Максимум градиента по оси z в отличие от кольца достигается в непосредственной близости от края соленоида. Объясняется это тем, что рассматривается соленоид конечной длины (а именно такой и можно реализовать практически) и спад поля начинается гораздо раньше, чем для полубесконечного соленоида. Вместе с тем, распределение поля в параллельных плоскостях за краем соленоида имеют такие же резкие всплески, как и в случае одиночного кольца и возникают в тех же зонах напротив краев. При этом абсолютные значения градиентов в этих зонах также значительно превышают аналогичные значения на оси симметрии.

Таким образом, возникает та же ситуация, что и в случае одиночного кольца, так как для устранения этих нежелательных всплесков снова необходимо значительно увеличивать диаметр соленоида. С другой стороны, чтобы устранить нежелательные градиенты вне органа-мишени необходимо увеличивать длину соленоида. Эти обстоятельства также ограничивают возможность использования соленоидов в качестве аппликаторов для биологических объектов большого размера.

4. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

В настоящем разделе приводятся некоторые результаты экспериментальных исследований, проведенных в лаборатории фирмы «Concentog GmbH» при непосредственном участии автора как в самих экспериментах, так и в разработке методик их проведения, обработке результатов и в создании необходимого припрограммного обеспечения для автоматизации процесса измерений магнитных полей.

4.1. Определение магнитных моментов агрегатов наночастиц

Для удобства изложения уточним в соответствии с [37, 87] значения используемых в разделе терминов. Тело, намагниченное так, что во всех точках его напряженность намагниченности J одна и та же, как по величине, так и по направлению, называется однородно намагниченным. Для однородно намагниченного тела магнитный момент μ можно найти по формуле $\mu = JV$, где V – объем тела. помещенные в однородном магнитном поле магнитно-изотропный шар, а также эллипсоид, расположенный так, чтобы одна из его главных осей совпадала с силовыми линиями поля, намагничиваются однородно. Точно так же намагничивается однородно в однородном поле и стержень, если его материал однородный и изотропный, а ось стержня совпадает с силовыми линиями поля. Для напряженности намагниченности в случае однородных тел имеют место формулы $J = [\kappa / (1 + 4\eta\kappa / 3)]H$ для шара и $J = [\kappa / (1 + \kappa N)]H$ для эллипсоида вращения в случае, когда ось вращения параллельна силовым линиям. Здесь $\kappa = (\kappa_1 - \kappa_2) / (1 + 4\pi\kappa_2)$ – кажущаяся магнитная восприимчивость исследуемого тела, κ_1, κ_2 суть истинные магнитные восприимчивости данного тела и окружающей среды соответственно. Для эллипсоида параметр $N = 4\pi(1/e^2 - 1)[(0,5e \lg(1+e)/(1-e) - 1]$ и e означает его эксцентриситет. В обоих случаях H – это напряженность магнитного поля, в котором размещены исследуемые тела.

В общем случае нахождение магнитных моментов наночастиц произвольной формы связано с решением некоторой задачи магнитостатики, однако некоторые оценки соответствующих значений можно получить из следующих соображений. Для полей малой интенсивности можно принять [19, 86, 87], что магнитный момент единицы объема M пропорционален напряженности магнитного поля

$$M(H) = kH. \quad (4.1)$$

Значение коэффициента пропорциональности k зависит от формы частицы, и в качестве примера для эллипсоидов вращения с различным отношением длины L к диаметру D представлено в табл. 4.1, заимствованной из [89]. Из этих данных, в частности, следует, что с удлинением частиц магнитные моменты возрастают.

Таблица 4.1. Коэффициенты пропорциональности для оценки магнитных моментов эллипсоидальных частиц

L/D	0,00	0,10	0,25	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00
$k = M/H$	1,00	1,19	1,45	1,90	3,00	5,75	12,50	18,00

Магнитные наночастицы и их агрегаты имеют сложное строение, и точная их форма фактически неизвестна. Вместе с тем, их магнитные моменты могут быть найдены экспериментально для выбранного типа магнитных частиц. С этой целью и были проведены специальные экспериментальные исследования.

Суспензия, состоящая из заменителя плазмы крови и ферромагнитных наночастиц, помещалась в стеклянную кювету в виде прямоугольного параллелепипеда, установленную вертикально. К боковой грани кюветы прикладывался постоянный магнит, создающий магнитное поле, направленное перпендикулярно к этой стенке (рис. 4.1). Под действием поля частицы приходят в движение и через некоторое время собираются возле стенки, граничащей с магнитом. Время движения частиц оценивается по прозрачности суспензии, так как мутная в присутствии наночастиц жидкость после приложения поля становится прозрачной. Прозрачность суспензии фиксируется фотодиодом по интенсивности светопропускания. Измеряя время t , в течение которого интенсивность светопропускания суспензии достигает максимума, можно оценить среднюю скорость движения частиц v по формуле $v=L/t$, где L – линейный размер кюветы в направлении их движения.

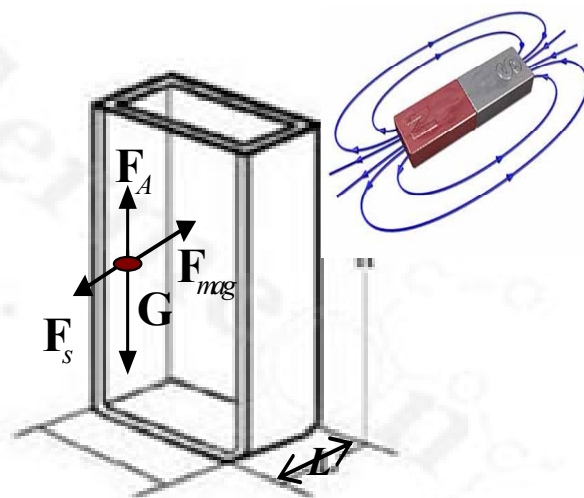


Рис. 4.1. Схема эксперимента для определения магнитных моментов агрегатов.

В общем случае отдельные наночастицы в магнитном поле слипаются, образуя некоторые агрегаты. Размеры агрегатов существенно зависят от напряженности магнитного поля и для фиксированной величины поля будут случайными величинами. Это несколько усложняет задачу нахождения связи между движением частиц и их магнитными свойствами, но определенную (приближенную) оценку значений магнитных моментов наночастиц (агрегатов) можно получить из следующих соображений.

Итак, рассматривается суспензия, состоящая из жидкости с вязкостью, соответствующей плазме крови и агрегатов магнитных наночастиц, находящаяся под действием магнитного поля постоянного магнита. Требуется построить адекватную физико-математическую модель процесса и связать параметры, характеризующие агрегаты (магнитный момент) с контролируемыми в эксперименте параметрами (прозрачностью, временем движения, концентрацией наночастиц).

Будем считать отдельный агрегат материальной точкой (частицей). Ясно, что время движения t_f , необходимое частице для достижения стенки является случайной величиной, так как начальное положение частицы может быть любым (в пределах поперечного сечения сосуда). Также масса частицы, сила сопротивления движению и магнитный момент, являются случайными величинами, так как размер агрегатов имеет случайный характер [89, 90], а, кроме того, в присутствии магнитного поля агрегаты могут объединяться в цепочки, размеры которых зависят от величины поля. Масса

частицы пропорциональна ее объему, сила сопротивления движению пропорциональна площади поперечного сечения, а величина магнитного момента зависит от интенсивности поля, магнитных свойств материала, объема и формы частицы, а также некоторых других физических характеристик. Если принять эффективный диаметр частицы в качестве случайной величины, то ее объем, площадь сечения и магнитный момент будут случайными функциями этой величины.

Таким образом, при описании движения частиц необходимо учесть стохастический характер коэффициентов соответствующих дифференциальных уравнений. Для этого достаточно построить решения уравнений с детерминированными коэффициентами, а после решения задачи при известной функции распределения частиц по размерам найти математическое ожидание (среднее значение) времени, необходимого для просветления суспензии, а также соответствующий доверительный интервал (дисперсию и среднеквадратичное отклонение).

Движение частицы естественно описывать в декартовой прямоугольной системе координат xOz , ось x направим вдоль вектора напряженности магнитного поля, ось z – вертикально вверх. Начало координат совместим с областью контакта магнита. На частицу действуют сила тяжести $\mathbf{G} = m\mathbf{g}$ (m – масса частицы, \mathbf{g} – ускорение силы тяжести), направленная вертикально вниз, сила Архимеда \mathbf{F}_A , сила магнитного притяжения \mathbf{F}_{mag} , и сила сопротивления движению \mathbf{F}_S . При движении в вязкой жидкости сила сопротивления дается формулой Стокса, и ее проекции на оси равны $F_x = 3\pi\eta du_x$, $F_z = 3\pi\eta du_z$, где η – динамическая вязкость жидкости, d – эффективный диаметр частицы, u_x, u_z – компоненты вектора скорости.

Для однонаправленного переменного поля $B = B(x)$ после ориентации диполей по полю выражение для магнитной силы как и в [89] может быть принято в виде

$$F_{mag} = \beta V \mu(H) \frac{dH}{dx}, \quad (4.2)$$

где β – коэффициент пропорциональности, зависящий от принятой системы единиц физических величин, V – объем частицы, H – напряженность поля, $\mu(H)$ – средний магнитный момент, приходящийся на единицу объема. Магнитный момент единицы объема, в соответствии с (4.1), в линейном приближении пропорционален напряженности магнитного поля.

Запишем уравнения движения частицы (второго закона Ньютона) в проекциях на оси в виде системы уравнений первого порядка в форме Коши (для удобства дальнейшего численного интегрирования)

$$\begin{aligned} m \frac{du_x}{dt} &= 3\pi\eta du_x - \beta V k H \frac{dH}{dx}, \\ m \frac{du_z}{dt} &= -3\pi\eta du_z - G + F_A, \\ \frac{dx}{dt} &= u_x, \quad \frac{dz}{dt} = u_z. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Так как масса частицы и сила Архимеда пропорциональны ее объему, то первые два уравнения (4.3) могут быть переписаны в виде

$$\begin{aligned}\frac{du_x}{dt} &= \frac{3\pi\eta d}{\rho V} u_x - \frac{\beta k H}{\rho} \frac{dH}{dx}, \\ \frac{du_z}{dt} &= -\frac{3\pi\eta d}{\rho V} u_z - g\left(1 - \frac{\rho}{\rho_f}\right),\end{aligned}\quad 0 \quad (4.4)$$

где ρ, ρ_f – плотности частицы и жидкости соответственно. Нетрудно заметить, что при такой записи уравнения движения содержат одну случайную функцию

$$\alpha(d) = \frac{3\pi\eta}{\rho} \frac{d}{V} = \frac{3\pi\eta}{\rho} \frac{1}{\gamma d^2}, \quad (4.5)$$

где γ – коэффициент, зависящий от формы частицы.

Для уравнений (4.3), (4.4) необходимо сформулировать начальные условия. Координату $z(0) = z_0$, не умаляя общности, можно принять равной нулю, а координата $x(0) = x_0$ может принимать любое значение в пределах размера кюветы. Естественно предположить, что в начальный момент частицы распределены в суспензии равномерно. Тогда $x_0 = L/2$, так как математическое ожидание случайной величины, равномерно распределенной на отрезке $[0, L]$ равно $L/2$ [91]. Таким образом, начальные условия имеют вид

$$x_0 = L/2, \quad z_0 = 0. \quad (4.6)$$

При $t = 0$ частицы покоились, поэтому их начальные скорости

$$u_{x0} = 0, \quad u_{z0} = 0. \quad (4.7)$$

Системы уравнений (4.3), (4.4) распадаются на два независимых уравнения, которые описывают движение в направлении осей. Для движения вдоль вертикальной оси можно сразу выписать решение задачи Коши в явном виде

$$z(t) = -\frac{g^*}{\alpha} t + \frac{g^*}{\alpha^2} (1 - e^{-\alpha t}), \quad (4.8)$$

$$u_z(t) = -\frac{g^*}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}), \quad g^* = (1 - \rho/\rho_f)g. \quad (4.9)$$

Уравнения, описывающие движение вдоль оси x , нелинейные, так как обычно напряженность поля сложным образом зависит от координаты. Например, в случае постоянного магнита, в соответствии с результатами работы [90], выражения для напряженности поля и его градиента имеют вид

$$H_x = H_0 \left[1 - \frac{x}{(1+x^2)^{1/2}} \right], \quad \frac{dH_x}{dx} = -H_0 \left[\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} \right]. \quad (4.10)$$

В этом случае уравнения движения приходится интегрировать численно. Для решения задачи Коши в работе используется метод Рунге-Кутты-Фальберга четвертого-пятого порядка, описанный в [92] и обеспечивающий более высокую точность численного интегрирования по сравнению со стандартным матобеспечением.

Остается учесть стохастический характер уравнений. Коэффициенты уравнений движения являются функциями независимой случайной величины, в качестве которой

принят диаметр частиц. Выполненное преобразование уравнений показывает, что решения будут зависеть только от функции (4.5).

Плотность распределения частиц по размерам (диаметрам) во многом определяется технологией изготовления. В работе [90] было исследовано распределение магнитных наночастиц по размерам, проведенное тремя различными методами. В результате было установлено, что наиболее подходящим в данном случае оказывается логарифмически-нормальное распределение, плотность вероятности которого определяется выражением [91]

$$p(d) = \frac{\exp(-2\sigma^2)}{d_m \sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\ln^2(d/d_m)/(2\sigma^2)\right], \quad (4.11)$$

где d_m – наиболее вероятный диаметр частицы, σ – стандартное отклонение.

В результате решения уравнений движения находим зависимости (для вертикального направления в явном виде):

$$x = x(t, \alpha), \quad u_x = u_x(t, \alpha), \quad (4.12)$$

$$z = z(t, \alpha) = -\frac{g^*}{\alpha}t + \frac{g^*}{\alpha^2}(1 - e^{-\alpha t}), \quad u_z = u_z(t, \alpha) = -\frac{g^*}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t}). \quad (4.13)$$

Формулы (4.12), (4.13) показывают, что искомые величины являются неслучайными функциями времени и параметра α , являющегося функцией случайной величины d , плотность распределения которой задается формулой (4.11). В этом случае математическое ожидание и дисперсия перемещений и скоростей определяются соответствующими интегралами [91]. Для координаты x будем иметь выражения

$$Mx = \int_{-\infty}^{\infty} p(\xi)x(t, \alpha)d\xi, \quad Dx = \int_{-\infty}^{\infty} [p(\xi)]^2 x(t, \alpha)d\xi - [Mx]^2, \quad \sigma = \sqrt{D}. \quad (4.14)$$

Аналогичные формулы записываются для второй координаты и соответствующих компонент скоростей. При этом в этом случае интегралы приходится вычислять численно при замене бесконечных пределов интегрирования минимальным и максимальным значениями диаметра. Значения последних могут быть получены при обработке результатов электронной микроскопии. В результате интегрирования устанавливаются зависимости математических ожиданий расстояний, которые проходят частицы до остановки, и их скоростей от времени, после чего нетрудно оценить среднее время движения частиц. Вместе с тем, оценку величин магнитных моментов можно получить из более простых соображений.

При движении частицы в вязкой жидкости под воздействием постоянной силы через некоторое время скорость ее движения перестает зависеть от времени и достигает своего предельного значения. На малых расстояниях, а именно такие и рассматриваются при изучении процесса движения частицы к стенке кюветы, градиент поля будет изменяться незначительно, и можно считать его постоянным, равным, например, некоторому среднему значению. Тогда и магнитную силу можно считать независимой от координат. При достижении предельного значения скорости v сила вязкого сопротивления Стокса будет равна силе действия магнитного поля, что позволяет составить уравнение

$$3\pi\eta vd = \mu \nabla B. \quad (4.15)$$

Из (4.15) находится эффективное значение модуля магнитного момента

$$\mu = 3\pi\eta vd / \nabla B, \quad (4.16)$$

Так как характеристики магнитного поля для произвольного постоянного магнита зависят от его формы и некоторых других параметров, предварительно с использованием датчиков Холла [20] были измерены значения магнитной индукции используемого в экспериментах постоянного магнита на основе Co–Sm в зависимости от расстояния до его поверхности. Полученная зависимость показана на рис. 4.2, где с помощью маркеров отмечены экспериментальные значения. Эти данные позволяют определить среднее значение градиента поля, так как для однонаправленного поля это будет просто производная $\nabla B = dB / dx$, которую нетрудно найти, используя некоторую аппроксимацию экспериментальной кривой или графическое дифференцирование.

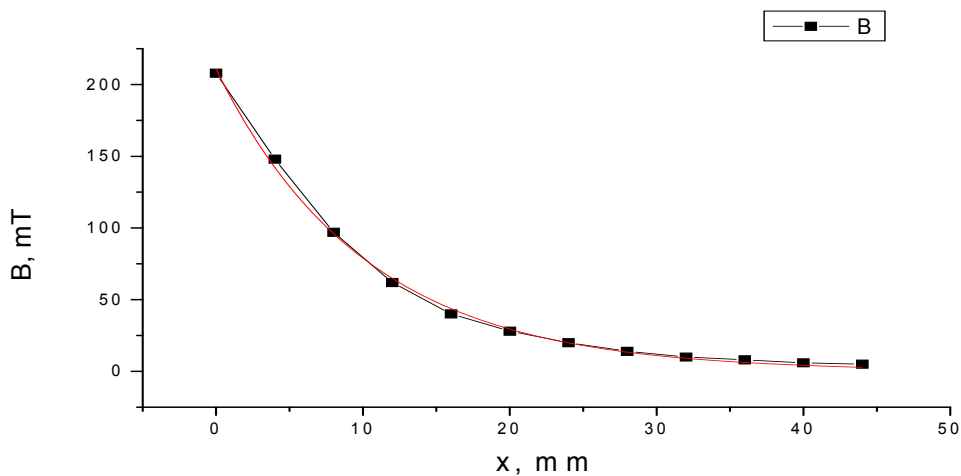


Рис. 4.2. Зависимость магнитной индукции B от расстояния x от поверхности постоянного магнита на основе Co–Sm.

Значения магнитных моментов зависят от модуля градиента поля и концентрации магнитных частиц в суспензии. Поэтому в эксперименте использовались суспензии с различной концентрацией магнитных наночастиц, и изучалось движение агрегатов при различных значениях магнитной индукции и ее градиента.

Некоторые результаты выполненных исследований представлены в табл. 4.2 и на рис. 4.3, 4.4. При вычислении магнитных моментов агрегатов было сделано предположение, что цепочка связанных наночастиц может состоять из 1, 4 и 7 звеньев, а эффективный диаметр – принимать значения 15 нм, 30 нм и 45 нм. Для вязкости жидкости было принято соответствующее вязкости крови значение $\eta = 0,01 \text{ кг} / (\text{м} \cdot \text{с})$. В экспериментах исследовались суспензии с различной объемной концентрацией, состоящей 2,5%, 0,8% и 0,08%. Расчетные значения скоростей находились указанным выше способом при измерении времени остановки магнитных частиц у стенки кюветы. Расчетные значения магнитных моментов агрегатов для различной комбинации значений указанных параметров приведены в табл. 4.2.

На рис. 4.3 показана зависимость вычисленных значений скорости движения агрегатов v при концентрации магнитных наночастиц, равной 2,5%, в зависимости от величины градиента приложенного магнитного поля. Соответственно, на рис. 4.4 для фиксированного значения градиента напряженности магнитного поля показана зависимость найденной скорости частиц от их концентрации.

Таблица 4.2. Экспериментальные значения скоростей движения агрегатов наночастиц и средние значения магнитных моментов в зависимости от расстояния от поверхности магнита при разных значениях градиента, концентрации и эффективных радиусах сечений

Расстояние x , мм	Принятый градиент поля, Тл/м	Концентрация C , %	Вычисленная скорость $v \cdot 10^4$, м/с	Принятый эффективный радиус сечения агрегатов, нм	Вычисленные значения эффективных магнитных моментов агрегатов, $10^{13} \text{ А} \cdot \text{м}^2$
7,5	13	2,5	6	15	1,3
7,5	13	2,5	6	30	2,6
7,5	13	2,5	6	45	3,9
12,5	6,1	2,5	4	15	1,9
12,5	6,1	2,5	4	30	3,7
12,5	6,1	2,5	4	45	5,6
17,5	3,2	2,5	3	15	2,6
17,5	3,2	2,5	3	30	5,3
17,5	3,2	2,5	3	45	7,9
12,5	6,1	0,8	3,6	15	1,7
12,5	6,1	0,8	3,6	30	3,3
12,5	6,1	0,8	3,6	45	5,0
12,5	6,1	0,08	1	15	4,6
12,5	6,1	0,08	1	30	9,3
12,5	6,1	0,08	1	45	1,4

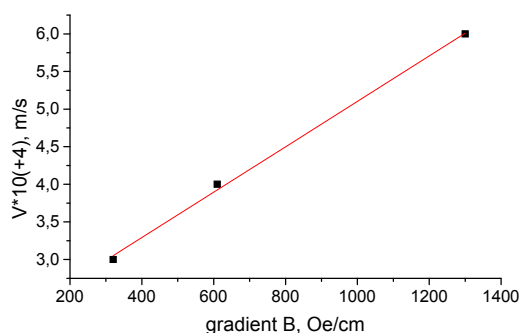


Рис. 4.3. Экспериментальная скорость движущихся агрегатов магнитных наночастиц в растворе глюкозы в зависимости от градиента поля при объемной концентрации наночастиц 2,5%.

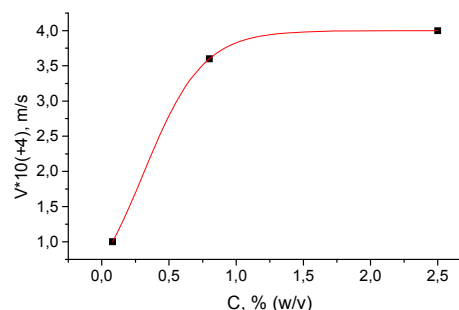


Рис. 4.4. Экспериментальная скорость v движущихся агрегатов магнитных наночастиц в растворе глюкозы в зависимости от объемной концентрации наночастиц при значении градиента поля 600 Э/см.

Из приведенных результатов следует, что эффективные магнитные моменты агрегатов наночастиц значительно превосходят магнитные моменты отдельных наночастиц и находятся в пределах от $1,3 \cdot 10^{-13} \text{ А} \cdot \text{м}^2$ до $9,3 \cdot 10^{-13} \text{ А} \cdot \text{м}^2$. Для сравнения отметим, что магнитные моменты отдельных наночастиц имеют величину нескольких магнетонов Бора ($\mu_B = 9,27 \cdot 10^{-24} \text{ А} \cdot \text{м}^2$). С другой стороны, из рис. 3.4 следует, что существуют предельные значения концентраций наночастиц (около 2%), при

достижении которых средняя скорость движения агрегатов под действием магнитного поля перестает возрастать.

4.2. Экспериментальное определение характеристик стационарных магнитных полей в фиксированной области пространства

Экспериментальное достоверное определение характеристик неоднородных магнитных полей в диапазоне изменения значений магнитной индукции от 1 мТл до 2 Тл и в настоящее время представляет собой достаточно сложную техническую проблему. Основные трудности возникают при определении физических параметров магнитных полей не в конкретной точке, а во всех точках некоторой области пространства. В произвольной триортогональной системе координат в общем случае векторы напряженности и индукции определяются тремя составляющими, и, таким образом, для получения полной информации полей необходимо измерение этих трех компонент. Поэтому в эксперименте одновременно используются три датчика Холла, образующих измерительную розетку, что позволяет находить составляющую вектора магнитной индукции (напряженности) в произвольном направлении.

В эксперименте исследовались магнитные поля, обладающие осевой симметрией. В использованной установке измерялись все три компоненты вектора магнитной индукции, хотя фактически достаточно измерить две составляющие вектора магнитной индукции (напряженности): радиальную B_r и осевую B_z . Поэтому измеренные значения третьей компоненты использовались для контроля правильности установки магнитной системы по отношению к измерительному устройству. Общий вид разработанной измерительной установки, показан на рис. 4.5.



Рис. 4.5. Общий вид лабораторной измерительной установки для определения характеристик стационарных неоднородных магнитных полей.

Установка состоит из трех составных частей, каждая из которых представляет собой энергонезависимое устройство, объединяемое в общую измерительную систему посредством стандартного интерфейса RS-232:

- устройства позиционирования, выполненного на базе двухкоординатного планшетного плоттера (графопостроителя) настольного типа для формата А3;
- измерительного блока;
- компьютера.

Все измерения и обработка результатов выполняются в автоматическом режиме под управлением компьютера. Измерительная установка позволяет производить перемещение штанги с установленной на ней датчиками Холла в горизонтальной плоскости в пределах выбранной области измерений (зоны сканирования) с фиксированным шагом, определяемым возможностями плоттера. Измерительный блок позволяет производить измерения трех составляющих вектора магнитной индукции. Результаты измерений трех составляющих и координаты положения измерительной штанги записываются в выходные файлы для последующей обработки. Погрешность измерения составляющих вектора магнитной индукции не превосходит величины $\Delta = 0,5$ мТл, а устройство позиционирования обеспечивает точность установки измерительной штанги до 0,1 мм.

Практический интерес в данном случае представляют зависимости модуля вектора магнитной индукции и градиента модуля от координат. Эти величины непосредственно не измеряются, но могут быть вычислены при известных зависимостях составляющих по формулам

$$\nabla B = \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2} \mathbf{k}. \quad (4.17)$$

Представление о достигаемой точности измерений можно составить, вычисляя дивергенцию поля. В соответствии с уравнениями Максвелла в любой точке, в которой действует магнитное поле, должно выполняться соотношение

$$\operatorname{div} B = \partial B_x / \partial x + \partial B_y / \partial y + \partial B_z / \partial z = 0. \quad (4.18)$$

Так как значения компонент поля могут быть измерены только в дискретных точках, то при обработке производные должны быть заменены конечными разностями. В программе для вычисления частных производных результатов используются симметричные разности второго порядка, имеющие второй порядок точности по приращению аргумента, за исключением крайних точек интервала. В соответствии со сказанным, например, для вычисления частной производной некоторой функции $F(x, y, z)$ по x , используется формула

$$\frac{\partial F}{\partial x} \approx \frac{2(F_{i+2} - F_i)}{x_{i+2} - x_i},$$

где $F_i = F(x_i)$, x_i – текущее значение аргумента.

Для крайних точек интервала используются несимметричные разности первого порядка, т.е.

$$\frac{\partial F}{\partial x} \approx \frac{F_1 - F_0}{x_1 - x_0}.$$

Практический интерес представляет собой оценка погрешности экспериментальных результатов. Пусть X_1, X_2, X_3 непосредственно измеренные величины, а $\Delta X_1, \Delta X_2, \Delta X_3$ – их абсолютные погрешности (неслучайные). Тогда для нахождения абсолютной погрешности вычисления модуля вектора магнитной индукции следует использовать формулу для функций многих переменных:

$$\Delta Y = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial F}{\partial X_i} \Delta X_i \right|. \quad (4.19)$$

Следовательно, при вычислении модуля поля погрешность будет определяться выражением

$$\Delta B = \frac{B_x}{B} \Delta B_x + \frac{B_y}{B} \Delta B_y + \frac{B_z}{B} \Delta B_z \leq 3\Delta, \quad (4.20)$$

и при $\Delta = 0,5$ мТл не превосходит 1,5 мТл.

Погрешность экспериментального определения модуля градиента поля и дивергенции определяется погрешностями вычисления частных производных. Так как производные заменяются конечными разностями, то для оценки абсолютной погрешности вычисления производных $\Delta \left\{ \frac{\partial F}{\partial x} \right\}$ будем иметь выражение

$$\Delta \left\{ \frac{\partial F}{\partial x} \right\} \approx \Delta \left\{ \frac{2(F_{i+2} - F_i)}{x_{i+2} - x_i} \right\} = \pm \frac{2(F_{i+2} - F_i) \cdot [\Delta(x_{i+2} - x_i)] + 2[\Delta(F_{i+2} - F_i)](x_{i+2} - x_i)}{(x_{i+2} - x_i)^2}. \quad (4.21)$$

Тогда относительная погрешность $\varepsilon \left\{ \left| \frac{\partial F}{\partial x} \right| \right\}$ может быть оценена по формуле

$$\varepsilon \left\{ \left| \frac{\partial F}{\partial x} \right| \right\} = \pm \left[\frac{\Delta(F_{i+2} - F_i)}{F_{i+2} - F_i} + \frac{\Delta(x_{i+2} - x_i)}{(x_{i+2} - x_i)} \right]. \quad (4.22)$$

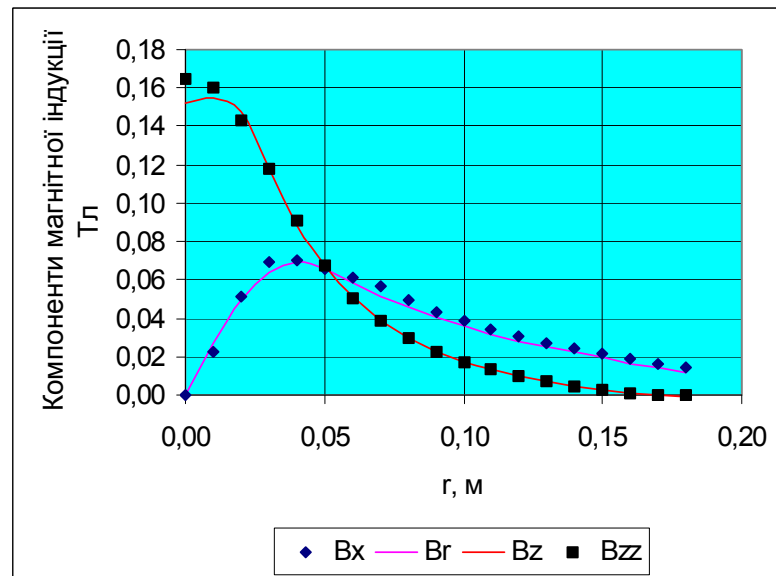


Рис. 4.6. Экспериментальные и расчетные зависимости компонент магнитной индукции для конической катушки.

Из этих формул следует, что погрешность вычисления производной существенно зависит от интенсивности поля. При этом погрешность вычисления модуля вектора магнитной индукции не превосходит 1,5 мТл, а погрешность установки устройства позиционирования составляет 0,1 мм. Тогда, например, при изменении поля на 10 мТл при шаге устройства позиционирования 5 мм получаем верхнюю границу погрешности вычисления производной порядка 30%, причем основной вклад в погрешность вносит погрешность определения поля. При возрастании

модуля производной погрешность уменьшается, и при изменении поля на 100 мТл не будет превосходить 3%.

В качестве иллюстрации на рис. 4.6 приведены экспериментальные и расчетные зависимости составляющих магнитного поля для конусообразной катушки; сплошными линиями показаны расчетные данные, а маркерами отмечены данные измерений.

4.3. Нахождение характеристик поля при сокращенном объеме испытаний

В настоящем разделе приводятся дополнительные результаты, полученные при разработке измерительного устройства для определения характеристик магнитных полей осесимметричных источников. В процессе проведения испытаний и обработки результатов измерений выяснилось, что для получения достаточно полной и достоверной информации связано с большим объемом весьма трудоемких исследований. Необходимость вычисления частных производных от модуля вектора магнитной индукции для нахождения градиента поля приводит к тому, что шаг сканирования (установка устройства позиционирования) поля должен быть принят достаточно малым (порядка 1–2 мм).

Поэтому, так как скорость установки датчиков в необходимую точку пространства ограничена техническими возможностями устройства позиционирования, время проведения испытаний существенно возрастает, достигая при необходимом шаге нескольких часов. Это обстоятельство побудило к поиску альтернативных способов проведения измерений и обработки результатов.

Анализ уравнений магнитостатики показал, что объем испытаний оказывается возможным существенно сократить за счет разработки специального математического обеспечения. При этом оказалось, что для нахождения характеристик поля в пространственной области при отсутствии источников достаточно выполнить сканирование поля только в одной плоскости. Соответственно в случае осесимметричных источников поля задача сводится к измерениям вдоль одной, произвольной, заранее выбранной прямой линии. При этом для дальнейшей обработки необходимы измерения только одной из компонент вектора магнитной индукции.

В области, в которой отсутствуют источники магнитного поля, в случае осесимметричных магнитных полей уравнения магнитостатики записываются в виде

$$\operatorname{rot} B = 0, \operatorname{div} B = 0, \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} = 0, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial(rB_r)}{\partial r} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0. \quad (4.24)$$

Из системы (4.24) можно исключить функцию B_z , для чего достаточно продифференцировать первое уравнение системы по z , а второе по r и сложить полученные равенства почленно. В результате приходим к уравнению

$$\frac{\partial^2 B_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_r}{\partial r} - \frac{1}{r^2} B_r + \frac{\partial^2 B_r}{\partial r^2} = 0. \quad (4.25)$$

Аналогично исключается функция B_r , и для B_z получается уравнение

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2} = 0. \quad (4.26)$$

Для системы (4.24), и, соответственно для уравнений (4.25), (4.26), необходимо сформулировать граничные условия. Предполагается, что в базовой плоскости $z = 0$

заданы составляющие поля или их частные производные. Так как рассматривается полупространство $z > 0$, представляющее собой неограниченную область, то дополнительно следует учесть, что при $z \rightarrow \infty$, $r \rightarrow \infty$ компоненты поля должны стремиться к нулю.

Решение краевой задачи для уравнений (4.25), (4.26) получим методом интегральных преобразований [82–85]. Если на границе области в плоскости $z = 0$ заданы компоненты поля B_r, B_z , то удобно использовать синус-преобразование Фурье. Если известны частные производная $\partial B_r / \partial z$, $\partial B_z / \partial z$, то следует применить косинус-преобразование Фурье [84] по координате z . При этом результат выполненных преобразований

$$f^{c(s)}(\lambda) = \int_0^{\infty} f(x) \begin{cases} \cos(x\lambda) \\ \sin(x\lambda) \end{cases} dx,$$

где λ – параметр преобразования Фурье, а верхние индексы c, s соответствуют косинус- или синус-преобразованию Фурье.

Обращение преобразования записывается в виде

$$f^{c(s)}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f^{c(s)}(\lambda) \begin{cases} \cos(x\lambda) \\ \sin(x\lambda) \end{cases} d\lambda.$$

Так как в процессе испытаний непосредственно измеряются составляющие магнитной индукции, то следует использовать синус-преобразование Фурье. Для уравнений (4.24), (4.25) после применения синус-преобразования Фурье соответственно получим

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial^2 r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \right) \int_0^{\infty} r B_r \sin(\lambda z) dz + \int_0^{\infty} \frac{\partial^2 B_r}{\partial^2 z^2} \sin(\lambda z) dz &= 0, \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial^2 r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \right) \int_0^{\infty} r B_z \sin(\lambda z) dz + \int_0^{\infty} \frac{\partial^2 B_z}{\partial^2 z^2} \sin(\lambda z) dz &= 0. \end{aligned}$$

Некоторые преобразования в пространстве изображений приводят к обыкновенным дифференциальным уравнениям вида

$$\frac{\partial^2 B_r^s}{\partial^2 r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_r^s}{\partial r} + \left(\lambda^2 - \frac{1}{r^2} \right) B_r^s = \lambda B_r \cos(\lambda z) \Big|_0^{\infty}, \quad (4.27)$$

$$\frac{\partial^2 B_z^s}{\partial^2 r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_z^s}{\partial r} + \left(\lambda^2 - \frac{1}{r^2} \right) B_z^s = \lambda B_z \cos(\lambda z) \Big|_0^{\infty}, \quad (4.28)$$

где

$$B_r^s = \int_0^{\infty} \frac{\partial B_r}{\partial z} \sin(\lambda z) dz, \quad B_z^s = \int_0^{\infty} \frac{\partial B_z}{\partial z} \sin(\lambda z) dz$$

изображения соответствующих функций.

Так как $B_r \rightarrow 0, B_z \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$, то уравнения принимают вид

$$\frac{\partial^2 B_r^s}{\partial^2 r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_r^s}{\partial r} + \left(\lambda^2 - \frac{1}{r^2} \right) B_r^s = -\lambda B_r|_{z=0}, \quad \frac{\partial^2 B_z^s}{\partial^2 r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_z^s}{\partial r} - \lambda^2 B_z^s = -\lambda B_z|_{z=0}. \quad (4.29).$$

Здесь

$$B_r|_{z=0} = B_r(r, 0) = \varphi(r), \quad B_z|_{z=0} = B_z(r, 0) = \psi(r) \quad (4.30)$$

функции, известные из заданных граничных условий.

Для решения уравнений (4.28), (4.29) используем преобразование Ханкеля [84], которое определяется соотношением

$$H(f(r)) = f^H(\zeta) = \int_0^{\infty} r f(r) J_\nu(r\zeta) dr,$$

где $J_\nu(r\zeta)$ – функция Бесселя ν -го порядка, ζ – параметр преобразования.

В силу свойств преобразования Ханкеля для произвольной функции $f = f(r)$

$$H\left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\nu^2}{r^2} f\right) = -\zeta^2 f^H(\zeta)$$

получаем алгебраические уравнения при $\nu = 1$ для уравнения (4.29) и при $\nu = 0$ для уравнения (4.30)

$$-\zeta^2 B_r^{Hs}(\zeta) - \lambda^2 B_r^{Hs}(\zeta) = -\lambda \varphi^H(\zeta), \quad (4.31)$$

$$-\zeta^2 B_z^{Hs}(\zeta) - \lambda^2 B_z^{Hs}(\zeta) = -\lambda \psi^H(\zeta), \quad (4.32)$$

где изображения функций, задающих граничные условия, определяются интегралами

$$\varphi^H(\zeta) = -\int_0^{\infty} (B_r|_{z=0}) r J_1(r\zeta) dr, \quad \psi^H(\zeta) = -\int_0^{\infty} (B_z|_{z=0}) r J_0(r\zeta) dr. \quad (4.33)$$

Из алгебраических уравнений (4.31), (4.32) находятся решения в пространстве изображений

$$B_r^{Hs}(\zeta) = \frac{\lambda \varphi^H(\zeta)}{\zeta^2 + \lambda^2}, \quad (4.34)$$

$$B_z^{Hs}(\zeta) = \frac{\lambda \psi^H(\zeta)}{\zeta^2 + \lambda^2}. \quad (4.35)$$

Возвращаясь в пространство оригиналов, получаем решения исходных уравнений в виде повторных интегралов

$$B_r(r, z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \varphi^{Hs}(\zeta) \zeta J_1(r\zeta) d\zeta \int_0^{\infty} \frac{\lambda \sin(\lambda z)}{\lambda^2 + \zeta^2} d\lambda, \quad (4.36)$$

$$B_z(r, z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \psi^{Hs}(\zeta) \zeta J_0(r\zeta) d\zeta \int_0^{\infty} \frac{\lambda \sin(\lambda z)}{\lambda^2 + \zeta^2} d\lambda. \quad (4.37)$$

Внутренние интегралы в формулах (4.36), (4.37) вычисляются аналитически [93]:

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin(mx)}{a^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-ma},$$

и тогда получим соответственно

$$B_r(r, z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \varphi^{Hs}(\zeta) \zeta J_1(r\zeta) e^{-z\zeta} d\zeta, \quad (4.38)$$

$$B_z(r, z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \psi^{Hs}(\zeta) \zeta J_0(r\zeta) e^{-z\zeta} d\zeta. \quad (4.39)$$

В эти интегралы входят функции $\varphi^{Hs}(\zeta), \psi^{Hs}(\zeta)$, являющиеся результатом выполнения преобразования Ханкеля для функций $\varphi(r), \psi(r)$, которые задают значения составляющих поля в плоскости $z = 0$.

Таким образом, задача восстановления поля в полупространстве при отсутствии источников сводится к вычислению несобственных интегралов (4.33) и последующего вычисления интегралов (4.38), (4.39). Это означает, что не возникает необходимости проводить измерения во всей выбранной области, а достаточно выполнить сканирование только вдоль одной прямой линии в плоскости $z = 0$. Более того, оказывается, что при этом достаточно измерить лишь одну, например радиальную, составляющую вектора магнитной индукции. Этот вопрос рассматривается ниже.

Из представлений (4.38), (4.39) следует, что составляющие вектора индукции полностью определяются своими значениями на границе области. При этом, однако, функции $B_r(r, z), B_z(r, z)$ не являются независимыми, так как связаны между собой дифференциальными уравнениями (4.40), (4.45). Соответственно и значения в плоскости $z = 0$ оказываются связанными между собой. Для установления явных зависимостей находим частные производные компонент поля по z и по r , дифференцируя равенства (4.39), (4.40) под знаком интеграла. Эти же соотношения можно использовать для вычисления градиента поля.

С учетом известных рекуррентных соотношений для функций Бесселя целого порядка $(J_0(z))' = -J_1(z), (J_1(z))' = zJ_0(z) - J_1(z)$ приходим к следующим представлениям для частных производных компонент вектора магнитной индукции:

$$\frac{\partial B_r}{\partial z} = - \int_0^{\infty} \varphi^{Hs}(\zeta) \zeta^2 J_1(r\zeta) e^{-z\zeta} d\zeta, \quad (4.40)$$

$$\frac{\partial B_r}{\partial r} = \int_0^{\infty} \varphi^{Hs}(\zeta) \zeta^2 J_0(r\zeta) e^{-z\zeta} d\zeta - \frac{1}{r} B_r, \quad (4.45)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial r} = \int_0^{\infty} \psi^{Hs}(\zeta) \zeta^2 J_0(r\zeta) e^{-z\zeta} d\zeta, \quad (4.46)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial r} = \int_0^{\infty} \psi^{Hs}(\zeta) \zeta^2 J_1(r\zeta) e^{-z\zeta} d\zeta. \quad (4.47)$$

Подстановка этих выражений в уравнение для ротора приводит к равенству

$$\int_0^{\infty} \psi^{Hs}(\zeta) \zeta^2 J_1(r\zeta) e^{-z\zeta} d\zeta = \int_0^{\infty} \varphi^{Hs}(\zeta) \zeta^2 J_1(r\zeta) e^{-z\zeta} d\zeta. \quad (4.48)$$

Аналогично, при подстановке в уравнение для дивергенции получаем равенства

$$\int_0^{\infty} \varphi^{Hs}(\zeta) \zeta^2 J_0(r\zeta) e^{-z\zeta} d\zeta = \int_0^{\infty} \psi^{Hs}(\zeta) \zeta^2 J_0(r\zeta) e^{-z\zeta} d\zeta. \quad (4.49)$$

В частности, при $z=0$, должны выполняться уравнения

$$\int_0^{\infty} \psi^{Hs}(\zeta) \zeta^2 J_1(r\zeta) d\zeta = \int_0^{\infty} \varphi^{Hs}(\zeta) \zeta^2 J_1(r\zeta) d\zeta, \quad (4.50)$$

$$\int_0^{\infty} \varphi^{Hs}(\zeta) \zeta^2 J_0(r\zeta) d\zeta = \int_0^{\infty} \psi^{Hs}(\zeta) \zeta^2 J_0(r\zeta) d\zeta. \quad (4.51)$$

Предположим, что функция $B_r(r, z)$ найдена. Тогда будем иметь

$$\frac{\partial B_z}{\partial r} = \frac{\partial B_r}{\partial r} = \int_0^{\infty} \varphi^{Hs}(\zeta) \zeta^2 J_1(r\zeta) e^{-z\zeta} d\zeta. \quad (4.52)$$

Интегрируя уравнение (4.52) по r , получаем представление

$$B_z = -\int dr \int_0^{\infty} \varphi^{Hs}(\zeta) \zeta^2 J_1(r\zeta) e^{-z\zeta} d\zeta + g(z), \quad (4.53)$$

где $g(z)$ – произвольная функция.

Перестановка интегрирования в интеграле (4.53) с учетом тождества $\int J_1(r\zeta) dr = -(1/\zeta) J_0(r\zeta)$ приводит к уравнению

$$B_z = \int_0^{\infty} \varphi^{Hs}(\zeta) \zeta^2 J_0(r\zeta) e^{-z\zeta} d\zeta + g(z). \quad (4.54)$$

Подстановка представления (4.54) в выражение для дивергенции показывает, что $g'(z) = 0$. Следовательно, $g(z) = \text{const}$. Так как $B_z \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$, то $g(z) = 0$, и окончательно для нахождения B_z получаем формулу

$$B_z(r, z) = \int_0^{\infty} \varphi^{Hs}(\zeta) \zeta^2 J_0(r\zeta) e^{-z\zeta} d\zeta, \quad (4.55)$$

которая показывает, что функция B_z полностью определяется значениями другой составляющей вектора индукции B_r на границе $z=0$. Аналогично находится и представление для функции B_r через известные значения на границе $z=0$ составляющей B_z

$$B_r(r, z) = \int_0^{\infty} \psi^{Hs}(\zeta) \zeta^2 J_1(r\zeta) e^{-z\zeta} d\zeta. \quad (4.56)$$

На границе $z = 0$ будем иметь представления

$$\varphi(r) = B_r(r, 0) = \int_0^{\infty} \varphi^{Hs}(\zeta) \zeta J_1(r\zeta) d\zeta = \int_0^{\infty} \psi^{Hs}(\zeta) \zeta J_1(r\zeta) d\zeta, \quad (4.57)$$

$$\psi(r) = B_z(r, 0) = \int_0^{\infty} \psi^{Hs}(\zeta) \zeta J_0(r\zeta) d\zeta = \int_0^{\infty} \varphi^{Hs}(\zeta) \zeta J_0(r\zeta) d\zeta. \quad (4.58)$$

Таким образом, действительно оказывается достаточным измерить лишь одну составляющую вектора магнитной индукции, чтобы полностью определить поле в исследуемой области. На практике целесообразно все же измерять две составляющие вектора магнитной индукции, а полученные равенства использовать для контроля точности измерений.

Из изложенного следует, что задача восстановления характеристик поля в полупространстве сводится к вычислению интегралов с бесконечными пределами (несобственных интегралов первого рода). Поскольку в результате измерений для обработки имеются значения составляющих поля только в конечном числе точек, то интегрирование может быть выполнено только численно. В реализованных алгоритмах с этой целью используется метод Симпсона, а после нахождения образов – модифицированный метод численного интегрирования несобственных интегралов.

Вместе с тем, измерения могут быть осуществлены практически только в ограниченной области. Поэтому при вычислении образов измеренных составляющих магнитной индукции интегрирование в несобственных интегралах приходится заменять численным интегрированием в конечных пределах, т.е. использовать приближенные формулы

$$\varphi^{Hs}(\zeta) \approx -\int_0^a (B_r|_{z=0}) r J_1(r\zeta) dr, \quad \psi^{Hs}(\zeta) \approx -\int_0^a (B_z|_{z=0}) r J_0(r\zeta) dr. \quad (4.59)$$

где a – граница области сканирования по радиальной координате.

Составляющие поля быстро убывают при возрастании r вне области действия источника поля. Поэтому следует ожидать, что погрешность, возникающая при замене интегрирования в бесконечных пределах формулами (4.59), будет незначительной. Не приводя здесь аналитические выкладки, отметим, что практическую оценку погрешности нетрудно выполнить, проводя измерения при последовательном увеличении размеров области сканирования.

Таким образом, выполняя численное интегрирование при фиксированных значениях параметра ζ получаем значения образов функций, задающих граничные условия, которые необходимы для восстановления характеристик поля. Найденные значения функций образуют некоторые одномерные массивы, которые используются для последующих вычислений. Дальнейшая задача состоит в вычислении интегралов (4.57), (4.58). Так как значения образов функций, задающих граничные условия можно получить лишь в ограниченном числе точек, то с целью уменьшения трудоемкости расчетов и повышения точности вычисления несобственных интегралов с бесконечными пределами целесообразно использовать сплайн-интерполяцию. Это и реализовано в программе обработки результатов измерений.

Для оценки эффективности и правомочности разработанного подхода были выполнены тестовые расчеты. При этом использовались результаты измерений характеристик магнитного поля устройства, состоящего из набора катушек с ферромагнитными сердечниками. Полученные результаты подтвердили эффективность

разработанных вычислительных программ, которые позволяют находить значения функций в промежуточных точках, а также для экстраполяции экспериментальных данных за границы интервала измерений. В качестве иллюстрации на рис. 4.7 приведены измеренные и вычисленные значения составляющих магнитного поля в плоскости измерений. При этом через B_x, B_z обозначены измеренные величины (штриховые линии и маркеры), а через B_r, B_{zz} (сплошные линии) – восстановленные значения.

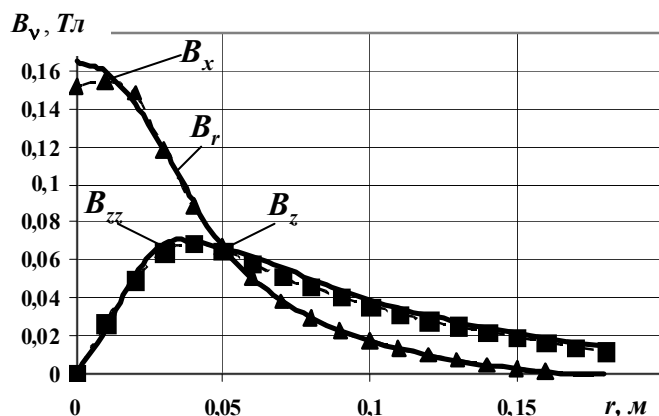


Рис. 4.7. Измеренные и восстановленные характеристики поля в базовой плоскости.

Достигнутое совпадение расчетных и экспериментальных данных обосновывают возможность полного определения магнитных полей при измерении в процессе эксперимента лишь одной компоненты вектора магнитной индукции.

Следует отметить, что разработанная методика проведения эксперимента представляет определенное «ноу-хау», так как в силу существующей аналогии между физическими полями различной природы (электростатическое поле, температурное поле, гидростатическое поле и т.д.) она открывает возможность определения характеристик этих полей в зонах, недоступных для непосредственных измерений.

5. ДВИЖЕНИЕ АГРЕГАТОВ НАНОДИСПЕРСНЫХ МАГНЕТИКОВ В КРОВЕНОСНЫХ СОСУДАХ ПРИ ДЕЙСТВИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ. УСЛОВИЯ ДОСТАВКИ И УДЕРЖАНИЯ НАНОЧАСТИЦ

Различные вещества и, в частности, лекарственные препараты попадают в органы, связанные между собой сердечнососудистой системой, с помощью процесса, получившего название «общий транспортный поток», т.е. процесса простого переноса веществ потоком жидкости. Скорость, с которой вещество транспортируется посредством данного процесса, зависит только от концентрации вещества в крови и скорости кровотока. На этот процесс накладывается магнитное поле, которое изменяет характер движения носителей. При оценке возможности применения магнитных частиц одним из основных вопросов является оценка необходимых для удержания носителей характеристик магнитных полей – магнитной индукции и градиента поля при учете движения крови и типов сосудов для конкретного органа. Различные аспекты этой проблемы рассмотрены в работах [10–12, 14, 16, 19, 94–96].

В разд. 4.1 было рассмотрено движение магнитных наночастиц под действием неоднородного магнитного поля в неподвижной жидкости. При использовании магнитных носителей в качестве контейнеров для доставки лекарственных препаратов

необходимо учесть, что в сосудах частицы будут находиться в потоке движущейся жидкости.

5.1. Общая характеристика сердечнососудистой системы и механики кровообращения

В дополнение к результатам, изложенным в [96], в настоящем разделе приводится общая характеристика сердечнососудистой системы человека и гидродинамических параметров сосудов. Характеристики сердечнососудистой системы исследовались на протяжении столетий и продолжают уточняться до настоящего времени. Появление современной измерительной аппаратуры, совершенствование методик и использование новых принципов измерений, разработка новых и уточнение существующих моделей при теоретическом анализе соответствующих биофизических процессов позволяет с высокой степенью достоверности использовать справочные данные при теоретическом анализе движения наночастиц в сосудах.

Течение крови в сосудах с различными целями исследовалось многими авторами [19, 97–103]. В частности, в [19, 97] теоретически и экспериментально показано, что течение крови (плазмы) или моделирующей ее жидкости в некоторых случаях имеет ламинарный характер, даже на участках значительной кривизны оси сосуда. При таком характере течения (параболический профиль скоростей) можно считать, что на произвольном участке сосуда движение носителей практически прекращается при достижении им стенки сосуда. Следует отметить, что при этом частицы могут скользить по стенкам сосудов, однако скорость их перемещения будет значительно меньше, чем в средней части сосуда. Это обстоятельство принимается определяющим для оценки характеристик поля.

Основные, необходимые для дальнейшего, данные приведены в монографиях [98–102], в том числе и результаты исследования распространения динамической волны в кровеносном сосуде, возникающей при пульсации сердца.

В соответствии с общепринятой терминологией сосуда, несущие кровь от сердца к органам, называются артериями, а от органов к сердцу – венами. Среди сосудов кровеносной системы различают артерии, артериолы, прекапилляры, капилляры, посткапилляры, венулы, вены, и артериоловенозные анастомозы. Между артериями и венами находится микроциркуляторное русло, формирующее периферическую часть сердечнососудистой системы.

Микроциркуляторное русло представляет собой систему мелких сосудов, включающую артериолы, капилляры, венулы, а также артериоловеноулярные анастомозы (соединения сосудов, несущих артериальную и венозную кровь в обход капиллярного русла). Именно здесь происходят процессы обмена между кровью и тканями. Считается, что в среднем в венозном русле содержится 75–80 % крови, в артериальном 15–17 %, а в капиллярах – около 5 % (в диапазоне 3–10 %). Капилляры (от лат. *capillaris* – волосной) являются самыми тонкими сосудами в организме человека и других животных. Средний их диаметр находится в пределах 5–10 мкм. Соединяя артерии и вены, они участвуют в обмене веществ между кровью и тканями. На рис. 5.1 показан переход от артериальной системы к венозному руслу [103]. Стенки капилляров состоят из одного слоя клеток эндотелия. Толщина этого слоя настолько мала, что позволяет проникать через него молекулам кислорода, воды, липидов и многих других веществ за достаточно короткое время.

Различают три вида капилляров: непрерывные капилляры, у которых межклеточные соединения очень плотные, что позволяет диффундировать только малым молекулам и ионам; фенестрированные капилляры, в стенках которых

встречаются просветы для проникновения крупных молекул и, наконец, синусоидные капилляры (sinusoid), наиболее подходящие для проникновения наночастиц. В стенке этих капилляров содержатся щели (синусы), величина которых достаточна для выхода вне просвета капилляра крупных молекул белка. Например, для печени крысы синусоидный капилляр имеет ширину около 5 мкм, а диаметр отверстий в его стенке составляет приблизительно 100 нм. Синусоидные капилляры присутствуют в печени, лимфоидной ткани, эндокринных и кроветворных органах.



Рис. 5.1. Микроциркулярное русло.

Геометрические и гидродинамические характеристики некоторых сосудов системы кровообращения в организме человека в соответствии с данными, приведенными в [104], представлены в табл. 5.1, 5.2.

Таблица 5.1. Геометрические характеристики основных кровеносных сосудов

Сосуд	Диаметр, см	Общее число в организме	Длина, см
Аорта	1,6–3,2	1	80
Большие артерии	0,1–0,6	10^3	20–40
Малые артерии, артериолы	0,02–0,1	10^8	0,2–5
Капилляры	0,0005–0,001	10^9	0,1
Венулы, малые вены	0,02–0,2	10^9	0,2–1,0
Большие вены	0,5–1,0	10^3	10–30
Полые вены	2,0	2	50

Из представленных в табл. 5.1, 5.2 характеристик сосудов системы кровообращения, в частности, следует, что аорта представляет собой трубку диаметром 1,6–3,2 см с площадью поперечного сечения 2,0–3,5 см², постепенно разветвляющуюся на 10^9 капилляров, площадь поперечного сечения каждого из которых имеет порядок $5 \cdot 10^{-7}$ см². Диапазон реальных значений радиусов и длины капилляра достаточно значителен, однако для некоторых средних значений можно принять, что радиус составляет 3 мкм, а длина примерно 750 мкм. При этом площадь поверхности стенки каждого усредненного капилляра равна $1,5 \cdot 10^4$ мкм², а площадь поперечного сечения – 30 мкм². Поскольку обмен происходит и в посткапиллярных венулах, можно допускать, что общая обменная поверхность мельчайших сосудов большого круга кровообращения составляет приблизительно $2,5 \cdot 10^4$ мкм². При общем числе функционирующих капилляров у человека массой 70 кг около 40 000 млн. общая обменная площадь поверхности капилляров должна составлять около 1000 м².

Давление и скорость кровотока в системе кровообращения уменьшаются от аорты до венул (табл. 5.2), а кровеносные сосуды становятся все более мелкими и

многочисленными. В капиллярах скорость кровотока замедляется наиболее выражено, что благоприятствует отдаче кровью веществ тканям. Для венозного отдела характерны низкий уровень давления и более медленная по сравнению с артериальным руслом скорость кровотока. Сравнение величин давления, кровотока и сопротивления сосудов в различных сосудах показывает, что давление внутри сосудов от аорты до полых вен резко падает, в то время как в венозном русле возрастает. Поэтому система артерий характеризуется высоким давлением при относительно небольших объемах крови, а в венозной системе наблюдаются большие объемы крови и меньшие величины давлений.

Артерии и вены представляют собой просто систему для доставки различных веществ и в них газообмен и диффузия питательных веществ не осуществляется. Тепло- и массообмен крови с омываемыми ею тканями возможен только на участках, где течение в кровеносных сосудах принимает вихревой характер. Вместе с тем, в мелких кровеносных сосудах течение крови ламинарное, и преобладающими являются диффузионные процессы переноса. Сам обмен между кровью и интерстициальной (тканевой) жидкостью (interstitial fluid) происходит только через проницаемые стенки капилляров. В частности, за одну минуту через стенки всех капилляров человека просачивается около 60 литров жидкости.

Таблица 5.2. Гидродинамические характеристики основных кровеносных сосудов

Сосуд	Давление, мм рт. ст.	Объем, см ³	Скорость кровотока, см/с	Сопротивление, дин·с/см
Аорта	100–120	30	50	64
Магистральные артерии	100–120	60	13	$3,9 \cdot 10^3$
Ветвящиеся артерии	80–90	50	8	$1,6 \cdot 10^5$
Терминальные артерии	80–90	25	6	$1,2 \cdot 10^5$
Артериолы	40–60	25	0,3	$2 \cdot 10^{10}$
Капилляры	15–26	60	0,07	$3,9 \cdot 10^{11}$
Венулы	12–18	110	0,07	$4,9 \cdot 10^9$
Терминальные вены	10–12	130	1,3	$3,2 \cdot 10^3$
Ветвящиеся вены	5–8	270	1,5	$0,5 \cdot 10^4$
Венозные коллекторы	3–5	220	3,6	250
Полые вены	1–3	100	33	26

В сосудах различают объемную и линейную скорости кровотока.

Объемная скорость кровотока – это количество крови, протекающее через поперечное сечение сосуда в единицу времени. Объемная скорость кровотока через сосуд прямо пропорциональна давлению крови в нем и обратно пропорциональна сопротивлению току крови в этом сосуде.

Линейная скорость кровотока отражает скорость продвижения частиц крови вдоль сосуда и равна объемной скорости, деленной на площадь сечения кровеносного сосуда. Линейная скорость различна для частиц крови, продвигающихся в центре потока и у стенки сосудов. В центре сосуда линейная скорость максимальна, а около стенки она минимальна в связи с трением частиц крови о стенку.

Под сердечным выбросом понимают количество крови, выбрасываемой сердцем в сосуды в единицу времени. Исходя из величины сердечного выброса в покое и средней скорости кровотока в капилляре (см. табл. 5.2) подсчитано, что площадь поперечного сечения капиллярного ложа должна в 700 раз превышать площадь поперечного сечения аорты. В покое функционирует только 25–35% капилляров, и общая площадь их обменной поверхности составляет 250–350 м². Так как именно

капилляры служат зонами интенсивного обмена, то наночастицы, как и большинство других переносимых веществ, будут проникать через капиллярную стенку вследствие диффузии. Скорость диффузии наночастиц между кровью и интерстициальной жидкостью определяют следующие факторы:

- градиент концентрации;
- площадь поверхности, на которой происходит процесс обмена;
- расстояние, на протяжении которого протекает процесс диффузии;
- проницаемость капиллярной стенки для диффундирующего вещества.

В соответствии с замечаниями, изложенными в [104], следует иметь в виду, что в магнитном поле артериальная и венозная кровь ведет себя по-разному. Экспериментально установлено [105], что в артериях кровь, обогащенная кислородом, проявляет свойства диамагнитной жидкости, а в венах, когда она обескислорожена, представляет собой парамагнитный материал. Кроме того, внешнее магнитное поле изменяет вязкость крови. Было обнаружено, что течение крови замедляется в присутствии поля, и при величине магнитной индукции 10 Тл замедление движения крови достигает 25%, в то время как для малых значений индукции (≈ 1 Тл) вязкость изменяется незначительно (менее чем на 0,3%).

5.2. Движение магнитных частиц в потоке вязкой жидкости

Магнитные частицы или их агрегаты участвуют в сложном движении: переносом совместно с потоком жидкости со скоростью v_e , равной средней линейной скорости движения крови на рассматриваемом участке сосуда, и относительном движении со скоростью v_r , вызванном действием магнитного поля. В общем случае векторы магнитной силы и переносной скорости могут быть произвольным образом ориентированы в пространстве ввиду как сложной зависимости характеристик поля от координат, так и случайной ориентации сосудов в органе-мишени. Кроме того, размеры агрегатов, как показывают многочисленные экспериментальные исследования, зависят от напряженности магнитного поля.

Не умаляя общности, будем считать, что сосуд расположен горизонтально.

Как и ранее, магнитные носители (отдельные наночастицы или их агрегаты) рассматриваются как магнитные диполи. Относительное движение агрегатов магнитных частиц, обладающих некоторым эффективным магнитным моментом, обуславливается действием магнитной силы F_{mag} и механического момента \mathbf{M} , которые определяются известными формулами

$$F_{mag} = -\nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}), \quad \mathbf{M} = [\mathbf{m} \times \mathbf{B}], \quad (5.1)$$

где \mathbf{m} – вектор эффективного магнитного момента отдельного носителя или агрегатов наночастиц, \mathbf{B} – вектор магнитной индукции, а символом ∇ обозначен оператор градиента.

За счет действия механического момента свободные диполи ориентируются по полю, и тогда $\mathbf{M} = 0$. Повороты диполей происходят очень быстро, поэтому можно считать, что они всегда ориентированы по полю. Сила магнитного взаимодействия определяется не только изменением магнитного поля, но и изменением магнитного момента носителя. Если эти величины не изменяются в пространстве, то $\mathbf{F} = 0$. Отсюда следует, что для возникновения магнитных сил поле должно быть пространственно неоднородным.

Отметим, что

$$\nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) = |\nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B})| \cdot \mathbf{n}, \quad (5.2)$$

где \mathbf{n} – единичный вектор внешней нормали к линиям поля $\varphi = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B})$. Тогда производная по произвольному направлению \mathbf{v} определяется соотношением

$$\frac{\partial \varphi}{\partial e} = \mathbf{v} \cdot \nabla \varphi = |\nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B})| \cos(\mathbf{v}, \nabla \varphi),$$

где

$$|\nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B})| = \sqrt{\left(\frac{\partial(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B})}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B})}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B})}{\partial z}\right)^2}.$$

Рассмотрим неоднородное одномерное поле с индукцией $B = B(y)$, действующей вдоль оси y . Для такого поля в разд. 4.1 приведено выражение для магнитной силы (4.2), которое запишем в новых обозначениях

$$F_y = V \cdot \frac{d[m(H)B]}{dy}, \quad (5.3)$$

где V – объем частицы; H – напряженность поля; $m(H)$ – магнитный момент, приходящийся на единицу объема частицы.

Как отмечалось ранее, величина магнитного момента наночастиц и их агрегатов зависит от размера, формы, намагниченности, температуры и некоторых других физических параметров. Для ферромагнетиков намагниченность является функцией модуля вектора напряженности магнитного поля, и в первом приближении $m(H)$ можно принять пропорциональным модулю вектора напряженности магнитного поля H , т. е. $m(H) = kH$, где k – коэффициент пропорциональности. В этом случае из формулы (5.3) следует, что сила, с которой магнитное поле действует на частицу произвольной формы, пропорциональна ее объему и произведению модуля напряженности на градиент модуля индукции и формулу (5.3) можно переписать в виде

$$F_y = kV \frac{d(HB)}{dy}. \quad (5.4)$$

Значение коэффициента пропорциональности k зависит от формы частицы. Значения k для сплошных эллипсоидов вращения с различными значениями отношения длины к диаметру приведены ранее в табл. 4.1. В случае частицы с магнитным ядром и оболочкой в виде эллипсоида общего вида в связи с существованием аналогии между решениями задач электростатики и магнитостатики для вычисления магнитного момента может быть использован метод, предложенный в [54–56, 59] для нахождения поляризуемости слоистых наночастиц.

Указанная закономерность сохраняется только до таких уровней напряженности, пока намагниченность частиц далека от насыщения. При высоких уровнях напряженности поля для ферромагнетиков намагниченность достигает насыщения, т. е. $m(H) \rightarrow m_{sat}$, где m_{sat} – магнитный момент единицы объема при достижении материалом намагниченности насыщения. В этом случае из (5.3), (5.4) имеем

$$F_y = kVm_{sat} \frac{dB}{dy} \quad (5.5)$$

и, таким образом, уровень напряженности поля перестает влиять на силу, а ее величина зависит только от градиента модуля вектора индукции. Указанные закономерности будут выполняться и в случае произвольного распределения поля в пространстве, если считать, что ось y совпадает с направлением вектора магнитной индукции.

Поскольку сила существенно зависит от геометрических параметров частицы, то необходимо учитывать распределение наночастиц или их агрегатов по размерам, как это сделано в разд. 4.1. Распределение частиц по размерам, определяемое формулой (4.11), перепишем в виде

$$p(D_p) = \frac{1}{D_m \sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\ln^2(D_p / D_m) / (2\sigma^2)\right\}, \quad (5.6)$$

где D_p и D_m – соответственно текущий и наиболее вероятный диаметры (математическое ожидание M) частицы, σ – среднеквадратичное отклонение. Среднее значение силы, действующей на сферические частицы объемом $V = \pi D_p^3 / 6$, находится по формуле

$$F_m = M[F_y] = \frac{\pi}{6} km_{sat} \frac{dH}{dy} \int_{-\infty}^{\infty} D_p^4 p(D_p) dD_p. \quad (5.7)$$

Для расчета характеристик движения как отдельных магнитных носителей, так и их агрегатов под действием магнитного поля приведем некоторые теоретические оценки параметров в задаче транспорта носителей в кровеносных сосудах.

На рис. 5.2, 5.3 схематично показаны разветвленная структура сосудов в органе-мишени и расчетная схема движения носителей на участке сосуда. Пунктиром на рис. 5.2 обозначена область активного действия магнитного поля. Отметим, что каждое j -е ответвление основного сосуда органа образует некоторый угол α_j с его осью.

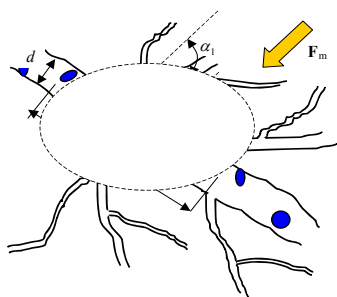


Рис. 5.2. Схема сосудистой среды.

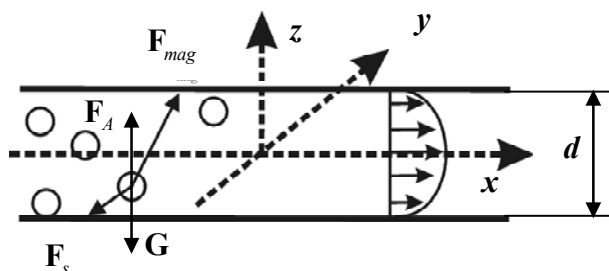


Рис. 5.3. Расчетная схема движения магнитных носителей на участке сосуда.

Рассмотрим движение отдельного носителя (магнитной частицы или агрегата) на участке сосуда, который считаем цилиндрической трубкой с жесткими стенками. Поскольку движение носителя поступательное, то можно считать частицу материальной точкой. Движение частицы будем описывать в декартовой прямоугольной системе координат x, y, z , ось x направим вдоль оси сосуда, оси y и z

перпендикулярно x таким образом, чтобы они образовывали правую тройку, причем ось u направлена вдоль линии максимального возрастания поля (рис. 5.3). Начало координат свяжем с осью сосуда. На частицу действуют внешние силы: сила тяжести $\mathbf{G} = m\mathbf{g}$ (здесь m – масса частицы, g – ускорение силы тяжести), \mathbf{F}_A – сила Архимеда, \mathbf{F}_{mag} – магнитная сила, \mathbf{F}_s – сила сопротивления движению. В дальнейшем для простоты будем считать, что силой тяжести и силой Архимеда можно пренебречь ввиду малости массы наночастиц ($10^{-11} - 10^{-10}$ г).

Следуя [10, 96], установим условия остановки носителей магнитным полем на внутренней стенке сосуда. На движущийся под действием магнитного поля в потоке крови носитель действует сила сопротивления Стокса, полученное, имеющее место, вообще-то говоря, только для сферических частиц:

$$F_s = 3\pi D_g v \eta_1,$$

где D_g – гидродинамический диаметр носителя, v – линейная скорость потока крови, η_1 – динамическая вязкость жидкости. Для частицы произвольной формы под диаметром частицы понимают отношение $D_g = V/S$, где S – площадь ее поперечного сечения в плоскости, перпендикулярной направлению движения.

Пусть магнитное поле с величиной градиента напряженности ∇H локализовано на участке сосуда размером l с внутренним диаметром d (см. рис. 5.2). В приближении пуазейлевского (параболического) распределения скорости по сечению цилиндрического сосуда имеет место следующий закон распределения по радиальной координате r :

$$v = \frac{p_1 - p_2}{4\eta_1 l} \left(\frac{d^2}{4} - r^2 \right),$$

где p_1, p_2 – давление на входе и выходе участка активного действия магнитного поля длиной l . Средняя скорость течения жидкости \bar{U} определяется выражением

$$\bar{U} = \frac{p_1 - p_2}{\eta_1 l} \frac{d^2}{128},$$

а объемный расход крови (кровоток)

$$Q = \pi d^2 \bar{U}.$$

Приравнивая силу Стокса значению осевой компоненты магнитной силы [10]

$$F = m \nabla H \cos \alpha,$$

получим условие удержания носителей магнитным полем на стенке сосуда

$$m \nabla H \cos \alpha \geq 6\pi r_g^2 \gamma_1 \eta_2, \quad (5.8)$$

где m – магнитный момент носителя, α – угол между направлением вектора магнитной индукции \mathbf{B} (напряженности \mathbf{H}) и осью сосуда, $r_g = D_g/2$ –

гидродинамический радиус, η_2 – вязкость плазмы крови в пристеночном слое, а γ_1 определяется выражением [10]

$$\gamma_1 = \frac{32Q}{\pi d^3} = \frac{8\bar{U}}{d}.$$

Если объемное содержание ферромагнитного материала с удельным магнитным моментом m_0 в носителе равно k_1 , а его объем $(4/3)\pi r^3$ (здесь и далее $r = r_g$), то

$$m = \frac{4}{3} \pi r^3 \cdot m_0 \cdot \chi \cdot k, \quad (5.9)$$

где χ – намагниченность.

С точностью, достаточной для оценочных расчетов, предположим, что для магнитных полей с напряженностью $H < H^*$ (H^* значение напряженности, при котором достигается насыщение ферромагнетика) $\chi \sim H / H^*$, а при условии $H > H^*$ имеем $\chi = 1$. Тогда условие остановки носителя на внутренней стенке сосуда примет вид [10]:

$$k_1 = \frac{9}{2} \cdot \frac{\gamma_1 \eta_2}{m_0 \chi r \nabla H \cdot \cos \alpha}. \quad (5.10)$$

Уравнение (5.10) определяет такое объемное содержание в носителе ферромагнитного материала k_1 , при котором для средней скорости кровотока \bar{U} в сосуде диаметром d может происходить его остановка возле стенки сосуда магнитным полем с градиентом ∇H . В дальнейшем будем исходить из характеристик кровотока человека, приведенных в табл. 5.1, 5.2 и табл. 5.3, в которой приведены значения параметра γ_1 .

Таблица 5.3. Некоторые характеристики кровотока человека [10]

Тип сосуда	Диаметр сосуда d , см	Средняя скорость кровотока в сосудах \bar{U} , см/с	Среднее значение параметра $\gamma_1 = 8\bar{U} / d$, с^{-1}
Аорта	1,6 – 3,2	30 – 60	300 – 600
Большие артерии	0,6 – 0,1	20	270 – 1600
Артериолы	0,1 – 0,02	0,2 – 10	800
Капилляры	0,0005 – 0,001	0,05 – 0,07	500 – 800
Венулы и малые вены	0,02 – 0,2	0,1 – 1	40 – 200
Большие вены	0,5 – 1,0	10 – 20	160
Полые вены	2,0	50	200 – 300

Уровень поля считаем таким, что намагниченность носителей достигает насыщения. Для произвольной частицы, движущейся в области, противоположной расположению магнита, можно оценить модуль скорости движения частицы в направлении поля. Из уравнения (5.5) нетрудно найти скорость частицы в этом направлении

$$v_r = \frac{\kappa m_{sat} G}{\rho f(D_g)} [1 - e^{-f(D_g)t}], \quad (5.11)$$

где $f(D_g) = 3\pi\eta_1 / (\beta\gamma D_g^2)$ – функция эффективного диаметра частицы D_g , ρ – плотность частицы, а через G обозначен градиент модуля вектора магнитной индукции, который в сечении тонкого сосуда можно считать постоянным.

Вследствие малого значения массы частицы скорость частицы быстро устанавливается постоянной, и тогда скорость относительного движения при определенных значениях концентрации магнитных носителей и градиента поля вдоль оси y находится по формуле

$$v_r = \frac{\kappa m_{sat} G}{\rho f(D_g)}. \quad (5.12)$$

5.3. Условия достижения магнитными носителями стенок сосуда и определение необходимого уровня поля

При известных значениях магнитных моментов частиц и средних скоростей их движения под действием магнитного поля можно оценить такой важный параметр, как время движения агрегата к стенке сосуда.

Если обозначить через T время нахождения частиц в сосуде органа, а через t – время, необходимое всем частицам для достижения стенки сосуда, то условие успешной доставки препарата в орган-мишень можно записать в виде неравенства $t \leq T$. Выполнение этого неравенства является основным критерием успешной доставки препарата.

Оценим условия, необходимые для доставки носителей к стенке сосуда в области эффективного действия магнитного поля с характерной длиной l (рис. 5.2). Если обозначить через τ время пребывания носителей в сосуде органа, а через t – время, необходимое всем носителям для достижения стенки сосуда, то условие успешной доставки препарата в орган-мишень можно записать в виде неравенства $t \leq \tau$. Выполнение этого неравенства определяет основной критерий успешной доставки препарата.

Для оценочного расчета допустимо использовать средние линейные скорости течения крови, значения которых для различных сосудов приведены в табл. 5.2, 5.3. Тогда время нахождения частиц в сосуде органа в отсутствии поля, очевидно, будет равно $\tau = l / \bar{U}$.

Воздействие поля изменяет процесс. В общем случае вектор магнитной силы и ось сосуда могут составлять произвольный угол α в пространстве, поэтому время пребывания частицы в сосуде будет изменяться в зависимости от этого угла, так как к средней скорости \bar{U} движения вдоль оси сосуда будет добавляться проекция переносной скорости на это направление. Тогда соответствующие времена могут быть вычислены по формулам

$$t = \frac{d}{v_r \sin \alpha}, \quad \tau = \frac{l}{\bar{U} + v_r \cos \alpha}. \quad (5.13)$$

Из этих соотношений следует, что при условии $0 < \alpha < \pi/2$ время пребывания носителя в сосуде сокращается, а при $\pi/2 < \alpha < \pi$ увеличивается. При этом минимальное время пребывания препарата в сосуде, очевидно, равно $\tau_1 = l / (\bar{U} + v_r)$, а максимальное $\tau_2 = l / (\bar{U} - v_r)$. Наиболее неблагоприятным будет случай, когда частица

находится возле противоположной стенки, и потому максимально возможное расстояние, которое ей нужно преодолеть, равно диаметру сосуда.

С учетом (5.13) условие успешной доставки препарата может быть записано в виде неравенств

$$\frac{d}{v_r \sin \alpha} \leq \frac{L}{\bar{U} + v_r \cos \alpha} \Leftrightarrow v_r \left(\sin \alpha - \frac{d}{L} \cos \alpha \right) \geq \frac{d}{L} \bar{U}, \quad (0 \leq \alpha \leq \pi), \quad (5.14)$$

из которых следует, что при некоторых значениях углов выражение в скобках может быть отрицательным. Следовательно, выполнение условия (5.14) при некотором предельном угле $\alpha_{\text{lim}} = \arctg(d/L)$ становится невозможным. Таким образом, часть сосудов, для которых углы между осями и направлением действия магнитной силы попадают в интервал $0 \leq \alpha \leq \alpha_{\text{lim}}$, не удовлетворяют критерию успешной доставки препарата.

Здесь, однако, следует иметь в виду, что для большинства кровеносных сосудов отношения диаметров к длине мало, поэтому, и значение предельного угла будет малым. Например, для сосуда с отношением $d/L = 0,1$ предельный угол $\alpha_{\text{lim}} \approx 6^\circ$. Так как угол α можно считать случайной величиной, равномерно распределенной в рассматриваемом интервале изменения углов, то вероятность реализации таких событий будет достаточно малой. В рассмотренном примере эта вероятность равна 0,03. Для более длинных и тонких сосудов эта вероятность будет еще меньше. Поэтому с весьма большой вероятностью допустимо считать, что неравенство $\alpha > \alpha_{\text{lim}}$ выполняется. При этом для малых значений отношений d/L можно принять $\alpha_{\text{lim}} \approx d/L$.

В общем случае формальное решение второго неравенства (5.14) имеет вид $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$, где

$$\alpha_1 = \arctg \frac{d}{l} + \arcsin \frac{d}{l} + \arcsin \frac{d}{\sqrt{d^2 + l^2}} \frac{\bar{U}}{v_r}, \quad \alpha_2 = \pi + \arctg \frac{d}{l} + \arcsin \frac{d}{l} - \arcsin \frac{d}{\sqrt{d^2 + l^2}} \frac{\bar{U}}{v_r}, \quad (5.15)$$

которое существует только при выполнении условия

$$\frac{d}{\sqrt{d^2 + l^2}} \frac{\bar{U}}{v_r} \leq 1,$$

а в противном случае действительных решений нет.

Графическая иллюстрация неравенства (5.14) изображена на рис. 5.4, на котором схематично показаны зависимости $t(\alpha)$ и $\tau(\alpha)$ при некоторых фиксированных значениях длины и диаметра сосудов и соответствующей этому диаметру средней скорости. Область существования решений неравенства ограничена значениями углов $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ и для наглядности на рис. 5.4 закрашена. Для различных значений длины и диаметра сосуда и скоростей этот интервал может быть разным (в том числе и пустым, если кривые не пересекаются).

Длина интервала $A = \alpha_2 - \alpha_1$ имеет следующий смысл: для всех сосудов, оси которых образуют с вектором магнитной силы углы, попадающие в этот интервал, гарантирована доставка препарата к их стенкам. Поскольку углы могут принимать произвольные значения в интервале $[0, \pi]$ и при этом распределены равномерно, то

отношение $\lambda = A/\pi$ покажет, в какую именно часть сосудов органа, произвольно ориентированных в пространстве, может быть доставлен препарат.

С учетом введенных обозначений приходим к неравенству вида

$$v_r \geq \bar{U} \frac{\sin \alpha_{\text{lim}}}{\sin[(1-\lambda)\pi/2]} \approx \bar{U} \frac{d}{l \sin[(1-\lambda)\pi/2]}, \quad (5.16)$$

которое позволяет полностью решить задачу определения необходимых значений скоростей и, следовательно, соответствующих характеристик поля. Неравенство (5.16) связывает скорость относительного движения, которую должно обеспечить приложенное магнитное поле, со средней скоростью течения крови в сосуде, геометрическими параметрами сосудов и частью использованных сосудов органа-мишени. Условие доставки частиц в орган запишем в виде $v \geq v_c$, где параметр $v_c = \bar{U}d / [\sqrt{2}(l-d/2)]$ определяет нижнюю границу относительной скорости. Следует отметить, что этот параметр является константой для каждого сосуда и может быть вычислен с использованием экспериментальных данных, приведенных в табл. 5.1–5.3.

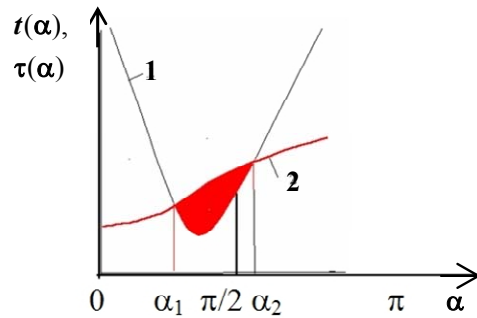


Рис. 5.4. Графическая иллюстрация к решению неравенства (5.15): 1 – $t(\alpha) = d / (v_r \sin \alpha)$; 2:– $\tau(\alpha) = l / (\bar{U} + v_r \cos \alpha)$.

Для примера были выбраны необходимые данные (внутренний диаметр, длина и средняя скорость движения потоке крови в сосудах), соответствующие кровеносной системе собак, приведенные в [106, 107] совместно с найденными значениями скоростей v_c представлены в табл. 5.4, причем результаты статьи [106] отмечены одной «*», а статьи [107] – двумя звездочками «**».

Из этих данных следует, что в капиллярах ограничивающие значения скоростей имеют порядок мкм/с и не требуют больших значений градиента поля. Основной проблемой является доставка носителей к стенкам магистральных сосудов органа для проникновения в более мелкие сосуды (см. рис. 5.1). Следует отметить, что скорость течения крови в сосудах, попадающих в онкологическое образование, на порядок ниже, чем в сосудах основной системы [108]. В соответствии с этими данными в сосудах диаметром 5–50 мкм скорость течения крови находится в пределах 0,0001–0,0005 м/с.

Удобно ввести обозначение минимальной критической скорости $v_{cr}^{\text{min}} = \bar{U}d / l$, при которой становится возможна доставка носителей в соответствии с неравенством (5.16). Тогда неравенство (5.16), определяющее значения критических скоростей в зависимости от доли охваченных сосудов, переписется в виде

$$v_{cr} = v_{cr}^{\text{min}} / \sin[(1-\lambda)\pi/2]. \quad (5.17)$$

Таблица 5.4. Характеристики некоторых кровеносных сосудов собаки и предельные значения скоростей движения агрегатов в магнитном поле с градиентом, обеспечивающим доставку магнитных наноматериалов к стенке сосуда

Сосуд	d , м	l , м	\bar{U} , м/с	v_c , м/с
*Aorta, pulmonary	$1,70 \cdot 10^{-2}$	$3,50 \cdot 10^{-2}$	$1,50 \cdot 10^{-1}$	$6,80 \cdot 10^{-2}$
*Aorta, ascendens	$1,50 \cdot 10^{-2}$	$5,00 \cdot 10^{-2}$	$2,00 \cdot 10^{-1}$	$4,99 \cdot 10^{-2}$
**End arteria	$6,00E \cdot 10^{-4}$	$1,40 \cdot 10^{-3}$	$6,00 \cdot 10^{-2}$	$2,31 \cdot 10^{-2}$
*Aorta, descending	$1,30 \cdot 10^{-2}$	$2,00 \cdot 10^{-1}$	$2,00 \cdot 10^{-1}$	$9,50 \cdot 10^{-3}$
*Aorta, abdominal	$9,00 \cdot 10^{-3}$	$1,50 \cdot 10^{-1}$	$1,50 \cdot 10^{-1}$	$6,56 \cdot 10^{-3}$
*Hollow vena	$1,00 \cdot 10^{-2}$	$3,00 \cdot 10^{-1}$	$2,50 \cdot 10^{-1}$	$5,99 \cdot 10^{-3}$
*Arteria femoralis	$4,00 \cdot 10^{-3}$	$1,00 \cdot 10^{-1}$	$1,00 \cdot 10^{-1}$	$2,89 \cdot 10^{-3}$
*Arteria carotis	$5,00 \cdot 10^{-3}$	$1,50 \cdot 10^{-1}$	$1,00 \cdot 10^{-1}$	$2,40 \cdot 10^{-3}$
**End venas	$1,50 \cdot 10^{-3}$	$1,00 \cdot 10^{-2}$	$1,30 \cdot 10^{-2}$	$1,49 \cdot 10^{-3}$
*Arterioles	$5,00 \cdot 10^{-5}$	$1,50 \cdot 10^{-3}$	$7,50 \cdot 10^{-3}$	$1,80 \cdot 10^{-4}$
*Venules	$4,00 \cdot 10^{-5}$	$1,50 \cdot 10^{-3}$	$3,50 \cdot 10^{-3}$	$6,69 \cdot 10^{-5}$
**Main Venas	$2,40 \cdot 10^{-4}$	$0,10 \cdot 10^{-1}$	$1,50 \cdot 10^{-2}$	$2,55 \cdot 10^{-5}$
*Capillars	$6,00 \cdot 10^{-6}$	$6,00 \cdot 10^{-4}$	$7,00 \cdot 10^{-4}$	$4,97 \cdot 10^{-6}$
**Lung capillars	$8,34 \cdot 10^{-6}$	$3,00 \cdot 10^{-3}$	$1,40 \cdot 10^{-3}$	$2,64 \cdot 10^{-6}$

Представление о росте критической скорости с увеличением доли сосудов λ , для которых можно гарантировать доставку препарата, дает табл. 5.5, в которой приведены значения параметра $\lambda = (\alpha_2 - \alpha_1) / \pi$ при различных значениях отношения v_{cr} / v_{cr}^{\min} .

Таблица 5.5. Рост критических скоростей в зависимости от доли сосудов λ , в которые можно гарантировать доставку препарата

λ , %	v_{cr} / v_{cr}^{\min}
30	1,12
50	1,41
70	4,20
90	6,39

Из табл. 5.5 следует, что 50% успеха в доставке препарата к стенке сосуда можно достичь при незначительном увеличении критической скорости. Вместе с тем, увеличение доли сосудов до 90% приводит к значительному возрастанию требуемых скоростей. Следует отметить, что табл. 5.5 позволяет легко пересчитать требуемые скорости для любого сосуда в соответствии с данными табл. 5.1–5.3.

С учетом приведенных выше (в рамках модели одномерного поля) соотношений получаем неравенство для оценки необходимых средних уровней градиентов в сосудах

$$G \geq \frac{\bar{U}d}{l \cos(\pi\lambda/2)} \frac{\rho f(D_g)}{km_{sat}}. \quad (5.18)$$

Неравенство (5.18) позволяет для конкретного органа определить необходимые значения относительных скоростей движения магнитных носителей. После этого возникает возможность провести оценку требуемых значений полей и градиентов.

Более точное решение этих задач требует дополнительных исследований и усовершенствования моделей для описания движения носителей в сосудах. Отметим, что из полученного неравенства следует результат, приведенный в [10, формула (5)].

Удерживать все носители, которые попадают в сосуд большого диаметра, можно лишь тогда, когда характерный размер l области локализации магнитного поля равен $l = b\bar{U}\tau - d\text{ctg}\alpha$, где b – коэффициент порядка единицы, $\tau = d/V_{\perp}$ – время пересечения носителем сосуда под действием поперечной составляющей магнитной силы. Поперечная компонента V_{\perp} скорости носителя имеет вид

$$V_{\perp} = \frac{m \cdot \nabla H \cdot \sin \alpha}{6\pi r \eta_1}.$$

Выражая m через k , находим условие доставки 100 % носителей к стенке сосуда на нужном участке при воздействии магнитного поля (здесь и ниже r – гидродинамический радиус):

$$k_2 = \bar{U}d\eta_1 [br^2\mu_0\nabla H \sin \alpha (l + d\text{ctg}\alpha)]^{-1}. \quad (5.19)$$

Сравнивая это выражение с условием остановки носителей возле стенки сосуда при $\alpha = 45^\circ$, $b = 4/3$ и условии, что $l \gg d$ и $\eta_1/\eta_2 \sim 2$, получаем

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{1}{18} \frac{d^2}{rl}. \quad (5.20)$$

Для 100 %-ной доставки носителей к стенке при условии $d > \sqrt{18 \cdot l \cdot r}$ необходимо большее содержание в них ферромагнитного материала, чем для остановки их возле стенки; для случая $d < \sqrt{18 \cdot l \cdot r}$ – наоборот.

Отметим ряд обстоятельств, важных для практического использования полученных теоретических результатов. Существует определенная величина напряженности магнитного поля для конкретного ферромагнитного материала носителей, после достижения которой дальнейшее ее увеличение не приводит к изменению силы, так как намагниченность достигает насыщения. При этом как для слабых, так и для сильных полей магнитная сила пропорциональна объему ядра, занятому магнитным веществом частицы, и существенно зависит от ее формы. Определяющим фактором при этом является градиент модуля вектора магнитной индукции (напряженности) внешнего поля. Только при быстром изменении поля в пространстве возможно достижение больших значений силы, которые необходимы для удержания частиц в нужной области капиллярно-сосудистой среды.

В тонких сосудах ($d < \sqrt{18rl}$) можно реализовать доставку всех носителей, находящихся в зоне активного действия магнитного поля к стенке сосуда с последующим их удержанием. Необходимые уровни градиентов составляют $H \geq 1,6 \cdot 10^6$ А/м² для вен при $\bar{U} = 0,1$ см/с и $\nabla H \geq 2,2 \cdot 10^8$ А/м² для артерий при $\bar{U} = 0,4$ см/с.

В больших сосудах ($d > \sqrt{18rl}$) достичь 100%-ной доставки практически невозможно, так как необходимые для этого величины градиентов создать технически трудно, однако некоторая часть носителей, расположенных ближе к магниту, все же удерживается магнитным полем. Так в сосудах с диаметром около 3 см достичь 100 %-ного осаждения носителей затруднительно, так как необходимый градиент

напряженности магнитного поля имеет порядок $10^{12} - 10^{13}$ А/м². Это, однако, не исключает возможности остановки на внутренних стенках больших сосудов той части магнитных носителей, которые достигли поверхности за время прохождения области локализации внешнего магнитного поля.

Результаты, приведенные в [10], качественно подтверждают выполненные выше расчеты. Авторами [10] были разработаны магнитная установка на основе постоянных магнитов и экспериментальная установка для исследования процессов в циркулирующей магнитной жидкости при действии магнитного поля. Установка содержит магнитную систему, в активной зоне которой расположена тонкостенная стеклянная трубка длиной 115 мм и диаметром 1,5 мм, образующая совместно с роликовым насосом и соединительными трубками замкнутую гидродинамическую систему (рис. 5.5, [10]). Объемная скорость движения жидкости составляла 1–2 мл/мин при величине магнитной индукции в центральной области 0,58 Тл. В экспериментальных исследованиях использовались нанокompозитные жидкости, имеющие в своем составе наночастицы магнетита Fe₂O₃ диаметром 4 нм. Приведенные в [10] значения гидродинамических диаметров оказываются значительно больше (порядка 100 нм).

В статье отмечается: «результаты компьютерного моделирования и проведенного экспериментального исследования ... подтверждают принципиальную возможность управления движением и концентрированием магнитных наночастиц в потоке жидкости с помощью внешнего магнитного поля, создаваемого постоянными магнитами».

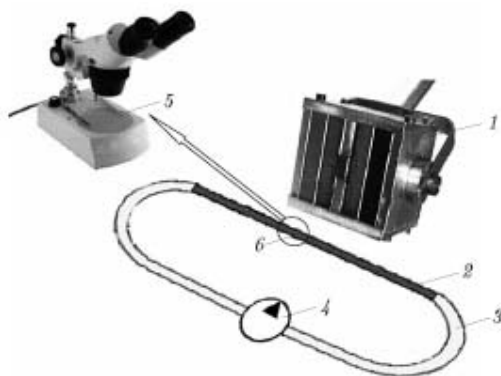


Рис. 5.5. Схематическое изображение экспериментальной установки: 1 – магнитная система; 2 – стеклянная трубка; 3 – соединительная трубка; 4 – роликовый насос; 5 – микроскоп для наблюдения в активной зоне 6 [10].

В конкретных случаях при расчете конфигурации магнитных полей необходимо учитывать тип магнитного носителя, расположение органа-мишени, а конструирование носителей проводить с учетом типа органа-мишени, конкретного лекарственного препарата и механизма их терапевтического действия.

Заключительные замечания

В соответствии с поставленными задачами в работе изложены основные положения использованных математических методов, получены необходимые расчетные соотношения, а также разработаны методики и программы для проведения практических расчетов. Приведены примеры расчетов, выполнено (где это оказалось возможным) сравнение с экспериментальными данными, и при этом достигнуто удовлетворительное совпадение расчетных и экспериментальных результатов.

Точная постановка задачи взаимодействия ЭМИ с объектами различной физической природы приводит к необходимости рассмотрения полной системы

уравнений Максвелла с комплексными амплитудами [44]. При выводе формул для нахождения ЭМЭ в слоях слоистых частиц показано, что в отличие от общепринятого подхода необходимо учитывать и электрическую, и магнитную составляющие ЭМП. Возникающие в наночастицах индукционные токи приводят к возрастанию потерь (формально к изменению волнового вектора в решениях векторных волновых уравнений) и, следовательно, к увеличению мощности тепловых источников. Следует иметь в виду, что в отличие от процессов рассеяния ЭМИ малой мощности на малых частицах, когда, как отмечалось в [45], эти явления можно не учитывать, при использовании лазерного излучения, особенно на частотах поверхностных плазмонов, вклад индукционных токов может оказаться весьма значительным. Это явление может оказаться определяющим для немагнитных наночастиц благородных металлов.

В магнитных наночастицах имеют место два вида потерь: электрические и магнитные. Как правило, магнитные потери незначительны, однако при этом необходимо учитывать аномальное возрастание характеристик локального поля в ближней к наночастице зоне. Дополнительно индукционные токи порождают собственное магнитное поле, которое будет накладываться на внешнее. Эти вопросы выяснены недостаточно и подлежат дальнейшим исследованиям.

Также уместно отметить, что в работе задачи рассмотрены в линейной постановке. Учет физической нелинейности приводит к необходимости построения решений дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, так как физические электромагнитные параметры (диэлектрическая функция, проводимость, магнитная проницаемость) в случае сильных полей существенно зависят от напряженностей ЭМП. Такие зависимости определяются экспериментально, и их можно использовать только для конкретного типа материала.

Предложенная методика определения температурных полей в слоистых частицах и окружающей среде при наличии внутренних пространственных источников основана на использовании МТМ, и введены трансляционные матрицы для неоднородных дифференциальных операторов. Такие матрицы построены, по-видимому, впервые, и их применение при проведении практических расчетов может оказаться удобнее по сравнению с трансляционными матрицами для однородных уравнений.

Полученные соотношения для расчета температурных полей в окрестности наночастиц позволяют связать температуры в окружающей среде (клетке, межклеточной жидкости) с характеристиками ЭМП, и тем самым определить необходимые для достижения требуемых значений температур электрическую напряженность и магнитную индукцию внешнего поля.

Разработана методика определения конфигурации магнитных систем для локализации области действия магнитной силы. Традиционные подходы к проектированию магнитных систем [20–26] связаны с получением однородного магнитного поля. В рассматриваемой проблеме требуется, наоборот, попытаться получить максимально неоднородное поле. В связи с общими свойствами магнитных полей магнитная индукция быстро убывает при удалении от источника, а в областях геометрических границ постоянных магнитов или катушек всегда возникают нежелательные всплески. Расчеты показали, что подбором и размещением конических катушек или кольцевых постоянных магнитов эти всплески в значительной степени можно сгладить. Предложенный метод обработки экспериментальных данных при измерении магнитной индукции конкретного источника позволяет существенно сократить объем испытаний, а сам подход подтвержден экспериментально. Также реализован экспериментальный метод определения магнитных моментов наночастиц или их агрегатов.

Рассмотрено движение магнитных носителей в потоке крови в присутствии внешнего магнитного поля. Анализ функционирования сосудистой системы показал, что магнитные частицы могут проникать в клетки опухоли только через стенки

капилляров. Движение крови в капиллярах относительно медленное и имеет ламинарный характер. В крупных сосудах обмен веществ не происходит, и магнитное поле необходимо только для того, чтобы задержать носители в нужном органе и обеспечить время для возможности достижения стенок сосудов и проникновения в капилляры. При рассмотрении упрощенной модели движения носителей в потоке движущейся жидкости установлены необходимые уровни градиентов модуля вектора магнитной индукции (напряженности) поля для реализации этого процесса.

Отметим, что требование достижения необходимых температур в окрестности наночастиц накладывает ограничение на минимальное значение модулей векторов электрической напряженности и магнитной индукции, а для удержания частиц в требуемой области требуются определенные значения градиента модуля вектора магнитной индукции. Дополнительно для переменного ЭМП следует учитывать и частотную зависимость указанных характеристик.

Рассмотренные в настоящей работе вопросы далеко не исчерпывают проблему использования наночастиц при диагностике и лечении онкологических заболеваний. Биофизические задачи, связанные с исследованием взаимодействия клеток с наночастицами, медицинские проблемы влияния лекарственных препаратов на онкологические образования, химико-технологические задачи синтеза наночастиц с заданными свойствами и присоединения к ним необходимых веществ в этой работе не обсуждались. Вместе с тем, возможно, приведенные результаты окажутся полезными как при разработке новых технологий и оборудования, так и в практической медицине.

Литература

1. Freitas Jr., R.A., Nanomedicine, Volume I: Basic Capabilities [Text] / R.A. Freitas Jr. – Georgetown: Landes Bioscience, TX, 1999. – 509 p.
2. Силаков, К.И. Нанотехнологии в медицине [Текст] / К.И. Силаков; Т.Т. Силакова // Вісник НТУУ "КПІ". Серія – Радіотехніка. Радіоапаратобудування. – 2014. – № 49. – С. 212-218.
3. Игами, М. Современное состояние сферы нанотехнологий: анализ патентов [Текст] / М. Игами, Т. Оказаки // Форсайт. – 2008. – № 3 (7). – С. 32-43.
4. Freitas, R.A., Jr. Current Status of Nanomedicine and Medical Nanorobotics [Text] / R.A. Freitas Jr. // J. of Computational and Theoretical Nanoscience. – 2005. – V. 4. – P. 1-25.
5. Roco, M.C. National nanotechnology initiative: Past, present and future. Handbook on nanoscience, engineering and technology [Text] / Taylor and Francis, Boca Raton and London: M.C. RocoEd. Goddard, W.A et al. CRC, 2007. – P. 3.1-3.26
6. Хульман, А. Экономическое развитие нанотехнологий: обзор индикаторов [Текст] / А. Хульман, А. // Форсайт. – 2009. – № 1 (9). – С. 30-47.
7. Burne, J.D. Active targeting schemes for nanoparticles systems in cancer therapeutic [Text] / J.D. Burne, T. Betancourt, L. Brannon-Peppas // Adv. Drug Deliv. Rev. – 2008. – Vol. 60, No 15. – P. 1615-1626.
8. Duncan, R. The dawning era polymer therapeutics [Text] / R. Duncan // Nat. Rev. Drug. Discov. – 2003. – Vol. 2, No 5. – P. 347-360.
9. Prashan, K.J. Au nanoparticles target cancer [Text] / K.Jain Prashant, I. H. El-Sayed, M.A. El-Sayed // Nanotoday. – 2007. – V. 2, № 1. – P. 18-29.
10. Рууге, Э.К. Направленный транспорт лекарств с помощью магнитного поля [Текст] / Э.К. Рууге, А.Н. Русецкий // ЖВХО им. Д.И. Менделеева. – 1987. – №5. – С. 89-96.
11. Горбик, П. П. Нанокompозити з функціями медико-біологічних нанороботів: синтез, властивості, застосування [Текст] / П. П. Горбик // Наносистеми, наноматеріали, нанотехнології. – 2013. – Т. 11, № 4. – С. 323-436.
12. Нанокompозиты медико-биологического назначения на основе ультрадисперсного магнетита [Текст] / Шпак А.А., П.П. Горбик, В.Ф. Чехун //

- Физико-химия наноматериалов и супрамолекулярных структур. Т.1: Под ред. А.П. Шпака, П.П. Горбика. – 2007. – С. 45-87.
13. Дудченко, Н.О. Магнетні наночастинки медико-біологічного призначення: методи синтези, дослідження властивостей, застосування [Текст] / Н.О. Дудченко // Наносистеми, наноматеріали, нанотехнології. – 2009. – Т. 7, № 4. – С. 1027-1059.
 14. Nanomaterials and Supramolecular Structures: Physics, Chemistry, and Applications. Ed. by A.P. Shpak and P.P. Gorbyk [Text]. – Springer, 2009. – 427 p.
 15. Magnetosensitive Nanocomposites with Functions of Medico-Biological Nanorobots: Synthesis and Properties [Text] // P.P. Gorbyk, L.B. Lerman, A.L. Petranovska et al. // N.Y.: Nova Science Publishers. – 2014. – P. 161-198.
 16. Магнитоуправляемый транспорт лекарственных препаратов: современное состояние разработки и перспективы [Текст] / П.П. Горбик, И.В. Дубровин, А.Л. Петрановская и др. // Поверхность. – 2010. – Вып. 2(17). – С. 286-297.
 17. Никифоров, В.Н. Биомедицинские применения магнитных наночастиц [Текст] // В.Н. Никифоров // Нанотехнологии. – 2011. – № 1. – С. 90-99.
 18. Ткаченко, Н. В. Магнитная керамика на основе гидроксилатапата, модифицированная частицами гексагонального феррита типа М, для медицинских применений [Текст] / Н. В. Ткаченко, Л. П. Ольховик, А. С. Камзин // – Физика твёрдого тела. – 2011. – Т. 53. – Вып. 8. – С.
 19. Анализ силового воздействия высокоградиентного магнитного поля на магнитные наночастицы в потоке жидкости [Текст] / А.В. Кириленко, В.Ф. Чехун, А.Д. Подольцев и др. // Доп. НАН України. – 2010. – № 9. – С. 162-171.
 20. Алиев, И.И. Справочник по электротехнике и электрооборудованию [Текст] / И.И. Алиев. – Ростов н/д.: Феникс, 2004. – 480 с.
 21. Антонов, С. Н. Проектирование магнитных систем электротехнических устройств [Текст] / С. Н. Антонов, Д. Е. Кофанов. – ФГОУ ВПО Ставропольский гос. аграрный ун-т. – Ставрополь: АГРУС, 2011 – 240 с.
 22. Гальченко, В.Я. Параметрический синтез формы аксиально-симметричных полюсов электромагнита для создания однородного магнитного поля [Текст] / В.Я. Гальченко, А.Н. Якимов, Д.Л. Остапущенко // Электротехніка і Електромеханіка. - 2010. - №4. - С. 33-36.
 23. Гальченко, В.Я. Решение обратной задачи создания однородного магнитного поля в коэрцитиметрах с частично замкнутой магнитной системой [Текст] / В.Я. Гальченко, А.Н. Якимов, Д.Л. Остапущенко // Дефектоскопия. – 2011. – № 5. – С. 3-18.
 24. Якимов, А.Н. Интеллектуальная система оптимального параметрического синтеза источников магнитных полей с ферромагнитными элементами конструкции [Текст] / А.Н. Якимов, В.Я. Гальченко, Д.Л. Остапущенко // Искусственный интеллект. – 2011. – С. 74-79.
 25. Воробьев, М.А. Интеллектуальная система компьютерного проектирования соленоидальных многосекционных источников магнитных полей с заданным распределением поля в объеме пространства [Текст] / М.А. Воробьев // Искусственный интеллект. – 2004. – № 1. – С. 144-151.
 26. Подольцев, А.Д. Конечно-элементное моделирование магнитных и тепловых процессов при магнитно-жидкостной гипертермии биологических процессов [Текст] / А.Д. Подольцев, И.Н. Кучерявая // Электрон. Моделирование. – 2010. – Т. 34. – С. 89-104.
 27. Alphanđéry, E. Perspectives of Breast Cancer Thermoterapies [Text] / E. Alphanđéry // J. of Cancer. – 2014. – Vol. 5 (6). – P. 472-479.
 28. Шишко, Е.Д. Применение коллоидного золота в онкологических исследованиях [Текст] / Е.Д. Шишко, Н.Ф. Гамалея // Наноструктурное материаловедение. – 2010. – № 1. – С. 69-71.

29. Colloidal gold: a novel vector for tumor directed drug delivery [Text] / G.V. Paciotti, L. Mayer, D. Weinreich et al. // *Drug Deliv.* – 2004. – Vol. 11, No. 3. – P. 169-183.
30. Powell, A.C. Colloidal gold: a novel nanoparticle for targeted cancer therapeutics [Text] // A.C. Powell, G.F. Paciotti, S.K. Libutti // *Methods Mol. Biol.* – 2010. – Vol. 624. – P. 375-384.
31. Optical properties and xps-characterization of Ag/Au bimetallic nanoparticles in porous sol-gel silica films [Text] / A.M. Eremenko, N.P. Smirnova, H.R.Yashan et al // *Физика, химия и технология поверхности.* – 2010. – Т. 1, № 1. – С. 94-104.
32. Шаповал, Л. В. Фотохимический синтез, исследование структуры и свойств биметаллических наночастиц на основе серебра и золота : диссертация ... канд. физ.-мат. наук : Санкт-Петербург, 2011. – 120 с.
33. Трачук, Л. А. Оптические свойства наночастиц золота и серебра в связи с задачами биодиагностики : диссертация ... канд. физ.-мат. наук : Саратов, 2007. – 121 с.
34. Alphanéry, E. Use of bacterial magnetosomes in the magnetic hyperthermia treatment of tumours: a review [Text] / E. Alphanéry, I. Chebbi, F. Guyot, and M. Durand-Dubief // *Int. J. Hyperthermia.* – 2013. – 29. – P. 801-809.
35. Bazylnski, D.A. Synthesis of the bacterial magnetosome: the making of a magnetic personality / D.A. Bazylnski // *Int. Microbiol.* – 1999. – V. 2, № 4. – P. 71-80.
36. Govorov, A.O. Gold nanoparticle ensembles as heaters and actuators: melting and collective plasmon resonances [Text] / A.O. Govorov, Wei Zhang // *Nanoscale Res Lett.* – 2006. – № 1. – P. 84–90.
37. Черенков, В.С. Техническая электродинамика: Конспект лекций. [Текст] / В.С. Черенков, А.М. Иваницкий. – Одесса: ОНАЗ им. А.С. Попова, 2006. – 160 с.
38. Bohren, C.F. Absorption and Scattering of Light by Small Particles [Text] / C.F. Bohren, D.R. Huffman. – New York: Wiley-Interscience, 1983. Русский перевод: Борен К., Хафмен Д. Поглощение и рассеяние света малыми частицами. – М.: Мир, 1986. – 664 с.
39. Породько, Л.В. Электродинамическая энергия в сферических слоистых наночастицах [Текст] / Л.В. Породько, Л.Б. Лерман // *Технол. аудит и резервы производства.* – 2013. – № 6/1 (14). – С. 41-44.
40. Поляризованість структурно-неоднорідних кульових частинок [Текст] / Л.Г. Гречко, Л.Б. Лерман, Д.Л. Водоп'янов, С.В. Шостак // – *Вісн. Київс. ун-ту. Сер. : фіз.-мат науки.* – 2007. – №1. – С. 207-214.
41. Khorasani, S. Analytical solution of linear ordinary differential equations by differential transfer matrix method [Text] / S. Khorasani, A. Adibi // *Electronic J. of Differential Equations.* – 2003. – Vol. 2 003, No. 79. – P. 1-18.
42. Scattering cancellation by metamaterial cylindrical multilayers [Text] / S. Tricarico, F. Bilotti, L. Vegni // *J. of the European Optical Society. Rapid Publication.* – 2009. – 4, P. 09021-1-09021-10.
43. Abramovitz, A. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables [Text] / A. Abramovitz, I. A. Stegun. – Washington, DC: National Bureau of Standards. NBS Applied Mathematical Series 55, 1964. – 1044 p. Русский пер.: Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган [Текст]. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
44. Stratton J.A. Electromagnetic theory. – McGraw-Hill, New-York, 1941.(Русский перевод: Стреттон Дж. Теория электромагнетизма. – М.-Л.: Гостехиздат, 1948.).
45. Bohren C.F., Huffman D.R. Absorption and Scattering of Light by Small Particles. – Wiley-Interscience, New York, 1983. (Русский перевод: Борен К., Хафмен Д. Поглощение и рассеяние света малыми частицами. – М.: Мир, 1986. – 664 с.).

46. Roth J., Digman M.J. Scattering and extinction sections for a spherical particles coated with an oriented molecular layer // *J. of the optical society of America.* – 1973, V. 63. – N. 3. – 308-311 p.
47. Лопатин В.Н., Сидько Ф.Я. Введение в оптику взвесей клеток. – Новосибирск: Наука, 1988. – 240 с.
48. Mischenko, M.I., Hovenier I.V., Travis L.D. Light Scattering by Nonspherical Particles [Text] / – Academic press, 2004. – 690 p.
49. Barber, P.W. Light Scattering by Particles: Computational Methods. V.4. – Singapore, New Jersey, London, Hong Kong: World Scientific, 1990. – 253 p.
50. Aden A.L., Kerker M.. Scattering of Electromagnetic Waves from Two Concentric Spheres // *J. Appl. Phys.* – 1951. – V. 22, No 10. – 1242 – 1245.
51. Wu, Z.S. Electromagnetic scattering for multi-layered sphere: recursive algorithm [Text] / Z.S. Wu, Y.P. Wang // *Radio. Sci.* – 1991. – 26. – P. 1393–1401.
52. Moroz, A.A recursive transfer-matrix solution for a dipole radiating and outside a stratified sphere [Text] / A.A Moroz // *Annals of Physics.* – 2005. – 315. – P. 352–418.
53. Scattering of electromagnetic radiation by multilayered spheroidal particles: recursive procedure [Text] / I. Gurwich, M. Kleiman, N. Shiloah, A. Cohen // *Applied optics.* – 2000. – 39, No. 3. – P. 470–477.
54. Лерман, Л. Б. Виникнення додаткових плазмових резонансів у шаруватих малих частинках [Текст] / Л.Б. Лерман // *Наносистеми, наноматеріали, нанотехнології.* – 2009.– Т. 7, № 1. – С. 37–47.
55. Лерман, Л. Б. Возникновение дополнительных плазмонных резонансов в малых частицах с оболочкой [Текст] / Л.Б. Лерман // *Химия, физика и технология поверхности.* – 2008, вып. 14. – С. 91–100.
56. Гречко, Л. Г. Багатошаровий еліпсоїд в електростатичному полі [Текст] / Л.Г. Гречко, Л.Б. Лерман, Н.Г. Шкода // *Вісн. Київ. ун-ту. Сер. фіз.– мат.* – 2004. – Вип. 1. – С. 386–394.
57. Гречко, Л. Г. Ефективна діелектрична проникність матричних дисперсних систем з багатошаровими включеннями: пряма та обернена задачі [Текст] / Л.Г. Гречко, Л.Б. Лерман, Н.Г. Шкода // *Вісн. Київс. у-ту. Сер. фіз.– мат.* – 2004. – Вип. 4. – С. 474–481.
58. Лющенко, М. О. Взаємодія електромагнітного випромінювання з шаруватою сферичною лінзою [Текст] / М.О. Лющенко, Л.Б. Лерман, Я.С. Криворучко // *НТУУ (КПІ), Радіотехніка. Радіоапаратуробудування.* – 2007.– Вип. 34. – С. 54–58.
59. Поляризованість структурно неоднорідних кульових частинок [Текст] / Л.Г. Гречко, Л.Б. Лерман, Д.Л. Водоп'янов, С.В. Шостак // *Вісн. Київс. у-ту. Сер. фіз.–мат.* – 2007. – Вип. 1. – С. 416–425.
60. Лерман, Л.Б. Особливості взаємодії електромагнітного випромінювання з малими частинками: теоретичні аспекти [Текст] / Л.Б. Лерман, В.Є. Клименко, Н.Г. Шкода, С.В. Шостак // *Успехи физики металлов.* – 2014. – Т. 13. – С. 73–104.
61. Породько, Л.В. Электродинамическая энергия в сферических слоистых наночастицах [Текст] / Л.В. Породько, Л.Б. Лерман // *Технологич. аудит и резервы производства.* – 2013. – № 6/1 (14). – С. 41–44.
62. Гречко, Л. Г. Розсіювання електромагнітного випромінювання на багатошаровій кулі [Текст] / Л.Г. Гречко, Л.Б. Лерман, Н.Г. Шкода // *Вісн. Київс. у-ту. Сер. фіз.–мат.* – 2004. – Вип. 3. – С. 376–384.
63. Grechko L.G., Bila R.V., Semchuk O.Yu., Willander M., and Karlsteen M. Features of transport phenomenas in magnetic semiconductors with laser-induced periodic nanostructures // *Materials Science & Engineering C.* - 2007. - V.27. - P. 1360-1363

64. Thermal effects caused interaction of powerful laser radiation of condensed matter / O.Yu.Semchuk, L.G.Grechko, L.B.Lerman, M. Willander, M. Karlsteen // *J. Optoelect. Adv. Mat.* – 2010. – V.12, No. 3. – P. 586-588.
65. Періодичні структури, індуковані на поверхні твердих тіл інтерференцією лазерних пучків. Теплові ефекти / А.П. Шпак, Л.Г. Гречко, Л.Ю. Куницкая, Л.Б. Лерман, О.Ю. Семчук // *Наносистеми, наноматеріали, нанотехнології.* – 2007. – Т. 5, № 3. – С. 683 – 718.
66. Гречко Л.Г., Лерман Л.Б., Семчук О.Ю., Лющенко М.О., Куницька Л.Ю. Індуковані лазерними пучками поверхневі періодичні структури // *Вісник Київського університету. Серія: фіз.- мат. науки.* – 2007. – № 3. – С. 282- 289.
67. Горбик П.П., Гречко Л.Г., Семчук А.Ю, Лерман Л.Б., Куницкая Л.Ю. Лазер – индуцированные периодические поверхностные структуры в твердых телах // *Химия, физика и технология поверхности.* – 2007. – Вып 13. – С. 34 – 47.
68. Гречко Л.Г., Семчук А.Ю, Лерман Л.Б., Породько Л.В. Просторовий та часовий розподіл температури на поверхні твердого тіла, викликаний одномірною лазерінтерференційною картинкою // *Вісник Київського університету. Серія: фіз.- мат. науки.* – 2011. – № 1. – С. 227- 230.
69. Демчишин А.Б., Породько Л.В. Форми отоплення поверхні твердого тіла під дією імпульсного лазерного випромінювання // *Успехи физики металов.* – 2011. – № 3. – С. 55-59
70. Породько Л.В. / Врахування кінцевої швидкості поширення тепла при лазерному розігріві поверхні твердого тіла / Л.В. Породько, Л.Б. Лерман, О.Ю. Семчук // *Хімія, фізика та технологія поверхні.* – 2011. – Т.2, № 3. – С. 343–346.
71. Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М.: Гос. изд. технико-теоретической литературы, 1952. – 392 с.
72. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Высш. Школа, 1970. – 712 с.
73. Туголуков Е.Н.. Решение задач теплопроводности методом конечных интегральных преобразований: Учебное пособие. – Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. Ун-та, 2005. – 116 с.
74. Карташов Э.М., Любов Б.Я. Аналитические методы решения краевых задач уравнения теплопроводности в области с движущимися границами: Обзор // *Известия АН СССР. Энергетика и транспорт.* – 1974. – № 6. – С. 83–111.
75. Карташов Э.М. Метод интегральных преобразований в аналитической теории // *Известия АН СССР. Энергетика и транспорт.* – 1976. – Т. 14. – № 5. – С. 85–105.
76. Карташов Э.М., Белоусов В.П. Расчеты температурных полей в твердых телах // *Известия АН СССР. Энергетика и транспорт.* – 1983. Т. 21. – № 5. – С. 112–121.
77. Карташов Э.М. Аналитические методы решения краевых задач теплопроводности с разнородными граничными условиями на линиях: Обзор // *Известия АН СССР. Энергетика и транспорт.* – 1986. – № 5. – С. 125–149.
78. Карташов Э.М. Аналитические методы смешанных граничных задач теплопроводности: Обзор // *Известия АН СССР. Энергетика и транспорт.* – 1986. – № 6. – С. 116–129.
79. Карташов Э.М. Метод обобщенного интегрального преобразования при решении уравнения теплопроводности в области с движущимися границами: Обзор // *Инженерно-физический журнал.* – 1987. – Т. 52, № 3. – С. 495–505.
80. Карташов Э.М. Метод интегральных преобразований в аналитической теории теплопроводности твердых тел // *Известия РАН. Энергетика.* – 1993. – № 2. – С. 99–127.
81. Карташов Э.М. Расчеты температурных полей в твердых телах на основе улучшенной сходимости рядов Фурье-Ханкеля // *Известия РАН. Энергетика.* – 1993. – № 3. – С. 106–125.
82. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – Москва: Наука, 1972. – 355с.

83. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Москва: Наука. – 1976. – 576 с.
84. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. – Москва: Наука. – 1973. – 831 с.
85. Владимиров, В.С. Уравнения математической физики. – Москва: Наука. – 1971. – 512 с.
86. Ахиезер А.И. Общая физика. Электрические и магнитные явления. – Киев: Наук. думка, 1981. – 468 с.
87. Парсел Э. Курс физики. Т.2. Электричество и магнетизм. – М.: Наука. – 1971. – 448 с.
88. Боровик Е. С., Еременко В. В., Мильнер А. С. Лекции по магнетизму.–Москва: Физматлит, 2005.–510с.
89. Montgomery D.B. Magnetic Forces for Medical Applications // J. Appl. Physics. – Symposium on Bioengineering. – 1969.- 40, N 3. – P. 1039-1042.
90. Lacava L.M., Lacava V.M., Azevedo R.B. and others. Nanoparticle sizing: a comparative study using atomic force microscopy, transmission electron microscopy, and ferromagnetic resonance // J. Magnetism and Magnetic Materials. – 2001. – 225. – P. 79-83.
91. Самойленко Н.И., Кузнецов А.И., Костенко А.Б. Теория вероятностей: Учебник. – Х.: Из- во«НТМТ», ХНАГХ. – 2009. – 200 с.
92. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. – М.: Мир, 1980. – 280 с.
93. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. – М.: Наука, 1978. – 228 с.
94. Гречко Л.Г., Горбик П.П., Лерман Л.Б., Чуйко О.О. Можливість використання магнітних наночасток як засобів транспорту і утримання лікарських препаратів в організмі // Доп. НАН України. – 2006. – № 4. – С. 181–185.
95. Некоторые физические аспекты проблемы использования магнитных наночастиц в качестве средств транспорта лекарственных препаратов / П.П. Горбик, Л.Б. Лерман Л.Г. Гречко, М.Л. Галата // Евразийский конгресс «Медицинская физика – 2005». – Тез. докл. – М.: МГУ, 2005.
96. Шпак, А.П. Нанокompозиты медико-биологического назначения на основе ультрадисперсного магнетита. В 2-х т. / А.П. Шпак, П.П. Горбик, В.Ф. Чехун, Л.Г. Гречко, И.В. Дубровин, А.Л. Петрановская, Л.Ю. Вергун, О.М. Кордубан, Л.Б. Лерман. – Киев: Наук. думка, 2007. – Т.1, С. 45-89.
97. Oshima M., Takagi K., Torii R. Experimental and Numerical investigation of blood flow in cerebral artery // 2nd Europ conf on computational mechanics. – Krakow, Poland, 2001. Abstr. – V. 1. – P. 100 – 101.
98. Физиология кровообращения. Физиология сосудистой системы. – Ленинград: Наука. – 1984. – 643 с.
99. Павловский Ю.Н. Гидродинамика крови / Ю.Н Павловский, С.А. Регирер, И.М. Скобелева // Итоги науки. – Москва: ВИНТИ. – 1970. – С. 7-96.
100. Каро, К. Механика кровообращения / К. Каро, Т. Педли, Р. Шротер, У. Сид. – Москва: Мир. – 1981. 624 с.
101. McDonald, D.A. Blood Flow in Arteries. – Baltimore: Williams, Wilkins, 1974. – 496 p.
102. Lehninger A.L. The metabolism of the arterial wall. In the Arterial Wall. . – Baltimore: Williams, Wilkins, 1959. – P. 220-246.
103. <http://meduniver.com/Physiology/356.html> MedUniver.
104. Тишина, Е. Магниты и современная медицина / amtc/ru>publications / articles.
105. Haik, Y., V. Pai and C. J. Chen, “Apparent Viscosity of Human Blood in a High Statics Magnetic Field / Y. Haik, V. Pai and C. J. Chen // J. of Magnetism and Magnetic Materials. – 2001. – Vol. 225, No. 1-2. – P. 180-186.
106. C. G. Caro, T. J. Pedley, W.A. Seed (1974). Mechanics of the circulation, Chapter 1 of Cardiovascular physiology (ed. A.C. Guyton). Medical and Technical Publishers, London.

107. E. N. Lightfoot. Transport phenomena in living systems. Biomedical aspects of momentum and mass transport. (Lohn Willey and sons, New York, 1974).
108. F. Yuan, HA Salehi, Y Boucher et al. Vascular permeability and microcirculation of gliomas and mammary carcinomas transplanted in rat and mous cranial windows. – Cancer research. – 1994. – 54. – 4564–4568.

ДЕЯКІ ФІЗИЧНІ АСПЕКТИ ЗАСТОСУВАННЯ НАНОЧАСТИНОК ПРИ ДІАГНОСТИЦІ І ЛІКУВАННІ ОНКОЛОГІЧНИХ ЗАХВОРЮВАНЬ

Л.Б. Лерман

*Інститут хімії поверхні ім. О.О. Чуйка Національної академії наук України,
вул. Генерала Наумова, 17, Київ, 03164, Україна, e-mail: llerman@yandexl.ru.*

Аналізуються можливості використання в медицині золотих и біметалевих наночастинок із срібним ядром і золотою оболонкою, а також магнітних композитних наночастинок. Для шаруватих сферичних і циліндричних частинок отримані нові розв'язки зв'язаних задач електродинаміки і теплопровідності. Наводяться результати розрахунково-експериментальних досліджень магнітних полів і технічних характеристик аплікаторів для модельних джерел поля. Розроблена методика визначення конфігурації магнітних систем для локалізації області дії магнітної сили і експериментально знайдені магнітні моменти агрегатів наночастинок. Визначені кінематичні характеристики руху магнітних частинок у кровоносних судинах при дії зовнішнього поля і встановлено умови втримання носіїв в органі-мішені. Отримані співвідношення для розрахунку температурних полів в околі наночастинок дозволили зв'язати температури в клітині і міжклітинної рідини з характеристиками електромагнітного поля, і тим самим установити необхідні для досягнення потрібних значень температур електричну напруженість і магнітну індукцію зовнішнього поля.

SOME PHYSICAL ASPECTS OF THE USE OF NANOPARTICLES IN THE DIAGNOSIS AND TREATMENT OF CANCER

L.B. Lerman

*Chuiko Institute of Surface Chemistry of National Academy of Sciences of Ukraine,
17 General Naumov Str. Kyiv, 03164, Ukraine, e-mail: llerman@yandexl.ru.*

In this work proposer sets a goal to analyze general possibilities in principle of using gold and bimetallic nanoparticles with a silver core and a gold shell, and magnetic composite particles in cancer medicine. New solutions of electrodynamics and thermal conductivity connected problems for layered spherical and cylindrical particles are obtained. The results of calculated and experimental research of magnetic fields and technical characteristics of the applicators for the model field sources are presented. The devised method gives an opportunity of determining the configuration of magnetic systems to localize the domain of effective magnetic field action. Performed experiments set the values of magnetic moments of nanoparticles' aggregates. Kinematic characteristics of the motion of magnetic nanoparticles in blood vessels under the action of the external field are determined, and conditions of carriers' retention in the target organ are established. Obtained relations to calculate the temperature fields in the vicinity of nanoparticles are allowed to link the temperature in the cell and interstitial fluid with the characteristics of the electromagnetic field, and thus sets to achieve the required values of temperature, electric field strength and magnetic induction of the external field.