

УДК 519.7

С.В. Лазаренко, О.С. Макаренко

## БАГАТОПОТОЧНІ КОМП'ЮТЕРНІ ОБЧИСЛЕННЯ У ДОСЛІДЖЕННІ НЕЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

Динамічні системи із антисипацією представляють собою новий напрям в математичному моделюванні, котрий знаходить все більше застосувань в таких прикладних областях, як штучні нейронні мережі, клітинні автомати, агентів тощо. Такі нові моделі успішно застосовують у моделюванні різних соціальних явищ (зокрема поведінки натовпу). В роботі розглядаються особливості та проблеми моделювання нелінійних динамічних систем з операторами еволюції, що задаються багатозначними відображеннями. Запропонована архітектурна модель багатопоточних обчислень карт показників (в якості яких можуть виступати як фрактальні розмірності, карти динамічних режимів, так і показники Ляпунова) при моделюванні систем із сильною антисипацією. Детально описані процедури розрахунку карт динамічних режимів та карт старших показників Ляпунова, що адаптовані до такого типу динамічних систем. В ході роботи використовувалися розроблені багатопоточні програмні засоби для обчислювальної системи архітектури СКІТ.

### Вступ

Обчислювальна техніка, що останні десятиліття бурхливо розвивається відкрила шлях не лише до чисельного дослідження нових математичних моделей, яке раніше не представлялося можливим із-за значних обчислювальних витрат, а й надала зручний та широкий клас інструментів за представленням отриманих результатів (у тому числі й у візуальному).

Для більш оптимального розв'язання ресурсномістких інженерних задач на ряду із нарощенням обчислювальних потужностей доцільно розроблювати паралельні алгоритми обчислень. Так, варто відзначити вітчизняні здобутки у побудові таких надшвидкісних комп'ютерних комплексів, як кластери Інституту кібернетики імені В.М Глушкова та НТУУ «КПІ», що входять до переліку найпотужніших обчислювальних центрів. Сама обчислювальна платформа таких великих центрів представляється програмним забезпеченням середнього рівня GRID-системою, що пов'язує ряд інститутів і відомств. Так, на базі Інституту кібернетики створено високоефективний обчислювальний комплекс СКІТ (суперкомп'ютери для інформаційних технологій), що дає змогу розв'язувати принципово нові задачі із ресурсномісткими обчисленнями в космічній, економічній, технічній та інших сферах.

За допомогою розроблених програмних комплексів стає можливим моделювати поведінку та досліджувати такі складні явища, як урагани, прогнозувати землетруси і повені, інші стихійні та екологічні загрози (роботи Куссуль Н.Н., Шелестова А.Ю., Скакун С.В., Скопечького В.В., Булавацького В.М. та інших). Розподілені паралельні обчислення дали поштовх до розвитку ряду нових моделей в області біоінформатики, штучних біологічних систем (штучних імунних систем та штучних нейронних систем), побудові мультиагентних систем, що представлені взаємодією агентів між собою та навколишнім середовищем.

Із написанням програмних засобів для надпотужних комп'ютерних комплексів постає складна задача по створенню відповідних інтелектуальних алгоритмів. Крім того, ускладнюється і задача оцінки достовірності отриманих комп'ютерних розв'язків. Зокрема, в роботах [1–4] описані основні принципи створення інтелектуальних програмних засобів на системах багато поточності команд та даних (MIMD), проблеми розробки паралельних алгоритмів та критерії якості паралельних алгоритмів. Розробка такого роду обчислювальних алгоритмів неодмінно має супроводжуватися, як зазначалося,

оцінкою отриманих машинних розв'язків. Очевидно, що прикладні математичні моделі містять похибки початкових даних. Вплив початкових даних навіть для простих прикладів може приводити до цілком різних результатів [2]. А, проблеми дослідження впливу точності початкових даних є одними із наріжних в теорії хаосу. Дослідження динамічних систем нерозривно пов'язане із виділенням областей із різними їх режимами еволюціонування (хаотичними, регулярними) та з'ясування особливостей переходу одних в інші (зокрема, сценарії переходу до хаосу).

### Постановка задачі

Головною метою даної статі буде – дослідження нелінійної динамічної системи (надалі ДС) з антисипацією із використанням апарату багатопоточних обчислень для розрахунку ряду показників (таких, як карти динамічних режимів, карти старших показників Ляпунова, карти фрактальних розмінностей станів таких ДС).

Задачі моделювання процесів, що описуються антисипаційними законами, чи законами із «випередженням» [5–10], що постають при дослідженні реальних (чи наближених до реальних) явищ, часто формалізуються в явному вигляді із використанням багатозначних операторів. Основні дослідження в теорії антисипаційних систем належать Д. Дюбуа, Г. Вебер, М. Бюрк, Л. Лейдесдорф та ін., серед вітчизняних здобутків у теорії застосування принципів антисипації варто відзначити роботи [5, 7, 8], які присвячені прикладним аспектам застосування теорії антисипації при моделюванні соціальних явищ за допомогою клітинних автоматів та нових моделей нейронних мереж.

Чисельне моделювання таких систем на порядок складніше за ДС, що задаються однозначними операторами еволюції. Серед таких процесів можна відзначити моделі «ресурсу-споживач», безіммунного поширення епідемій та багато інших [11]. Так, до прикладу, модель зміни чисельності популяції живих організмів, що оцінює свою власну чисельність за відношенням до майбутнього стану навколиш-

нього середовища, в якому і розвивається ця популяція, можна представити як

$$P(t) = f(P(t-1), \hat{P}(t), E(t)),$$

де  $P(t)$  – чисельність популяції в момент  $t$ ,  $\hat{P}(t)$  – оцінка (прогноз) стану чисельності в момент  $t$ ,  $E(t)$  – стан навколишнього середовища в момент  $t$ . Такого роду системи називають антисипаційними із слабкою антисипацією. В даній статі розглядаються дискретні сильні антисипаційні ДС, такі, що в загальному вигляді формалізуються як

$$x_{t+1} = f(x_{t-a_1}, \dots, x_{t-1}, x_t, x_{t+1}, \dots, x_{t+a_2}, \Lambda), \quad (1)$$

де  $x_{t+i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, a_2$  – майбутні стани системи,  $a_2$  – порядок антисипації,  $x_t$  – поточний стан і  $x_{t-i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, a_1$  – минулі стани системи з управляючими параметрами ( $\Lambda \in R^l$ ),  $t \in Z$  – дискретний час, оператор зв'язку  $f: \underbrace{R^m \times \dots \times R^m}_{a_1+a_2+1} \times R^l \rightarrow R^m$ . У (1) маються на увазі стани системи в неявному вигляді. Детальне роз'яснення поняття антисипації, її класифікації та прикладні моделі, що базуються на ньому можна знайти у [9, 10] та у їхніх посиланнях.

В максимально наближених до реальності моделях «жертви-хижака» антисипаційна складова вкрай важлива, так як необхідне дотримання біологічного балансу співіснування популяцій. Такий підхід, очевидно, можна перенести за аналогією і на різноманітні економічні та соціальні моделі конкуренції (будь то боротьба за ресурси чи рух натовпу при наявності різних типів обмежень). Отже, окрім створення нових моделей можна вдосконалити (уточнити) існуючі, роблячи їх більш «близькими» до реальних процесів, явищ.

По при широке застосування підходів із «випередженням» у моделюванні та дослідженні багатьох явищ все ще залишаються не розкритими ряд питань, серед

яких дослідження умов та сценаріїв зміни типів динамічних поведінок у таких системах. Таким чином дану статтю присвяtimo особливостям чисельного дослідження динаміки таких систем.

### Розв'язання інженерної задачі на обчислювальній системі архітектури СКІТ

Відомо, що необхідною умовою виникнення хаотичної поведінки, тобто сильної залежності від початкових даних, є не лінійність. Поставлена ж в цій статті задача по моделюванню нелінійної ДС виступає у ролі задачі із заданими наближеними початковими даними. Так, в основу дослідження та розв'язання цієї інженерної задачі, котра описується в загальному вигляді багатозначними операторами, згідно із [2] можна покласти наступні етапи:

- створення та дослідження дискретної математичної моделі ДС, що описує деякий антисипаційний (із випередженням) процес чи явище;
- створення та теоретичне обґрунтування комп'ютерних методів дослідження

моделі із урахування архітектури обчислювальної системи;

- розробка комп'ютерних алгоритмів розв'язання, що оцінювали б достовірність отриманих результатів.

Вирішення нашої задачі передбачає реалізацію принципу скритого паралелізму [1], тобто абстрагування від архітектури системи (зокрема, багатопоточності) і включає: розпаралелювання обчислювальних алгоритмів, синхронізацію обміну даними між обчислювальними вузлами, представлення вихідної інформації, зручної для користувача.

Зосередимося на розв'язанні абстрактної інженерної задачі по розрахунку карти показників (по набору параметрів) заданої ДС, оператор еволюції якої задається багатозначним відображенням.

На рис. 1 показано узагальнену схему розрахунку карти заданого набору показників ДС з антисипацією. Як абстрактна карта показників у простір параметрів ДС використовувались: карти динамічних режимів, показники Ляпунова, спектри узагальнених розмінностей Реньє.

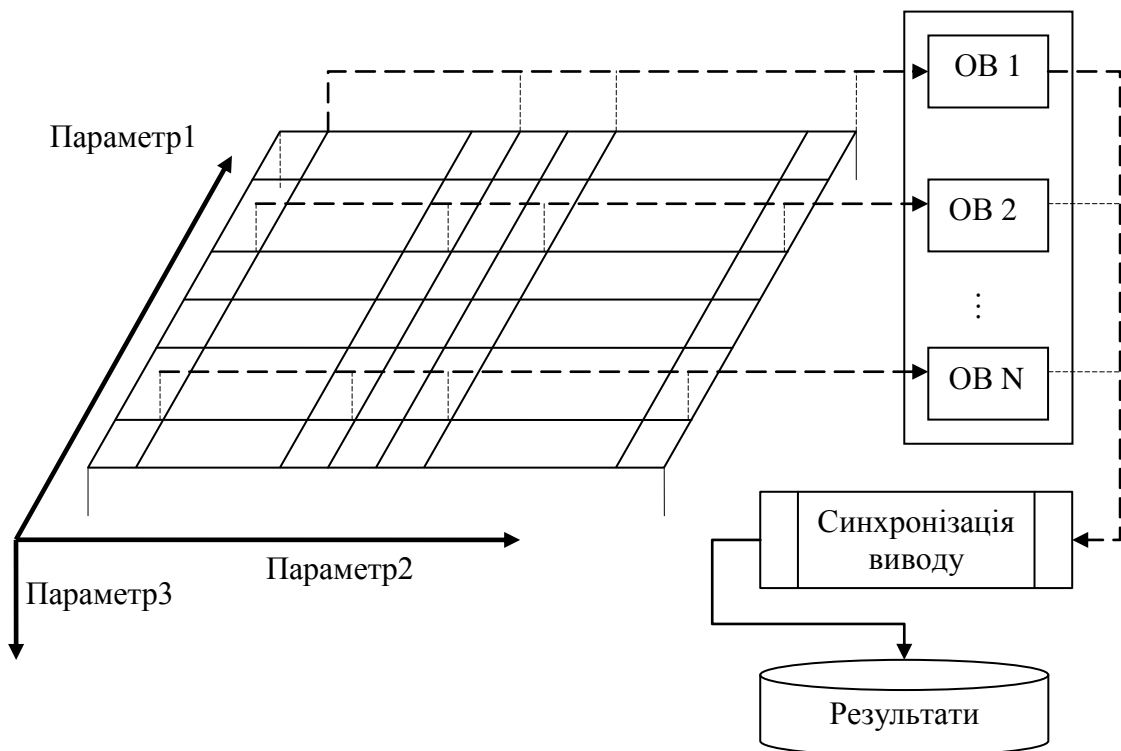


Рис. 1. Узагальнена схема обчислень карти показників. Позначено: «OB» – обчислювальний вузол; «Параметр» – параметр ДС, за яким проводиться розрахунок карти

Така схема дає можливість абстрагуватися від конкретного виду карти показників у процесі її розрахунку.

Для початку введемо необхідні визначення та прийняті позначення, які можна знайти у [10]. Розглядатимемо систему (1), що описується законом сильної антисипації першого порядку

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n+1}, \Lambda), \quad x_n \in R, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

де управляючий параметр  $\Lambda = (\lambda; \alpha) \in R^2$ , оператор зв'язку  $f: R \times R \times R^2 \rightarrow R$  (як правило – однозначний), стани неявної системи  $x_i$ . Нехай оператор  $f$  передбачає багатозначність розв'язків і його можна представити відображенням  $F: S \times R^2 \rightarrow S$  в явному вигляді

$$X_{n+1} = F(X_n, \Lambda), \quad (2)$$

де  $X_n = \bigcup_k \{x_n^k\} \in S$  – стан ДС в явному вигляді в дискретний момент  $n = 0, 1, \dots$ ,  $S \subset 2^R$  – множина станів ДС (узагальнено  $S_m \subset 2^{R^m}$  і надалі позначатимемо  $S_1 = S$ ). Часто під станом антисипаційної ДС розуміють саме  $x_i$  із (1), однак у контексті нашої задачі за розрахунком карт показників будемо притримуватись визначень вище та наведених у [10]. При такому представленні нашої антисипаційної ДС, через явну залежність поточного її стану від попередніх (за часом) станів оператор  $F$  називатимемо оператором еволюції ДС із антисипацією. Траєкторію ДС, заданої правилом зміни станів (2), представлятимемо послідовністю  $X_0, X_1, X_2, \dots$ . Визначимо на  $S_m$  метрику Хаусдорфа

$$d_H(X, Y) = \max \left\{ \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} \rho(x, y), \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} \rho(x, y) \right\},$$

де  $X, Y \in S_m$ ,  $\rho(\cdot, \cdot)$  – метрика Евклідова. Тобто,  $d_H(\cdot, \cdot) = r$  – таке найменше значення при якому  $r$ -покриття  $X$  включає  $Y$ , та  $r$ -покриття  $Y$  включає  $X$ . Наперед задамося досить малим значенням  $\varepsilon$ , яке

представлятиме точність розрахунків періодичних орбіт нашої ДС (2).

**Визначення 1.** Під непорушною точкою періоду  $p$  антисипаційної ДС  $D$  розумітимемо набір послідовних точок  $X_i, X_{i+1}, \dots, X_{i+p-1}$  таких, що  $p$  – найменше додатне, при якому

$$d_H(X_i, F(X_{i+p-1}, \Lambda)) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0.$$

Практично для визначення періоду використовуватимемо умову

$$d_H(X_i, F(X_{i+p-1}, \Lambda)) < \varepsilon.$$

**Визначення 2.** Збуреним станом ДС із антисипацією стану  $X_n \in S_m$  називатимемо такий стан  $X'_n \in S_m$ , що  $d_H(X_n, X'_n) = \|\tilde{x}_n\|$ , де  $\tilde{x}_n \in R^m$  – збурення  $X_n$ ,  $\|\cdot\|$  – евклідова норма.

Таке визначення задає неоднозначність  $X'_n$ . Зрозуміло, що збурюючи  $X_n$  у різний спосіб за допомогою  $\tilde{x}_n$  так, щоб  $d_H(X_n, X'_n) = \|\tilde{x}_n\|$ , можна отримувати різні результати в ході ітерування (2). Для більшої визначеності будемо збурювати  $X_n$  наступним чином:

$$X'_n = X_n + \tilde{x}_n = \{x \mid x - \tilde{x}_n \in X_n\}.$$

### Адаптована процедура розрахунку карт динамічних режимів до ДС із антисипацією

Кarti динамічних режимів є досить зручним інструментом візуального представлення різних режимів багатопараметричних нелінійних системи (будують, як правило за 2-ма параметрами, у випадку ж більшої розмірності будують 2-х вимірні перерізи просторів параметрів). Класичні процедури їх розрахунку можна знайти у роботах Кузнецова С.П., Кузнецова О.П., Аніщенко В.С. та багатьох ін. Для прикладу, розглянемо особливості їх побудови для дискретної ДС з антисипацією.

Початкову карту параметрів (на практиці 2-х вимірну) розділяємо на  $N \times M$  блоків, де  $N$  – кількість наданих обчислювальних вузлів,  $M$  – кількість потоків, що посилаємо на один ОВ (не менше

за кількість ядер на даному ОВ). Питання щодо визначення  $M$  вирішують, як правило, виходячи із попередньої оцінки простору параметрів. Якщо область простору параметрів, що посилається на ОВ передбачається без різких переходів режимів (хаотичний – періодичний), то  $M$  вибирають близьким до кількості ядер ОВ (рівномірне завантаження). У випадку насиченості різноманітними областями динамік,  $M$  варто вибирати помітно більше за кількість ядер, оскільки траєкторії ДС в деяких областях можуть перериватися, закінчуючи тим самим дослідження даної частини простору параметрів, і частина ядер ОВ будуть простоювати.

Так, класичну процедуру розрахунку карти динамічних режимів починають із обрання параметричної точки  $\Lambda_0 = (\lambda_0; \alpha_0)$  і початкового значення  $X_0 = \{x_0\}$ . При першому ж запуску траєкторії  $X_0$  обирають близькою до смислового значення системи, для якої побудована модель (2). Якщо це не перший запуск траєкторії системи, то в якості  $X_0$  обираємо стан ДС, отриманий із усталеного стану попереднього запуску траєкторії для якої знайдено періодичну орбіту. При побудові таких карт задалегідь обмежуємося максимальним періодом орбіти, що намагаємося відшукати ( $p$ ). Далі здійснюють достатню кількість ітерацій системи (2), аби траєкторія максимально наблизилася до усталеного режиму (якщо він є). Оцінку достатності проведених ітерацій здійснюємо наступним чином. Провівши першу серію ітерацій (2) здійснюємо розрахунок метрик Хаусдорфа

$$\bar{d}^{(0)} = (d_1^{(0)}, d_2^{(0)}, \dots, d_p^{(0)}),$$

де  $d_j^{(0)} = d_H(X_{i+p-j}, X_{i+p})$  ( $p \leq p$ ) до першої, яка менша за  $\varepsilon$  (рис. 2).

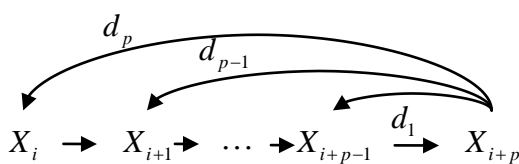


Рис. 2. Пошук періоду

У випадку, коли знайдено таку  $d_k$ , то направляємо у блок синхронізації виводу (рис.1) пару  $(\Lambda_0, k)$ . Якщо ж таку не знайдено, то здійснюємо наступну серію ітерацій (2). Такі серії ітерувань  $s = 0, 1, \dots$  проводимо до тих пір, поки  $m^{(s)} = \min(d_1^{(s)}, d_2^{(s)}, \dots, d_p^{(s)})$  спадає і порівняно з  $\varepsilon$  не велике. Нехай тепер  $m^{(s)} = d_{k_1}^{(s)} < \varepsilon$ . Для більшої впевненості, що ми наблизилась до орбіти періоду саме  $k_1$  необхідно проводити оцінку компонентів вектора

$$\bar{\Delta}_{k_1}^{(s+1)} = \begin{pmatrix} d_1^{(s+1)} \\ d_2^{(s+1)} \\ \vdots \\ d_{k_1}^{(s+1)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} d_1^{(s)} \\ d_2^{(s)} \\ \vdots \\ d_{k_1}^{(s)} \end{pmatrix}.$$

Тепер ми здійснюватимемо серії ітерувань (2) кратні  $k_1$ . У випадку  $k_1$ -періодичної орбіти необхідне виконання  $\bar{\Delta}_{k_1}^{(s+1)} \xrightarrow{s \rightarrow \infty} \bar{0}$ . При порушенні цієї умови слід обрати наступного кандидата із  $p$ -набору ( $d_{k_2}^{(s)} < \varepsilon$ ). Якщо таких не залишилося, то ми маємо справу або із орбітою періоду більшого за  $p$ , або ми потрапили в область квазіперіодичності чи хаосу. Такий підхід дає можливість більш точно визначити чи маємо ми справу із орбітою саме такого періоду, чи перед нами більш складна структура.

У випадку, коли в процесі ітерування  $X_i$  траєкторія переривається (відсутні дійсні значення), то збудуємо  $X_0$  і починаємо пошук періодичної орбіти знову. Визначивши характер динаміки для  $\Lambda_0$  рухаємося в просторі параметрів далі – здійснюємо пошук періоду орбіт для  $\Lambda_1 = \Lambda_0 + \Delta\Lambda$  і т. д.

При такій побудові карти можуть різнитися в залежності від напрямку обрання  $X_0$ . Це пояснюється можливою наявністю мультистабільності системи (існування кількох притягаючих множин). Розпочавши рух траєкторії із збуденого значення  $X'_0$  ми можемо потрапити в інший

атрактор, що ймовірно, матиме зовсім іншу структуру.

Складність при моделюванні таких систем полягає у зростанні потужності станів  $|X_i|$  як  $q^n$ , де  $q$  – кількість селекторів, що задають оператор еволюції у (2). Однак, найбільші обчислювальні затрати припадають саме на розрахунки Хаусдорфової метрики, а не чергового стану за (2). Так, для пошуку  $d_H(X_i, X_j)$  необхідно провести підрахунок  $|X_i| \cdot |X_j|$  евклідових метрик  $\rho$  та  $2 \cdot |X_i| \cdot |X_j| - 1$  операцій порівняння метрик  $\rho$ .

Приклад отриманих карт за таким алгоритмом, адаптованим до ДС із антисипацією виду  $x_{n+1} = \lambda \cdot x_n \cdot (1 - x_n) - \alpha \cdot x_{n+1}^2$  показано на рис. 3. Розрахунки проводились на базі архітектури СКІТ кластера Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова із використанням кросплатформенної мови програмування Java. На рис. 3 відповідними кольорами в просторі параметрів  $(\lambda; \alpha)$  зазначено області періодів: синій – 1, червоний – 2, жовтий 3, зелений 4, темно-сірий – 5, чорний – 6, світло-сірий – 7, го-

лубий – 8, білим – області хаосу та квазі-періодичних режимів, чи області, де перериваються траєкторії.

### Адаптована процедура розрахунку старшого показника Ляпунова для ДС із антисипацією

Цей розділ статті ми присвяtimo опису алгоритму Бенеттіна [12], адаптованого до ДС із антисипацією.

Показники Ляпунова  $\{\mu_i\}_{i=1}^m$  є важливим інструментом при дослідженні ДС, який дає можливість оцінити стійкість її граничних множин у фазовому просторі та виділити області із хаотичною поведінкою у просторі своїх параметрів. Вони є кількісним описом збіжності чи розбіжності близьких траєкторій. Як, добре відомо, за мультиплікативною ергодичною теоремою Оселедця таких показників буде саме  $m$ -розмірності фазового простору ДС. Розглянемо  $m$ -вимірну гіперсферу малого радіуса початкових точок  $X_0$  та ансамбль ДС, що різняться лише початковими точками. В ході еволюціонування цього ансамблю гіперсфера деформується у

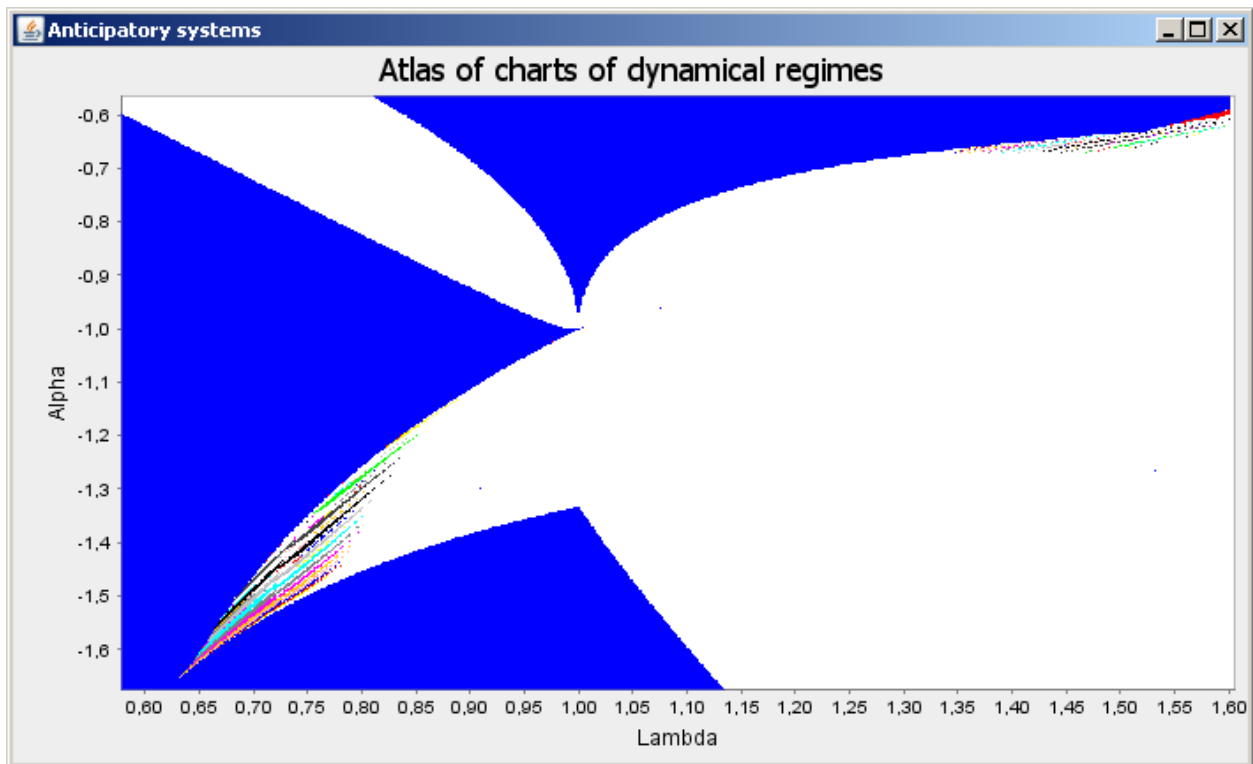


Рис. 3. Приклад карти динамічних режимів для ДС із сильною антисипацією

$m$ -вимірний еліпсоїд (допоки ця множина зображуваних точок залишається достатньо малою). Деформування (стиснення, розтягнення) цього гіпереліпсоїда відбувається за  $m$  напрямками його головних півосей. Розмір цих півосей змінюється за експоненціальним законом  $\exp(\mu_i t)$  (при досить малих розмірах множини зображуваних точок). Добре відомо, з тієї ж теорії Оселедця, що для кожного  $\tilde{x}_0$  існує показник

$$\mu = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln \left( \frac{\|\tilde{x}_t\|}{\|\tilde{x}_0\|} \right),$$

де  $\|\tilde{x}_t\|$  – збурення дотичне до траєкторії у момент  $t$ . В залежності від обраного початкового збурення  $\mu$  приймає одне з  $\mu_i$ ,  $i = \overline{1, m}$  значень, які називають показниками Ляпунова.

Тепер розглянемо процедуру отримання старшого показника Ляпунова, адаптовану до ДС із антисипацією. Розраховуватимемо його методом усереднення за часом. Задамося початковим вектором параметрів  $\Lambda_0 = (\lambda_0; \alpha_0)$  та запускаємо дві траєкторії ДС (2) з  $X_0$  та із збуреного  $X'_0 = X_0 + \tilde{x}_0$ , що належать басейну притягаючої множини. На кожному кроці ітерування (2) обох систем розраховуємо відхилення між їх траєкторіями, що відбулося за один крок  $d_{n+1} = d_H(X_{n+1}, X'_{n+1})$ ,  $n = 0, 1, \dots, T$ , де  $n+1$  збурений стан кладемо рівний  $X'_{n+1} = X_{n+1} + \tilde{x}_0$ . Провівши досить велику кількість  $T$  ітерацій обох систем, усереднюємо відхилення

$$\mu = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \ln \left( \frac{d_n}{\|\tilde{x}_0\|} \right).$$

Зрозуміло, що розпочавши траєкторії із стійкої граничної множини ДС при достатньо малому  $\tilde{x}_0$  еволюція зміни відхилень між траєкторіями визначатиметься старшим показником Ляпунова  $\mu$ . Для більшої точності розрахунку  $\mu$  варто змінювати  $\tilde{x}_0$  і знову провести цю процедуру, усереднивши  $\mu$  вже по реалізаціям процедури. Зрештою, пару  $(\Lambda_0, \mu)$  подаємо на

блок синхронізації (рис. 1) та починаємо процедуру обчислення  $\mu$  вже для  $\Lambda_1 = \Lambda_0 + \Delta\Lambda$  і т. д.

Нагадаємо, що критерієм наявності хаосу ДС є додатне значення  $\mu$ . Карти такого виду зручно будувати в тонах сірого кольору (від білого до чорного).

## Висновки

В даній статті досліджувалась нелінійна динамічна система із сильною антисипацією. Запропоновано архітектурну модель багатопоточних обчислень набору абстрактних показників (карт динамічних режимів, карт старших показників Ляпунова, та карт фрактальних розмірностей станів таких систем). Детально описані запропоновані алгоритми розрахунку карт показників (карт динамічних режимів та карт старших показників Ляпунова), адаптовані до ДС із сильною антисипацією. Розроблений відповідний пакет багатопоточних програмних засобів за допомогою яких й проводились розрахунки.

В подальшому такі нові моделі можна використовувати при моделюванні роботи клітинних автоматів чи штучних біологічних систем (штучних імунних систем та штучних нейронних мереж), які функціонують у режимі із випередженням, що дало б змогу будувати системи більш адаптовані чи то до навколишніх змін, чи то до власних.

1. Молчанов И.Н., Химич А.Н., Попов А.В. и др. Об эффективной реализации вычислительных алгоритмов на МІМД-компьютерах // Искусственный интеллект. – 2005. – № 3. – С. 175–184.
2. Молчанов И.Н., Химич А.Н., Попов А.В. и др. Интеллектуальный МІМД-компьютер для эффективного исследования и решения задач // Искусственный интеллект. – 2004. – № 4. – С. 149–158.
3. Химич А.Н., Попов А.В., Чистякова Т.В. и др. Программное обеспечение для автоматического исследования и решения задач на МІМД-компьютерах // Праці міжнародної конференції “50 років Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України” – Київ: Інститут кібернетики імені

- В.М. Глушкова НАН України. – 2008. – С. 328–335.
4. Химич А.Н., Молчанов И.Н., Попов А.В., Чистякова Т.В. и др. Параллельные алгоритмы решения задач вычислительной математики: монография / А.Н. Химич, М.Ф. Яковлев; Ин-т кибернетики им. В.М.Глушкова НАН Украины. – К.: Наук. думка, 2008. – 247 с.
  5. Makarenko A. Anticipating in modeling of large social systems – neuronets with internal structure and multivaluedness // International Journal of Computing Anticipatory Systems. – 2002. – 13. – P. 77–92.
  6. Makarenko A. Toward Decision-Making Considerations on the base of Society Models with Anticipation. Proceed. Third Int. Conf. Human Centered Process, June 2008, Delft, The Netherland, Ed.: Telecom Bretagne. – 2008. – P. 25–34.
  7. Makarenko A., Goldengorin B., Krushinskii D. Game ‘Life’ with Anticipation Property. Lecture Notes Computer Science, N 5191, Springer, BerlinHeidelberg. – 2008. – P. 77–82.
  8. Krushinski D., Makarenko A. Cellular automata with anticipation: examples and presumable applications // Computing Anticipatory Systems, AIP Conf. Proceed. Series. ed. D. Dubois. – 2010. – Vol. 1303. – P. 246–254.
  9. Лазаренко С.В., Макаренко О.С. Аналіз логістичного антисипаційного рівняння із сильною антисипацією // Наукові вісті НТУУ “КПІ”. – 2012. – № 4. – С. 91–96.
  10. Лазаренко С.В., Макаренко О.С. Класифікація операторів однієї дискретної антисипаційної системи першого порядку // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2013. – № 1. – С. 97–106.
  11. Разжевайкин В.Н. Модели динамики популяций // Рос. акад. наук, Вычисл. центр им. А. А. Дородницына. – М. : ВЦ РАН. – 2006. – 87 с.
  12. Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.-M. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems: A method for computing all of them. P.I: Theory. P. II: Numerical application // Meccanica. – 1980. – Vol. 15. – P. 9–30.

**Про авторів:**

Лазаренко Сергій Вікторович,  
аспірант,

Макаренко Олександр Сергійович,  
доктор фізико-математичних наук,  
професор, завідувач відділом.

**Місце роботи авторів:**

Навчально-науковий комплекс  
«Інститут прикладного системного  
аналізу» НТУУ «КПІ»,  
03056, Київ,  
Проспект Перемоги, 37, корпус 35.  
E-mail: LazarenkoSerg7@mail.ru  
makalex@i.com.ua

Одержано 24.12.2012