

СХЕМА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ МАКСИМАЛЬНЫХ КОНТУРНЫХ SH-НАПРЯЖЕНИЙ НА СИСТЕМЕ НЕКРУГОВЫХ УПРУГИХ ВКЛЮЧЕНИЙ В БЕСКОНЕЧНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ

Исследован параллельный алгоритм численного решения стационарных задач теории упругости на примере взаимодействия SH-волн с системой упругих включений произвольного поперечного сечения. Численное решение краевой задачи сведено к системе интегральных уравнений с помощью интегрального представления амплитуды перемещения отраженного волнового поля. Параллельный алгоритм позволил исследовать ситуацию с увеличенным числом упругих включений-отражателей и увеличить точность получаемых величин. Алгоритм исследован и на MIMD-зависимость. Приведены новые уникальные результаты.

Введение

В механике актуальными являются задачи о конструкциях, содержащих значительное число неоднородностей и работающих под действием динамических нагрузок. Для них характерно разрушение именно вблизи концентраторов напряжений. Поэтому большой интерес вызывает анализ взаимодействия волн перемещений и напряжений в упругой среде с системами упругих включений. Однако, такие задачи малоисследованы вследствие необходимости привлечения значительных объемов вычислительных ресурсов. Поэтому особое значение приобретают эффективные параллельные алгоритмы, в основе которых лежат обоснованные аналитические методы [1].

Значительный прогресс в теории дифракции [2] достигнут благодаря эффективности метода интегральных уравнений [3, 4]. Важным преимуществом метода является сокращение числа пространственных переменных [5, 6]. Кроме того, метод интегральных уравнений имеет большие возможности при построении параллельных вычислительных схем.

В работе разрабатывается параллельный алгоритм численного решения системы интегральных уравнений, которые появляются при исследовании модельной задачи дифракции волн сдвига на системах цилиндрических упругих вклю-

чений произвольного поперечного сечения.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу, описанную в [6]. В неограниченной изотропной среде содержится m бесконечных вдоль оси OZ упругих включений цилиндрической формы, поперечные сечения которых ограничены замкнутыми (без общих участков) контурами типа Ляпунова. Пусть L – совокупность контуров (рис. 1).

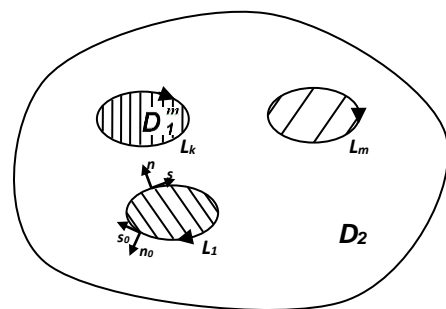


Рис. 1

Источниками внешнего поля перемещений W_0 может быть монохроматическая SH-волна, набегающая на цилиндры из бесконечности, нормаль к фронту которой составляет угол ψ с осью OX ($\tau = const$),

$$W_0 = \tau e^{-i\gamma_2(x\cos\psi + y\sin\psi)}, \quad \gamma_2 = \frac{\omega}{c_2}, \quad (1)$$

или гармоничный источник интенсивности P , сосредоточенный в точке $M_0(x_0, y_0)$ и такой, что порождает поле перемещений [6, 7]

$$W_0 = -\frac{P}{4i} H_0^{(1)}(\gamma_2 r), \quad r = |z - z_0|,$$

$$z = x + iy, \quad z_0 = x_0 + iy_0. \quad (2)$$

Здесь c_2 – скорость волны сдвига, ω – частота колебаний, μ – модуль сдвига, i – мнимая единица ($i^2 = -1$), $H_n^{(1)}(x)$ – функция Ханкеля первого рода n -го порядка, зависимость от времени выражается множителем $e^{-i\omega t}$.

В результате взаимодействия волны с системой упругих цилиндров, на которые она набегаёт, возникает дифракционное волновое поле. Обозначим W_2 амплитуду отраженной волны сдвига. Тогда общее поле амплитуд перемещений составляет $W = W_0 + W_2$. Неизвестная функция W_2 должна удовлетворять однородному уравнению Гельмгольца в области D_2 с волновым числом γ_2 :

$$\Delta W_2 + \gamma_2^2 W_2 = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad (3)$$

а также условиям излучения на бесконечности типа Зоммерфельда [3].

Поскольку области D_l^m представляют собой упругие включения, в них $W = W_l^m$, где функции W_l^m являются решением однородного уравнения Гельмгольца с волновыми числами $\gamma_{1,m}$ ($\gamma_{1,m}^2 = \rho_{1,m} \omega^2 / \mu_{1,m}$, где $\rho_{1,m}$ – плотность, а $\mu_{1,m}$ – модуль сдвига каждого m -го включения).

На границе включений L нас будут интересовать касательные и нормальные

напряжения $\sigma_{sz} = \tau_s e^{-i\omega t}$, $\sigma_{nz} = \tau_n e^{-i\omega t}$. В случае антиплоской деформации

$$\tau_s = \mu \frac{\partial W}{\partial s}, \quad \tau_n = \mu \frac{\partial W}{\partial n}, \quad (4)$$

где s – положительная касательная, n – нормаль в точке $\zeta = \xi + i\eta \in L$ (рис. 1).

Пусть $\zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0$ – точка L , в которой выполняются граничные условия. На совокупности всех контуров L будем требовать выполнения условий сопряжения, вытекающих из непрерывности перемещений и сдвиговых напряжений на границе раздела двух сред. Граничные условия на каждом включении таковы (для упрощения записи индекс номера неоднородности опускаем):

$$W_1 = W_2 + W_0,$$

$$\mu_1 \frac{\partial W_1}{\partial n_0} = \mu_2 \frac{\partial}{\partial n_0} (W_2 + W_0), \quad (5)$$

где n_0 – нормаль к L в точке $\zeta_0 \in L$.

Таким образом, задача дифракции волны сдвига (1) или (2) на системе упругих включений в неограниченном изотропной среде сводится к решению краевой задачи (3), (5) при выполнении дополнительного условия:

$$\frac{1}{l_i} \int_{L_i^{(1)}} W_1 ds_0^i = \frac{1}{l_i} \int_{L_i^{(1)}} (W_2 + W_0) ds_0^i, \quad (6)$$

$$i = 1, \dots, m.$$

где l_i – длина контура $L_i^{(1)}$, W_1 – амплитуда перемещений проникающего поля, а W_2 – амплитуда перемещений отраженной волны.

2. Метод решения

С учетом [6, 7], запишем функцию $W_2(x, y)$, характеризующую рассеянную волнами включениями волну перемещений в области D_2 , следующим образом:

$$W_m(x, y) = \int_L f(s)_m G_m(x, y, \xi, \eta) ds, \quad m = 1, 2,$$

$$G_m = \frac{1}{4i} H_0^{(1)}(\gamma_m r), \quad r = |z - \zeta|, \quad (7)$$

$$z = x + iy, \quad \zeta = \xi + i\eta \in L.$$

Здесь L – совокупность контуров L_j , $j = \overline{1, m}$ (рис. 1); $f(s)$ – неизвестная функция, удовлетворяющая на L условию Гельдера.

Интегральные уравнения (7) удовлетворяют уравнению Гельмгольца (3) в областях D_k и обеспечивают выполнение условий излучения на бесконечности. Остаются граничные условия (5). Выполнение первого условия из (5) приводит к уравнению с логарифмическим ядром. Для получения СИУ, схема численной реализации которого более эффективна [3–5], продифференцируем равенство по дуговой координате s_0 . Для осуществления предельного перехода в (7) при $z \rightarrow \zeta_0 \in L$ частные производные $\frac{\partial W}{\partial s_0}$ и $\frac{\partial W}{\partial n_0}$ будем по- нимать следующим образом:

$$\left. \frac{\partial W}{\partial s_0} \right|_L = \left(e^{i\phi_0} \frac{\partial W}{\partial z} + e^{-i\phi_0} \frac{\partial W}{\partial \bar{z}} \right)_{z \rightarrow \zeta_0},$$

$$\left. \frac{\partial W}{\partial n_0} \right|_L = -i \left(e^{i\phi_0} \frac{\partial W}{\partial z} - e^{-i\phi_0} \frac{\partial W}{\partial \bar{z}} \right)_{z \rightarrow \zeta_0},$$

$$e^{i\phi_0} = \frac{d\zeta_0}{ds_0}, \quad \zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0 \in L. \quad (8)$$

Воспользуемся также известными соотношениями [3]:

$$\frac{\partial}{\partial z} H_0^{(1)}(\gamma r) = -\frac{\gamma}{2} e^{-i\alpha} H_1^{(1)}(\gamma r),$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} H_0^{(1)}(\gamma r) = -\frac{\gamma}{2} e^{i\alpha} H_1^{(1)}(\gamma r),$$

$$H_1^{(1)}(\gamma r) = \frac{2}{i\pi r} + H_1(\gamma r), \quad z - \zeta = re^{i\alpha}, \quad (9)$$

где $H_1(x)$ – непрерывная функция в точке $x = 0$.

Выпишем из [6] интегральное уравнение.

$$\int_L f_1(s) [g(s, s_0) + B_1(s, s_0)] ds -$$

$$- \int_L f_2(s) [g(s, s_0) + B_2(s, s_0)] ds = N_k(s_0), \quad (10)$$

$$\int_L f_1(s) [g(s, s_0) + B_1(s, s_0)] ds -$$

$$- \int_L f_2(s) [g(s, s_0) + B_2(s, s_0)] ds = N_k(s_0),$$

$$g = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \left(\frac{e^{i\phi_0}}{\zeta - \zeta_0} \right), \quad \zeta_0 - \zeta = r_0 e^{i\alpha_0},$$

$$\zeta_0 - z_0 = R_0 e^{i\beta^*_0},$$

$$E_1 = \gamma_1 \mu_1 H_1^{(1)}(\gamma_1 r_0) \sin(\phi_0 - \alpha_0) / 4i,$$

$$E_2 = \gamma_2 \mu_2 H_1^{(1)}(\gamma_2 r_0) \sin(\phi_0 - \alpha_0) / 4i,$$

$$B_1 = \gamma_1 H_1(\gamma_1 r_0) \cos(\phi_0 - \alpha_0) / 4i,$$

$$B_2 = \gamma_2 H_1(\gamma_2 r_0) \cos(\phi_0 - \alpha_0) / 4i,$$

$$N_1 = -i\gamma_2 W_0(s_0) \cos(\phi_0 - \psi),$$

$$N_2 = P\gamma_2 H_1^{(1)}(\gamma_2 R_0) \cos(\phi_0 - \beta^*_0) / 4i\mu_2,$$

$$K_1 = -i\gamma_2 \mu_2 W_0(s_0) \sin(\phi_0 - \psi),$$

$$K_2 = P\gamma_2 H_1^{(1)}(\gamma_2 R_0) \sin(\phi_0 - \beta^*_0) / 4i.$$

Здесь функции $N_m(s_0)$ и $K_m(s_0)$ отвечают случаям (1) и (2) соответственно, ядра $g(s, s_0)$ – сингулярные, ядра $B_k(s, s_0)$ и $E_k(s, s_0)$ – непрерывные ($k = 1, 2, \dots$). В первой группе (10) интегральные уравнения являются сингулярными, а во второй – уравнениями Фредгольма 2-го рода.

Для выделения единственного решения СИУ добавим к ней дополнительные условия:

$$\int_{L_j} W_1 ds_0 = \int_{L_j} (W_2 + W_0) ds_0, \quad (11)$$

обеспечивающих непрерывность перемещений на каждом из контуров L_j .

3. Дискретизация задачи

С использованием метода механических квадратур [3–6] произведена численная реализация системы интегральных уравнений (10). Параметризация контуров L_j осуществлена с помощью соотношений

$$\zeta_j = \zeta_j(\beta), \quad \zeta_{j0} = \zeta_{j0}(\beta_0),$$

$$0 \leq \beta, \beta_0 < 2\pi, \quad (12)$$

причем $\zeta_j(0) = \zeta_j(2\pi)$. Интегральное уравнение на контуре L_k удовлетворялось в узлах вида $\beta_l = \pi(2l-1)/n_k$ ($l = \overline{1, n_k}$) и сводилось к системе линейных алгебраических уравнений относительно значений функции $f_i(\beta)$ в узлах вида

$$\beta_p = \pi(2p-1)/n_j, \quad (p = \overline{1, n_j}),$$

где n_j – число точек разбиения контура L_j . Внеинтегральные значения $f_k(\beta_l)$ выражались с помощью интерполяционных полиномов Лагранжа через искомые значения. Для нечетных n_k получены следующие выражения [5]:

$$f_k(\beta_l) =$$

$$= \frac{1}{n_k} \sum_{p=1}^{n_k} (-1)^{n_k+p} f_k(\beta_p) \operatorname{ctg} \frac{\beta_l - \beta_p}{2}. \quad (13)$$

Таким образом, численная реализация системы интегральных уравнений (10) сводится к решению СЛАУ с $N = n_1 + n_2 + \dots + n_m$. Дополнительные условия учитывались в соответствии с теоремой Лифанова [5].

4. Схема вычислений

Распараллеливание осуществлялось для следующих четырех этапов алгоритма – варьирование группами исходных данных, вычисления коэффициентов СЛАУ, численное его решение и вычисления искомых характеристик поля по полученным после решения СЛАУ функциям. Наиболее емким с точки зрения затрат времени и ресурсов памяти является второй и третий этапы. Вычислительный алгоритм сводит-

ся к двум основным процедурам для параллельного формирования матрицы СЛАУ. Первая формирует массив параметрических координат контуров всех упругих включений и является своеобразной базой данных для формирования клонов. А вторая вычисляет искомые характеристики. Для обеспечения равномерной загрузки хоста кластерной системы исходный массив дробится пропорционально числу используемых процессоров.

Исследовано, что оптимальным числом процессов для алгоритма решения СЛАУ искомого сингулярного интегрального уравнения оказалось 50–100, при заданной точности 10^{-8} .

На рис. 2 показан график зависимости общего времени кластерных вычислений массива контурных напряжений на контурах неоднородностей от числа процессов для одного варианта нагрузки. Из графика видно, что весь алгоритм хорошо масштабируется и имеет оптимальное число процессов.

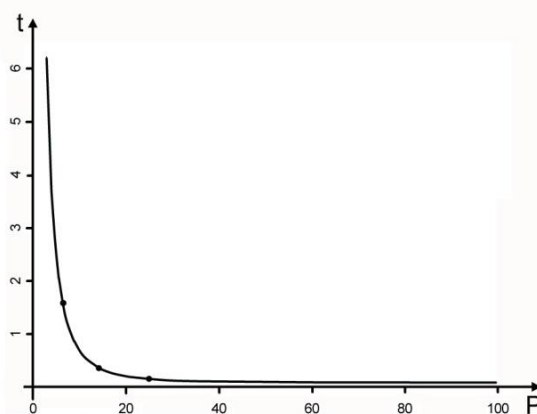


Рис. 2

Для данной методики решения краевой задачи основная операция при формировании каждого элемента матрицы – это определение разностного аргумента цилиндрических функций Ханкеля, заданного на множестве значений параметрических координат упругих включений, а также вычисления самих этих функций и коэффициентов при них. На каждом клоне хоста запускаются циклические процедуры определения указанных коэффициентов. Результирующая матрица собирается по факту завершения последнего.

Вычислительный процесс решения СЛАУ также распараллеливается согласно [8]. Параллельное вычисление итоговых искоемых характеристик осуществлялось путем подстановки массивов значений неизвестных функций в представление (8) аналогично процедурам формирования матрицы СЛАУ.

5. Численные результаты

Для исследования сходимости алгоритма рассмотрим случай нормального падения ($\psi = \pi/2$) волны сдвига (1) на систему ромбических с округлениями упругих включений, расположенных вдоль одной линии на одинаковом расстоянии d друг от друга (рис. 3).

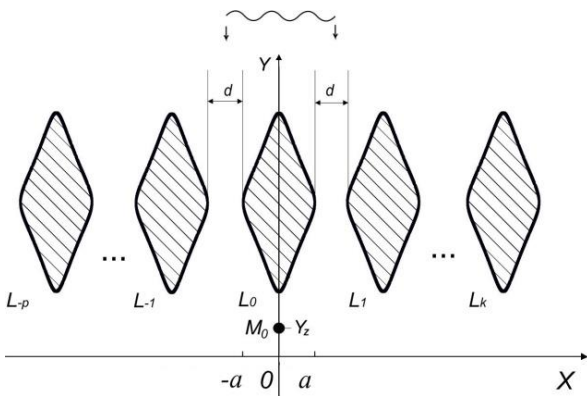


Рис. 3

Будем использовать известные [9] параметрические уравнения для задания основного контура L_0 :

$$\begin{aligned} \xi(\beta) &= b \sin \beta - \nu \sin 3\beta, \\ \eta(\beta) &= a \cos \beta + \nu \cos 3\beta, \end{aligned} \quad (14)$$

$$0 \leq \beta \leq 2\pi,$$

где при $\nu = 0.14036$ контур имеет вид ромба с округленными точками возврата. А в случае $\nu = 0$ контур имеет эллиптическую форму. Остальные контуры будем располагать симметрично относительно оси OY . В этом случае рассматриваемая дифракционная задача имеет свойство симметрии, что позволяет осуществлять первичное самотестирования полученных результатов.

Использовались контурные напряжения вида $\sigma_\beta = \tau_s / \mu$. Точность вычислений проверялась путем сравнения результатов при различных значениях N . Также, проводилось сравнение полученных результатов с результатами, приведенными в [7] для случая одиночного упругого включения, а также с результатами [6] для случая систем эллиптических отверстий и упругих включений.

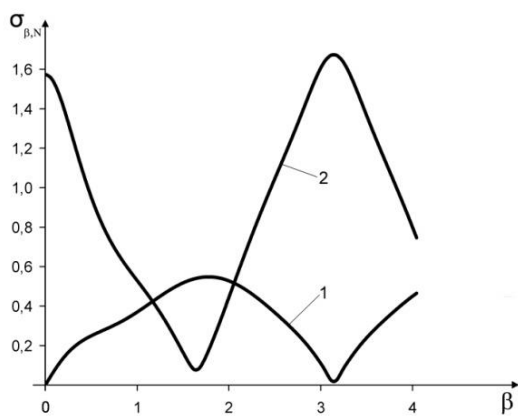
Реализация метода параллельных вычислений проводилась на кластере «Инпарк-256» [10]. Комплекс позволил исследовать сходимость до 10^{-8} порядка. Выявлено, что сходимость решения интегрального уравнения практически не зависит от числа отражателей. Решение задачи процедурным методом для 10 отражателей (с использованием типовых вычислительных средств и с точностью до 10^{-3} , что соответствует 50–70 точкам коллокации) осуществлялось несколько суток. При симметричной нагрузке наблюдается эффект насыщения решетки уже при 9–10 упругих включений (при дальнейшем увеличении числа упругих включений контурные напряжения практически не изменяются). Это полностью совпадает с аналогичными результатами, полученными в цикле работ, приведенных в [6].

В работе проводились вычисления контурных касательных и нормальных напряжений вдоль контуров центрального L_0 и крайнего L_k упругих включений (рис. 3) в случае решетки, состоящей из нечетного числа упругих включений ($p = k$). Отсчет угла β ведется от нуля (теневая точка) до π (лобовая точка) для центрального упругого включения (учитывается симметрия в случае нормального распределения волны сдвига (1)) и от 0 до 2π – крайнего упругого включения (в силу симметрии распределения напряжений на контурах L_k и L_{-k} одинаковы).

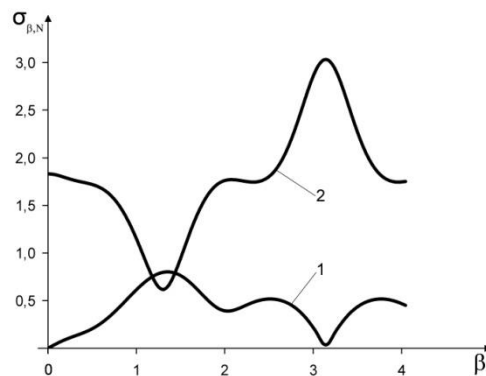
Анализ результатов показывает, что, как и в работе [6], существует принципиальное различие в распределении при набегающей SH-волны (1) на решетку, со-

стоящую из вытянутых вдоль оси ОХ эллипсов ($b/a < 1$), от случая решетки из эллипсов, вытянутых навстречу волны ($b/a > 1$). Если в первом случае ($b/a < 1$) распределение моноэкстремально [6, 7] (максимальное значение – в точках соскальзывания $\beta = \pi/2$ и $\beta = 3\pi/2$), то в противном случае, начиная с некоторого значения $b/a > 1$, появляется несколько локальных максимумов. Поэтому в работе рассматривается случай эллипсов, вытянутых навстречу набегающих волн, при этом выбирается значение $b/a = 2,5$.

На рис. 4 показаны распределения σ_β и σ_n вдоль контура центрального упругого включения L_0 в случае решетки, состоящей из трех цилиндрических включений. На которую набегаёт волна из бесконечности. Значение безразмерного волнового числа $\gamma_2 a$ равна 0,9 (рис. 4, а) и 1,5 (рис. 4, б). Кривая 1 показывает распределение σ_β для центрального упругого включения. Кривая 2 – распределение σ_n . Результаты показывают, что, чем выше частота колебаний, тем больший вклад в напряженно-деформированное состояние контура волокна вносит нормальное напряжение. Это говорит о том, что разрушение, например, в композиционном материале может происходить вследствие отрыва по границам раздела фаз.



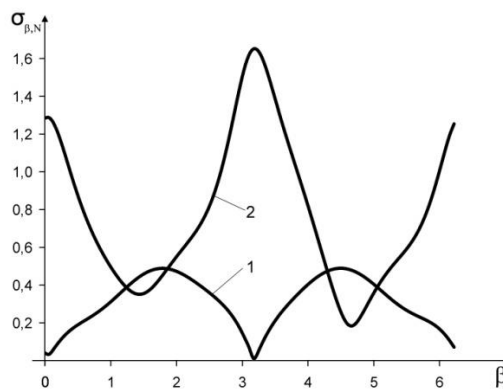
а



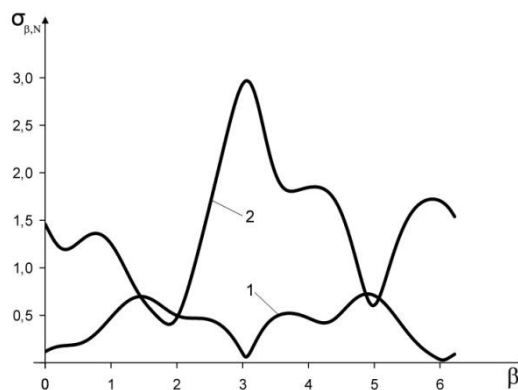
б

Рис. 4

На рис. 5 показано аналогичное распределение вдоль контура упругого включения, крайнего справа. Нумерация кривых имеет тот же смысл. Здесь наблюдаются локальные максимумы в теневой ($\beta = 0$) и лобовой ($\beta = \pi$) точках. Число локальных максимумов в зоне соскальзывания с увеличением $\gamma_2 a$ увеличивается. Максимальное значение, как и на рис. 4, растет с уменьшением периода решетки и с увеличением $\gamma_2 a$.



а



б

Рис. 5

На рис. 6 показано распределение максимумов касательных и нормальных напряжений относительно соотношения модулей упругости волокна и матрицы μ_1/μ_2 крайнего левого (рис. 6, а) и центрального (рис. 6, б) упругого включения эллиптической формы. На систему действует точечный источник. Кривая 1 показывает максимумы касательных напряжений при значении безразмерного волнового числа $\gamma_2 a = 0.9$. Кривая 2 – максимумы нормальных напряжений при $\gamma_2 a = 0.9$. Кривые 3 и 4 показывают максимумы касательных и нормальных напряжений, соответственно, при $\gamma_2 a = 1.5$.

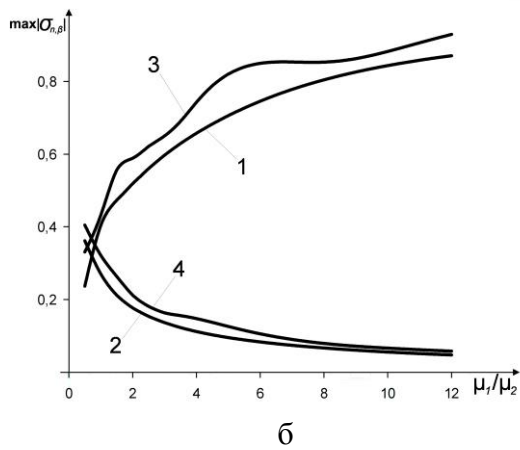
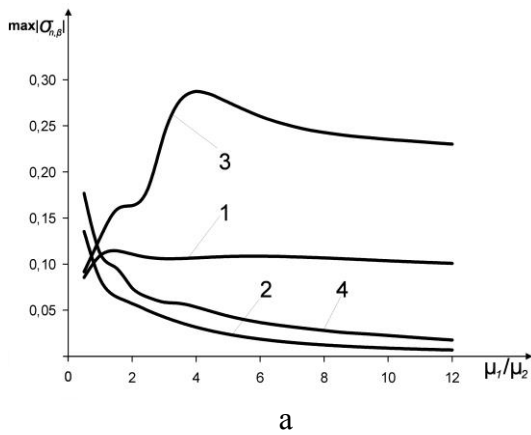


Рис. 6

На рис. 7 показано распределение максимумов касательных и нормальных напряжений относительно соотношения модулей упругости волокна и матрицы μ_1/μ_2 крайнего левого (рис. 7, а) и центрального (рис. 7, б) упругого включения ромбической формы. На систему набегают волна из бесконечности. Кривая 1 показы-

вает максимумы касательных напряжений при значении безразмерного волнового числа $\gamma_2 a = 0.9$. Кривая 2 – максимумы нормальных напряжений при $\gamma_2 a = 0.9$. Кривые 3 и 4 показывают максимумы касательных и нормальных напряжений, соответственно, при $\gamma_2 a = 1.5$.

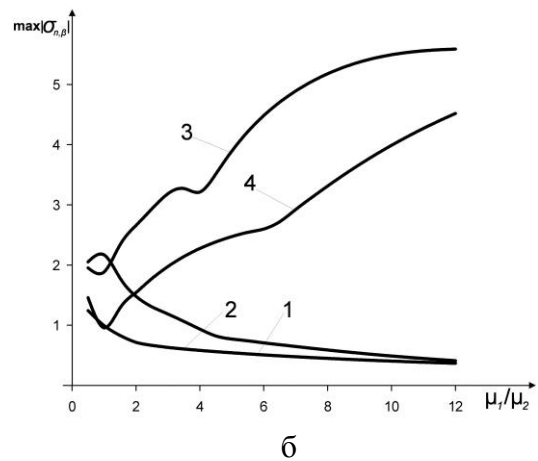
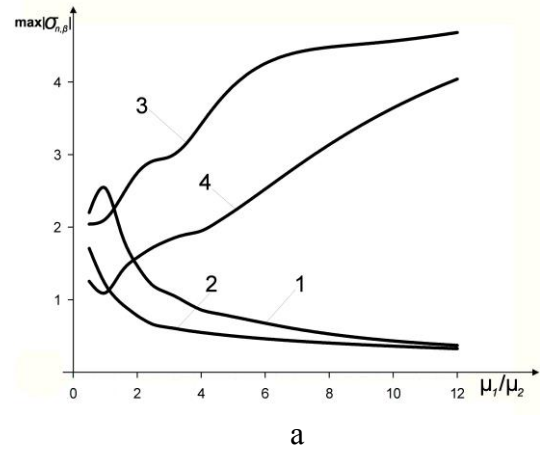


Рис. 7

Для высокоточного определения значения максимумов касательного и нормального напряжений, а также для определения соответствующего значения угла в радианах, применим алгоритм последовательных приближений сдвига точек коллокации контура.

Для определения отрезка контура, на котором находится максимум искомого напряжения, использован метод «золотого сечения» деление отрезка в точках x_1 и x_2 [11]. В соответствии с этой процедурой на каждой итерации для вычислений значений искомой функции использованы смещения точек коллокации. Это приводит к

значительному ускорению алгоритма в сравнении с методом половинного деления отрезка. В этом методе длины последовательных отрезков $[x_1, b]$ должны давать то же число r (рис. 8):

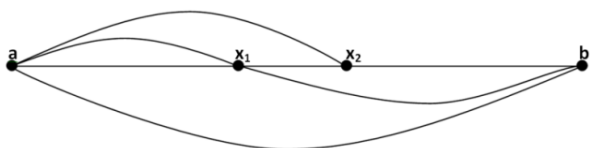


Рис. 8

При этом отрезок $[a, b]$ равен сумме отрезков $[a, x_1]$ и $[x_1, b]$, откуда легко получить, что число r удовлетворяет уравнению

$$r^2 = r + 1, \text{ т. е. } r = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}.$$

Таким образом:

$$x_1 = b - \frac{(b-a)}{r}, \quad x_2 = a + \frac{(b-a)}{r}.$$

В силу свойства «золотого сечения» необходимо искать лишь одну новую точку. Процедура продолжается до тех пор,

пока не будет достигнуто заданную точность:

$$\varepsilon > |b - a|.$$

Разработанная схема численного эксперимента позволила сформировать уникальную таблицу высокоточных значений (до 10^{-8}) максимумов касательных напряжений и соответствующих угловых координат на контуре эллиптических или ромбических центральных или крайних упругих включений (в системе от 3 до 9 объектов), аналогичную [12]. Воздействие – волна из бесконечности или сосредоточенный вблизи источник гармонических SH-волн для любых геометрических соотношений упругих включений и большинства волновых чисел. По мнению авторов, такая таблица сформирована впервые.

В таблице приведен фрагмент этого результата для волны с бесконечности или от источника. Воздействие на систему из трех эллиптических или ромбических упругих включений с соотношением осей $b/a = 2,5$ и волновых чисел $\gamma_2 a$, равных 0,9 и 1,5 соответственно. Координата источника $Y_z = 1,0$.

Таблица. Высокоточные значения максимумов нормальных напряжений

Источник	Тип контура	$\gamma_2 a$	Расположение включения	Угол β в радианах	Максимум σ_n
Волна из/б	Эллипс	0,9	Центральное	π	1,67478241
Волна из/б	Эллипс	0,9	Крайнее справа	3,09447522	1,65333374
Волна из/б	Ромбик	0,9	Центральное	0	2,47395993
Волна из/б	Ромбик	0,9	Крайнее справа	3,13652702	2,26919721
Точ. источн.	Эллипс	0,9	Центральное	0	0,70590831
Точ. источн.	Эллипс	0,9	Крайнее справа	0,49284516	0,10826607
Точ. источн.	Ромбик	0,9	Центральное	0	2,37753521
Точ. источн.	Ромбик	0,9	Крайнее справа	0,04016917	0,10884722
Волна из/б	Эллипс	1,5	Центральное	π	3,03398597
Волна из/б	Эллипс	1,5	Крайнее справа	3,06263857	2,97077361
Волна из/б	Ромбик	1,5	Центральное	π	4,04776416
Волна из/б	Ромбик	1,5	Крайнее справа	3,13066228	4,00272192
Точ. источн.	Эллипс	1,5	Центральное	0	0,82015593
Точ. источн.	Эллипс	1,5	Крайнее справа	1,04329753	0,27578810
Точ. источн.	Ромбик	1,5	Центральное	0	2,33706097
Точ. источн.	Ромбик	1,5	Крайнее справа	1,25151903	0,26827551

Заключення

Параллельный алгоритм позволил значительно сократить время вычислений и более детально проанализировать характеристики волнового поля. Получение точных величин резонансных максимумов контурных напряжений, а также точных координат дислокации резонансных максимумов позволит избежать разрушения конструкций, работающих в условиях динамических нагрузок.

Все это требует использования увеличенного числа вариантов исходных данных. Сочетание метода интегральных уравнений позволяет на единицу снизить размерность задачи, а также значительно экономит время вычислений, за счет распараллеливания вычислительных процедур, что приводит к существенному увеличению эффективности предложенного алгоритма.

1. *Вертгем И.И., Терпугов В.Н.* Параллельные технологии вычислений в механике сплошных сред и МДТТ // Учебное пособие. – Пермь, 2007. – 84 с.
2. *Селезов И.Т., Кривонос Ю.Г., Яковлев В.В.* Рассеяние волн локальными неоднородностями в сплошных средах. – Киев: Наук. думка, 1985. – 136 с.
3. *Панасюк В.В., Саврук М.П., Назарчук З.Т.* Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции. – Киев: Наук. думка, 1984. – 344 с.
4. *Габдулхаев Б.Г.* К численному решению интегральных уравнений методом механических квадратур // Изв. вузов. Математика. – 1972. – № 2. – С. 23–39.
5. *Лифанов И.К.* Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент (в математической физике, аэродинамике, теории упругости и дифракции волн). – М.: Янус, 1995. – 520 с.
6. *Панченко Б.Е., Назаренко А.М.* Каркасный анализ предметной области: стационарные динамические задачи теории упругости для изотропных сред с произвольными неоднородностями // Кибернетика и системный анализ. – 2013. – № 1. – С. 172–187.
7. *Назаренко А.М., Панченко Б.Е.* Дифракция волн сдвига на цилиндрических неоднородностях произвольного поперечного сечения // Динамика и прочность машин. Респ. межвед. научно-техн. сб. – 1991. – Вып. 52. – С. 38–45.
8. *Химич А.М., Полянюк В.В.* Эффективность двумерных блочно-циклических параллельных алгоритмов // Проблемы програмування. – 2008. – № 3. – С. 145–149.
9. *Гузь А.Н., Немши Ю.Н.* Метод возмущения формы границы в механике сплошных сред. – Киев, 1989. – 352 с.
10. *Молчанов И.Н., Перевозчикова О.Л., Химич А.Н.* Опыт разработки семейства кластерных комплексов Инпарком // Кибернетика и системный анализ. – 2009. – № 6. – С. 88–96.
11. *Максимов Ю.А., Филлиповская Е.А.* Алгоритмы решения задач нелинейного программирования. – М.: МИФИ, 1982. – 421 с.
12. *Панченко Б.Е., Сайко И.М.* Високоточна схема паралельних обчислень максимальних контурних SH-напружень на системі некругових отворів у нескінченному пружному середовищі // Наукові записки НаУКМА. Комп'ютерні науки. – 2012. – Том 138. – С. 53–57.

Получено 17.06.2013

Об авторах:

Панченко Борис Евгеньевич,
кандидат физико-математических наук,
старший научный сотрудник,

Сайко Игорь Николаевич,
аспирант.

Место работы авторов:

Институт кибернетики имени
В.М. Глушкова НАН Украины,
проспект Академика Глушкова, 40.
Тел: (044) 526 3603.
E-mail: Igor_Sayko@mail.ru