УДК 004.42:510.69

М.С. Нікітченко, С.С. Шкільняк

ЧИСТІ ПЕРШОПОРЯДКОВІ КВАЗІАРНІ ЛОГІКИ З ПРЕДИКАТАМИ РІВНОСТІ

Вивчаються чисті першопорядкові квазіарні логіки однозначних та неоднозначних часткових предикатів. Основна увага приділена таким логікам із спеціальними предикатами рівності. Виділено чисті першопорядкові логіки з предикатами слабкої рівності та з предикатами строгої рівності. Описано мови та семантичні моделі цих логік, досліджено їх семантичні властивості, зокрема, властивості, пов'язані з предикатами рівності. Наведено властивості відношень логічного наслідку для множин формул. На базі цих властивостей для чистих першопорядкових логік з предикатами рівності побудовано низку числень секвенційного типу, для них доведено теореми коректності та повноти.

Ключові слова: логіка, предикат, рівність, логічний наслідок, секвенційне числення.

Вступ

Поняття і методи математичної логіки засвідчують високу ефективність при розв'язанні задач інформатики й програмування. Для цього розроблено багато різноманітних логічних систем (див., напр., [1]). Такі системи зазвичай базуються на класичній логіці предикатів. Ця логіка добре досліджена, вона є основою низки спеціальних логік (модальних, темпоральних, програмних тощо). Водночас класична логіка має [2, 3] низку обмежень, що ускладнює її використання. Тому на перший план висувається проблема побудови нових логічних формалізмів, більше адаптованих до потреб програмування. Такими є композиційно-номінативні логіки (КНЛ) часткових предикатів. Вони базуються на загальних класах часткових відображень, заданих на наборах іменованих значень. Такі відображення названо квазіарними.

Мета даної роботи – це дослідження чистих першопорядкових КНЛ однозначних та неоднозначних квазіарних предикатів. Описано семантичні моделі та мови чистих першопорядкових КНЛ, досліджено семантичні властивості. Основна увага приділена таким логікам із спеціальними предикатами рівності. Виділено предикати слабкої рівності та строгої рівності, описано властивості, пов'язані з цими предикатами. Наведено властивості відношень логічного наслідку для множин формул. На базі цих властивостей для чистих першопорядкових КНЛ з предикатами рівності побудовано низку числень секвенційного типу. Наведено умови замкненості секвенції та базові секвенційні форми цих числень, для них доведено теореми коректності та повноти.

Можна виділити такі рівні чистих першопорядкових КНЛ:

– базовий рівень чистих першопорядкових КНЛ (ЧКНЛ);

– чисті першопорядкові КНЛ з предикатами слабкої рівності (ЧКНЛР);

– чисті першопорядкові КНЛ з предикатами строгої рівності (ЧКНЛРС).

ЧКНЛ добре досліджені (див., напр., [2–5]). Реномінативні КНЛ з рівністю описано в [6, 7]. У даній роботі увагу зосередимо на вивченні ЧКНЛ з рівністю – ЧКНЛР та ЧКНЛРС.

Поняття, які в цій статті не визначаються, будемо тлумачити в сенсі [3, 5].

1. Різновиди квазіарних предикатів

Нехай V і A – множини, які будемо трактувати як множину предметних імен (змінних) і множину предметних значень.

V-A-іменна множина (V-A-ІМ) – це однозначна функція вигляду $d : V \rightarrow A$. Множину всіх V-A-ІМ позначаємо ${}^{V}\!A$.

Введемо функцію $asn : {}^{V}\!A \rightarrow 2^{V}$ так: $asn(d) = \{v \in V \mid v \mapsto a \in d$ для деякого $a \in A\}$.

Для V-A-ІМ вводимо операцію $\|_{-x}$ видалення компоненти з іменем x та операцію ∇ накладання:

$$d \|_{-x} = [v \mapsto a \in d \mid v \neq x];$$

$$\delta \nabla \eta = \eta \cup [v \mapsto a \in \delta \mid v \notin asn(\eta)].$$

Задамо операцію реномінації $\mathrm{r}_{x_1,...,x_n}^{v_1,...,v_n}$:

$$\mathrm{r}_{x_1,...,x_n}^{v_1,...,v_n}(d) =$$
$$= d \,\|_{-v_1,...,v_n} \cup [v_1 \mapsto d(x_1),...,v_n \mapsto d(x_n)].$$

Введемо для $y_1,...,y_n$ позначення $\bar{y}$. Тоді замість $\mathrm{r}_{x_1,...,x_n}^{v_1,...,v_n}$ також пишемо $\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$.

Послідовне застосування двох операцій реномінації $\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$ та $\mathrm{r}_{\bar{y}}^{\bar{u}}$ можна подати [3] у вигляді однієї операції реномінації, яку називають згорткою операцій $\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$ та $\mathrm{r}_{\bar{y}}^{\bar{u}}$ і позначають $\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}} \bullet_{\bar{y}}^{\bar{u}}$. Тоді

$$\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\mathrm{r}_{\bar{y}}^{\bar{u}}(d) = \mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}} \bullet_{\bar{y}}^{\bar{u}}(d).$$

Маємо $\mathrm{r}_{\bar{z},\bar{x}}^{\bar{z},\bar{v}}(d) = \mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(d)$.

Тотожна реномінація r (без параметрів) діє як тотожне відображення: $\mathrm{r}(d) = d$.

V-A-квазіарний предикат – це довільна (часткова неоднозначна, взагалі кажучи) функція вигляду

$$P : {}^VA \to \{T, F\},$$

де $\{T, F\}$ – множина істиннісних значень.

Часткові неоднозначні V-A-квазіарні предикати трактуємо як відповідності (відношення) між ${}^VA$ та множиною $\{T, F\}$. Такі предикати названо [3–5] предикатами реляційного типу, або R-предикатами.

Кожний R-предикат $P : {}^VA \to \{T, F\}$ однозначно задається областю істинності $T(P) = \{d \in {}^VA \mid T \in P[d]\}$ та областю хибності $F(P) = \{d \in {}^VA \mid F \in P[d]\}$.

Предикат $P : {}^VA \to \{T, F\}$ назвемо:

– однозначним, якщо $T(P) \cap F(P) = \varnothing$;

– тотальним, якщо $T(P) \cup F(P) = {}^VA$;

– неспростовним (частково істинним), якщо $F(P) = \varnothing$;

– виконуваним, якщо $T(P) \neq \varnothing$;

– тотожно істинним (позн. T), якщо $T(P) = {}^VA$ та $F(P) = \varnothing$;

– тотожно хибним (позн. F), якщо $F(P) = {}^VA$ та $T(P) = \varnothing$;

– тотально істинним, якщо $T(P) = {}^VA$;

– тотально хибним, якщо $F(P) = {}^VA$;

– всюди невизначеним (позн. $\perp$), якщо $T(P) = F(P) = \varnothing$;

– тотально насиченим (позн. $\top$), якщо $T(P) = {}^VA$ та $F(P) = {}^VA$.

Кожний неспростовний і кожний невиконуваний предикат є однозначними.

Часткові однозначні предикати назвемо P-предикатами, тотальні – T-предикатами, тотальні однозначні – TS-предикатами. Класи V-A-квазіарних R-предикатів, P-предикатів, T-предикатів, TS-предикатів позначаємо PrR_A^V, PrP_A^V, PrT_A^V, $PrTS_A^V$.

Предметне ім'я $x \in V$ (строго) неістотне для V-A-квазіарного предиката P, якщо для довільних $d_1, d_2 \in {}^VA$ маємо:

$$d_1\|_{-x} = d_2\|_{-x} \Rightarrow P[d_1] = P[d_2].$$

V-A-квазіарний предикат P монотонний, якщо: $d \subseteq d' \Rightarrow P[d] \subseteq P[d']$.

V-A-квазіарний предикат P антитонний, якщо: $d \subseteq d' \Rightarrow P[d] \supseteq P[d']$.

Для однозначних квазіарних предикатів монотонність стає еквітонністю.

Предикат P еквітонний, якщо:

$$P(d)\downarrow \text{ та } d \subseteq d' \Rightarrow P(d')\downarrow = P(d).$$

Монотонні R-предикати, антитонні R-предикати, еквітонні P-предикати, антитонні T-предикати названо [5] RM-предикатами, RA-предикатами, PE-предикатами, TA-предикатами. Класи цих предикатів позначаємо $PrRM_A^V, PrRA_A^V, PrPE_A^V, PrTA_A^V$.

Константні предикати $\perp, \top, \mathrm{T}, \mathrm{F}$ монотонні (еквітонні) й антитонні, при цьому предикати $\perp, \mathrm{T}, \mathrm{F}$ – однозначні.

Спеціальні предикати-індикатори Ez наявності у вхідних даних компоненти з іменем $z \in V$ задаємо [5] так:

$$T(Ez) = \{d \mid d(z)\downarrow\} = \{d \mid z \in asn(d)\};$$
$$F(Ez) = \{d \mid d(z)\uparrow\} = \{d \mid z \notin asn(d)\}.$$

Предикати-індикатори Ez тотальні, однозначні, немонотонні, неантитонні. Кожне $x \in V$ таке, що $x \neq z$, неістотне для Ez.

На рівнях ЧКНЛР та ЧКНЛРС можна ототожнювати й розрізняти значення предметних імен за допомогою спеціальних 0-арних композицій – параметризованих за іменами предикатів рівності. Можна розглядати дві різновидності цих предикатів: слабкої (з точністю до визначеності) рівності $=_{xy}$ та строгої (точної) рівності $\equiv_{xy}$.

Предикати $=_{xy}$ та $\equiv_{xy}$ задаємо так:

$T(=_{xy}) = \{d \mid d(x){\downarrow}, d(y){\downarrow}$ та $d(x) = d(y)\}$,

$F(=_{xy}) = \{d \mid d(x){\downarrow}, d(y){\downarrow}$ та $d(x) \neq d(y)\}$;

$T(\equiv_{xy}) = \{d \mid d(x){\downarrow}, d(y){\downarrow}$ та $d(x) = d(y)\} \cup$

$\cup \{d \mid d(x){\uparrow}$ та $d(y){\uparrow}\}$,

$F(\equiv_{xy}) = \{d \mid d(x){\downarrow}, d(y){\downarrow}, d(x) \neq d(y)\} \cup$

$\cup \{d \mid d(x){\downarrow}, d(y){\uparrow}$ або $d(x){\uparrow}, d(y){\downarrow}\}$.

Предикати $=_{xy}$ та $\equiv_{xy}$ також традиційно позначають $x = y$ та $x \equiv y$.

Предикати $=_{xy}$ часткові однозначні, вони монотонні й еквітонні.

Предикати $\equiv_{xy}$ тотальні однозначні, вони немонотонні й неантитонні:

Приклад 1. Маємо $\equiv_{xy}([\, z \mapsto a \,]) = T$, $\equiv_{xy}([\, z \mapsto a, x \mapsto a, y \mapsto a \,]) = T$, водночас $\equiv_{xy}([\, z \mapsto a, x \mapsto a \,]) = F$.

Кожне $z \in V$ таке, що $x \neq z$ та $y \neq z$, неістотне для $=_{xy}$ та для $\equiv_{xy}$.

Предикат $\tilde{P}$ дуальний [5] до предиката P, якщо $T(\tilde{P}) = \overline{F(P)}$ та $F(\tilde{P}) = \overline{T(P)}$. Відображення дуалізації $\delta : PrR_A^V \to PrR_A^V$ задаємо [5] так: $\delta(P) = \tilde{P}$.

Якщо $P \in PrTS_A^V$, то $\delta(P) = P$. Тому $\delta(Ex) = Ex$, $\delta(\equiv_{xy}) = \equiv_{xy}$, $\delta(\mathrm{T}) = \mathrm{T}$, $\delta(\mathrm{F}) = \mathrm{F}$. Також маємо $\delta(\bot) = \top$, $\delta(\top) = \bot$.

Для класів предикатів маємо:

$\delta(PrR_A^V) = PrR_A^V$, $\delta(PrTS_A^V) = PrTS_A^V$,

$\delta(PrP_A^V) = PrT_A^V$, $\delta(PrT_A^V) = PrP_A^V$;

$\delta(PrPE_A^V) = PrTA_A^V$, $\delta(PrTA_A^V) = PrPE_A^V$,

$\delta(PrRM_A^V) = PrRA_A^V$, $\delta(PrRA_A^V) = PrRM_A^V$.

2. Композиційні алгебри чистих першопорядкових логік

Семантичною основою КНЛ є композиційні предикатні системи. Для чистих першопорядкових логік такі системи мають вигляд (A, Pr^A, C), де Pr^A – певний клас V-A-квазіарних предикатів, C – множина композицій відповідного рівня. Така система задає алгебру даних (A, Pr^A) і композиційну алгебру предикатів (Pr^A, C).

Базовими композиціями ЧКНЛ є [2, 3] логічні зв'язки $\neg$ і $\vee$, композиції реномінації $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$ та квантифікації $\exists x$.

Базовими композиціями ЧКНЛР є $\neg, \vee, \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists x, =_{xy}$.

Базовими композиціями ЧКНЛРС є $\neg, \vee, \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists x, \equiv_{xy}$.

Задамо $\neg$, $\vee$, $\exists x$ через області істинності й хибності відповідних предикатів:

$T(\neg P) = F(P)$; $F(\neg P) = T(P)$;

$T(P \vee Q) = T(P) \cup T(Q)$; $F(P \vee Q) = F(P) \cap F(Q)$;

$T(\exists xP) = \{d \mid d \nabla x \mapsto a \in T(P)$ для деякого $a \in A\}$;

$F(\exists xP) = \{d \mid d \nabla x \mapsto a \in F(P)$ для всіх $a \in A\}$.

Композицію $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$ задаємо умовою:

$$\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)(d) = P(\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(d)) \text{ для всіх } d \in {}^{V}A.$$

Похідні композиції $\rightarrow$, &, $\leftrightarrow$, $\forall x$ виражаються [2, 3] через $\neg$, $\vee$, $\exists x$:

$P \rightarrow Q = \neg P \vee Q$;

$P \& Q = \neg(\neg P \vee \neg Q)$;

$P \leftrightarrow Q = (P \rightarrow Q) \& (Q \rightarrow P)$;

$\forall xP = \neg \exists x \neg P$.

Алгебру $QR_A^V = (PrR_A^V, CQ)$, де $CQ = \{\neg, \vee, \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists x\}$, назвемо чистою першопорядковою композиційною алгеброю квазіарних предикатів.

Алгебру $Q_E R_A^V = (PrR_A^V, CQ_E)$, де $CQ_E = \{\neg, \vee, \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists x, =_{xy}\}$, назвемо чистою першопорядковою композиційною алгеброю з предикатами слабкої рівності.

Алгебру $Q_{ES} R_A^V = (PrR_A^V, CQ_{ES})$, де $CQ_{ES} = \{\neg, \vee, \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists x, \equiv_{xy}\}$, назвемо чистою першопорядковою композиційною алгеброю з предикатами строгої рівності.

Композиції $\neg$, $\vee$, $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists x$ зберігають [3, 5] однозначність, тотальність, монотонність (еквітонність), антитонність квазіарних предикатів. Тому можна виділити [5] такі підалгебри алгебри QR_A^V:

$QP_A^V = (PrP_A^V, CQ)$,

$QT_A^V = (PrT_A^V, CQ)$,

$QTS_A^V = (PrTS_A^V, CQ)$,

$QRM_A^V = (PrRM_A^V, CQ)$,

$QRA_A^V = (PrRA_A^V, CQ)$,

$QPE_A^V = (PrPE_A^V, CQ)$,

$QTA_A^V = (PrTA_A^V, CQ)$.

0-арні композиції $=_{xy}$ часткові, однозначні й еквітонні, тому виділяємо такі підалгебри алгебри $Q_E R_A^V$:

$Q_E P_A^V = (PrP_A^V, CQ_E)$,

$Q_E PE_A^V = (PrPE_A^V, CQ_E)$.

0-арні композиції $\equiv_{xy}$ немонотонні й неантитонні, тому виділяємо такі підалгебри алгебри $Q_{ES} R_A^V$:

$Q_{ES} P_A^V = (PrP_A^V, CQ_{ES})$,

$Q_{ES} T_A^V = (PrT_A^V, CQ_{ES})$,

$Q_{ES} TS_A^V = (PrTS_A^V, CQ_{ES})$.

Те, що $\aleph$ є підалгеброю алгебри $\Re$, позначимо $\aleph \prec \Re$. Тоді маємо:

$$QTS_A^V \prec QP_A^V \text{ та } QTS_A^V \prec QT_A^V;$$

$$QPE_A^V \prec QP_A^V \text{ та } QPE_A^V \prec QRM_A^V;$$

$$QTA_A^V \prec QT_A^V \text{ та } QTA_A^V \prec QRA_A^V;$$

$$QP_A^V, QT_A^V, QRM_A^V, QRA_A^V \prec QR_A^V;$$

$$Q_E PE_A^V \prec Q_E P_A^V \prec Q_E R_A^V;$$

$$Q_{ES} TS_A^V \prec Q_{ES} P_A^V \text{ та } Q_{ES} TS_A^V \prec Q_{ES} T_A^V;$$

$$Q_{ES} P_A^V, Q_{ES} T_A^V \prec Q_{ES} R_A^V.$$

Алгебри (Pr_1, C) та (Pr_2, C) дуальні, якщо $\delta(\mathrm{Pr}_1) = \mathrm{Pr}_2$ та $\delta(\mathrm{Pr}_2) = \mathrm{Pr}_1$.

Маємо дуальні пари QP_A^V та QT_A^V, QPE_A^V та QTA_A^V, QRM_A^V та QRA_A^V, $Q_{ES} P_A^V$ та $Q_{ES} T_A^V$. Алгебри $QTS_A^V, QR_A^V, Q_{ES} TS_A^V$, $Q_{ES} R_A^V$ автодуальні.

Основні властивості пропозиційних композицій та кванторів аналогічні властивостям класичних логічних зв'язок та кванторів (див. [2, 3]). Водночас [3] для квазіарних предикатів невірні деякі пов'язані з кванторами закони класичної логіки.

Наведемо (див. також [3, 5]) властивості, пов'язані з композицією реномінації.

R) $\mathrm{R}(P) = P$ – тотожна реномінація.

RI) $\mathrm{R}_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(P) = \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)$.

R∃R) $\mathrm{R}_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\exists xP) = \mathrm{R}_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xP)$.

RU) $\mathrm{R}_{y,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(P) = \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)$.

Ren) $\exists yP = \exists z\mathrm{R}_z^y(P)$.

Для RU та Ren z неістотне для P.

R¬) $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg P) = \neg \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)$.

R∨) $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P \vee Q) = \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P) \vee \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(Q)$.

RR) $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\mathrm{R}_{\bar{y}}^{\bar{w}}(P)) = \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_{\bar{y}}^{\bar{w}}(P)$.

Тут $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_{\bar{y}}^{\bar{w}}$ – згортка $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$ і $\mathrm{R}_{\bar{y}}^{\bar{w}}$, задаємо [3, 5] згортку реномінацій так:

$$\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_{\bar{y}}^{\bar{w}}(P)(d) = \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\mathrm{R}_{\bar{y}}^{\bar{w}}(P))(d) =$$

$$= P(\mathrm{r}_{\bar{y}}^{\bar{w}} \bullet_{\bar{x}}^{\bar{v}}(d)).$$

R∃s) $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists yP) = \exists y\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)$, $y \notin \{\bar{v}, \bar{x}\}$.

R∃) $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists yP) = \exists z\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_z^y(P)$, якщо z неістотне для P та $z \notin \{\bar{v}, \bar{x}\}$.

Маємо [5] такі властивості, пов'язані з елімінацією кванторів:

$$T(\mathrm{R}_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(P)) \cap T(Ey) \subseteq T(\mathrm{R}_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xP)),$$

зокрема, $T(\mathrm{R}_y^x(P)) \cap T(\mathrm{E}y) \subseteq T(\exists xP)$;

$$F(\mathrm{R}_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xP)) \cap T(Ey) \subseteq F(\mathrm{R}_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(P)),$$

зокрема, $F(\exists xP) \cap T(\mathrm{E}y) \subseteq F(\mathrm{R}_y^x(P))$.

Розглянемо властивості, пов'язані з предикатами рівності.

Маємо такі співвідношення:

$T(=_{xy}) \subset T(Ex) \cap T(Ey) \subset T(Ex) \cup T(Ey)$;

$F(=_{xy}) \subset T(Ex) \cap T(Ey) \subset T(Ex) \cup T(Ey)$.

Тому предикати $\equiv_{xy}$ можна подати через предикати $=_{xy}$ та Ez.

Теорема 1. Маємо $\equiv_{xy} = (=_{xy} \& Ex \& Ey) \vee (\neg Ex \& \neg Ey)$.

Опишемо властивості реномінації предикатів рівності (див. також [6, 7]).

RD) за умови $x, y \notin \{\bar{u}\}$ маємо

$$\mathrm{R}_{\bar{v}}^{\bar{u}}(=_{xy}) = =_{xy} \text{ та } \mathrm{R}_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\equiv_{xy}) = \equiv_{xy};$$

за умови $y \notin \{\bar{u}\}$ маємо

$$\mathrm{R}_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(=_{xy}) = =_{zy} \text{ та } \mathrm{R}_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(\equiv_{xy}) = \equiv_{zy};$$

$$\mathrm{R}_{\bar{v},z,w}^{\bar{u},x,y}(=_{xy}) = =_{zw} \text{ та } \mathrm{R}_{\bar{v},z,w}^{\bar{u},x,y}(\equiv_{xy}) = \equiv_{zw}.$$

Для $=_{xy}$ та $\equiv_{xy}$ маємо рефлективність, симетричність, транзитивність.

RfP) предикати $=_{xx}$ неспростовні; предикати $\equiv_{xx}$ тотожно істинні.

SmP) для кожного $d \in {}^V\!A$ маємо $=_{xy}(d) = =_{yx}(d)$ та $\equiv_{xy}(d) = \equiv_{yx}(d)$.

TrP) для кожного $d \in {}^V\!A$ маємо:

$=_{xy}(d) = T$ та $=_{yz}(d) = T \Rightarrow =_{xz}(d) = T$;

$\equiv_{xy}(d) = T$ та $\equiv_{yz}(d) = T \Rightarrow \equiv_{xz}(d) = T$.

Як наслідок отримуємо:

предикати $=_{xy} \& =_{yz} \rightarrow =_{xz}$ неспростовні;

предикати $\equiv_{xy} \& \equiv_{yz} \rightarrow \equiv_{xz}$ тотожно істинні (адже вони тотальні).

REP) для кожних $P \in Pr^A$ та $d \in {}^V\!A$ маємо властивість заміни рівних:

$$=_{xy}(d) = T \Rightarrow \mathrm{R}_{\bar{z},x}^{\bar{u},v}(P)(d) = \mathrm{R}_{\bar{z},y}^{\bar{u},v}(P)(d);$$

$$\equiv_{xy}(d) = T \Rightarrow \mathrm{R}_{\bar{z},x}^{\bar{u},v}(P)(d) = \mathrm{R}_{\bar{z},y}^{\bar{u},v}(P)(d).$$

Розглянемо властивості квантифікації предикатів строгої рівності.

$\exists x \equiv_{xy}(d) = T \Leftrightarrow$ існує $a \in A$ таке, що $d(y) = a \Leftrightarrow d(y)\downarrow \Leftrightarrow Ey(d) = T$.

$\exists x \equiv_{xy}(d) = F \Leftrightarrow$ для кожного $a \in A$ невірно, що $d(y) = a \Leftrightarrow d(y)\uparrow \Leftrightarrow Ey(d) = F$.

Таким чином, $\exists x \equiv_{xy} = Ey$.

Звідси отримуємо: $\forall x \neg \equiv_{xy} = \neg Ey$.

$\forall x \equiv_{xy}(d) = T \Leftrightarrow d(y) = a$ для кожного $a \in A$. Якщо $|A| \geq 2$, то це неможливо; якщо $|A| = 1$, то це означає $d(y)\downarrow$, тобто $Ey(d) = T$; $\forall x \equiv_{xy}(d) = F \Leftrightarrow |A| \geq 2$ або $|A| = 1$ та $d(y)\uparrow$.

Таким чином, якщо $|A| \geq 2$, то $\forall x \equiv_{xy}(d) = F$ для всіх $d \in {}^V\!A$;

якщо $|A| = 1$, то $\forall x \equiv_{xy}(d) = F$ за умови $d(y)\uparrow$ та $\forall x \equiv_{xy}(d) = T$, за умови $d(y)\downarrow$, звідки $\forall x \equiv_{xy}(d) = Ey(d)$, за умови $|A| = 1$.

Звідси отримуємо: якщо $|A| \geq 2$, то $\forall x \equiv_{xy} = \mathrm{F}$; якщо $|A| = 1$, то $\forall x \equiv_{xy} = Ey$.

Як наслідок: $|A| \geq 2 \Rightarrow \exists x \neg \equiv_{xy} = \mathrm{T}$; $|A| = 1 \Rightarrow \exists x \neg \equiv_{xy} = \neg Ey$.

Тепер властивості квантифікації предикатів слабкої рівності.

$\exists x (=_{xy})(d) = T \Leftrightarrow$ існує $a \in A$ таке, що $d(y) = a \Leftrightarrow d(y)\downarrow \Leftrightarrow Ey(d) = T$;

$\exists x =_{xy}(d) = F \Leftrightarrow d(y)\downarrow$ та для кожного $a \in A$ неправильно $d(y) = a$, а це неможливо;

$\exists x =_{xy}(d)$ невизначене $\Leftrightarrow d(y)\uparrow$.

Таким чином, $\exists x =_{xy} = Ey \vee \perp$.

Звідси маємо: $\forall x \neg =_{xy} = \neg Ey \& \perp$.

$\forall x =_{xy}(d) = T \Leftrightarrow d(y) = a$ для кожного $a \in A$. Якщо $|A| \geq 2$, то це неможливо; якщо $|A| = 1$, то це означає $d(y)\downarrow$, тобто $Ey(d) = T$;

$\forall x =_{xy}(d) = F \Leftrightarrow d(y)\downarrow$ та $|A| \geq 2$;

$\forall x =_{xy}(d)$ невизначене $\Leftrightarrow d(y)\uparrow$.

Таким чином: якщо $|A| \geq 2$, то $\forall x =_{xy}(d) = F$ за умови $d(y)\downarrow$ та $\forall x =_{xy}(d)$ невизначене за умови $d(y)\uparrow$; якщо $|A| = 1$, то $\forall x =_{xy}(d) = T$ за умови $d(y)\downarrow$ та $\forall x =_{xy}(d)$ невизначене за умови $d(y)\uparrow$. Звідси маємо:

якщо $|A| \geq 2$, то $\forall x =_{xy} = \neg Ey \& \perp$;

якщо $|A| = 1$, то $\forall x =_{xy} = Ey \vee \perp$.

Це дає: $|A| \geq 2 \Rightarrow \exists x \neg =_{xy} = Ey \vee \perp$; $|A| = 1 \Rightarrow \exists x \neg =_{xy} = \neg Ey \& \perp$.

Таким чином, доведена

Теорема 2. 1) $\exists x \equiv_{xy} = Ey$;

$|A| \geq 2 \Rightarrow \forall x \equiv_{xy} = \mathrm{F}$, $|A| = 1 \Rightarrow \forall x \equiv_{xy} = Ey$;

2) $\exists x =_{xy} = Ey \vee \perp$;

$|A| \geq 2 \Rightarrow \forall x =_{xy} = \neg Ey \& \perp$,

$|A| = 1 \Rightarrow \forall x =_{xy} = Ey \vee \perp$.

3. Мови чистих першопорядкових логік та їх інтерпретації

Побудова композиційної предикатної алгебри дає змогу визначити мову логіки: терми алгебри є формулами мови.

Алфавіт мови ЧКНЛ: символи базових композицій $\neg$, $\vee$, $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, $\exists x$; множина Ps предикатних символів (ПС) – сигнатура мови; множина V предметних імен.

Дамо індуктивне визначення множини Fr формул мови ЧКНЛ.

Ф0) кожний $p\in Ps$ є формулою; такі формули назвемо атомарними.

Ф1) нехай $\Phi, \Psi\in Fr$; тоді $\neg\Phi\in Fr$, $\vee\Phi\Psi\in Fr$, $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi \in Fr$, $\exists x\Phi\in Fr$.

Формули вигляду $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi$ називаємо R-формулами.

Алфавіт мови ЧКНЛР відрізняється від алфавіту мови ЧКНЛ додаванням $=_{xy}$ до символів базових композицій. До визначення множини Fr додаємо пункт:

ФЕ) кожний $=_{xy}$, де $x, y\in V$, є формулою; такі формули атомарні.

Алфавіт мови ЧКНЛРС відрізняється від алфавіту мови ЧКНЛ додаванням $\equiv_{xy}$ до символів базових композицій. До визначення множини Fr додаємо пункт:

ФES) кожний $\equiv_{xy}$, де $x, y\in V$, є формулою; такі формули атомарні.

При зафіксованій множині базових композицій мови КНЛ відрізняються сигнатурою і способами запису формул (ми використовуємо префіксну форму).

Для запису формул далі використовуємо інфіксну форму та символи похідних композицій $\rightarrow$, &, $\leftrightarrow$, $\forall x$ (див. [3]).

Інтерпретуємо мови ЧКНЛ, ЧКНЛР, ЧКНЛРС на композиційних системах квазіарних предикатів CS = (A, Pr^A, C), де C – множина композицій відповідного рівня. Символи множини Ps позначають (виділяють) базові предикати в Pr^A, для цього задаємо тотальне однозначне $I : Ps \rightarrow Pr^A$. Відображення інтерпретації формул $I : Fr\rightarrow Pr^A$ є продовженням $I : Ps \rightarrow Pr^A$ згідно побудови формул із простіших за допомогою символів базових композицій:

IФ) $I(\neg\Phi) = \neg(I(\Phi))$,

$I(\vee\Phi\Psi) = \vee(I(\Phi), I(\Psi))$,

$I(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi) = \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(I(\Phi))$, $I(\exists x\Phi) = \exists x(I(\Phi))$.

Для мови ЧКНЛР додатково маємо:

IE) $I(=_{xy}) = =_{xy}$.

Для мови ЧКНЛРС маємо:

IES) $I(\equiv_{xy}) = \equiv_{xy}$.

Трійку $\boldsymbol{J}$ = (CS, Ps, I) назвемо інтерпретацією мови ЧКНЛ (ЧКНЛР, ЧКНЛРС) сигнатури Ps. Скорочено інтерпретації мови позначаємо як (A, Ps, I) чи (A, I).

Предикат $I(\Phi)$ – значення формули Φ при інтерпретації $\boldsymbol{J}$ – позначимо Φ_J.

Предметне ім'я $x\in V$ неістотне для формули Φ, якщо при кожній інтерпретації $\boldsymbol{J}$ ім'я x неістотне для предиката Φ_J.

Надалі розглядаємо логіки, розширені шляхом виділення підмножини $U\subseteq V$ тотально неістотних предметних імен (неістотних для всіх базових предикатів). Вважаємо, що U розв'язна відносно V.

Для КНЛ множину тотально неістотних імен традиційно задають [3, 5] за допомогою тотальної $\nu : Ps\rightarrow 2^V$, тоді $U = \bigcap\limits_{p\in Ps}\nu(p)$. Для визначення множин гарантовано неістотних для формул імен таку ν продовжуємо (див. [3]) до $\nu : Fr\rightarrow 2^V$.

У випадках ЧКНЛР та ЧКНЛРС маємо $\nu(=_{xy}) = V\backslash\{x, y\}$ та $\nu(\equiv_{xy}) = V\backslash\{x, y\}$.

Якщо $x\in\nu(\Phi)$, то (див. [3]) ім'я x неістотне для формули Φ.

Формула примітивна, якщо вона атомарна або має вигляд $R_{\bar{x}}^{\bar{z}}p$, де $p\in Ps$, $R_{\bar{x}}^{\bar{z}}$ не має пар тотожних імен, $\{\bar{z}\}\cap\nu(p) = \varnothing$.

Виділення в чистих першопорядкових логіках підалгебр T-предикатів, P-предикатів, TS-предикатів виділяє відповідні класи інтерпретацій: загальний клас R-інтерпретацій та підкласи P-інтерпретацій, T-інтерпретацій, TS-інтерпретацій. Такі класи інтерпретацій названо [4, 5] семантиками, їх позначаємо $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{TS}$.

Нехай α – деякий клас інтерпретацій (семантика).

Формула Φ неспростовна (частково істинна) при інтерпретації $\boldsymbol{J}$ (позн. $\boldsymbol{J}|=\Phi$), якщо предикат Φ_J – неспростовний.

Формула Φ неспростовна в α (позн. ${}^{\alpha}|\!=\Phi$), якщо $\boldsymbol{J}|\!=\Phi$ при кожній $\boldsymbol{J}\in\alpha$.

Формула Φ тотально істинна при інтерпретації $\boldsymbol{J}$ (позн. $\boldsymbol{J}|\!\equiv\Phi$), якщо предикат Φ_J – тотально істинний.

Формула Φ тотально істинна в α (позн. ${}^{\alpha}|\!\equiv\Phi$), якщо $\boldsymbol{J}|\!\equiv\Phi$ при кожній $\boldsymbol{J}\in\alpha$.

Формула Φ тотожно істинна при інтерпретації $\boldsymbol{J}$ (позн. $\boldsymbol{J}|\!=_{id}\Phi$), якщо предикат Φ_J – тотожно істинний.

Формула Φ тотожно істинна в α (позн. ${}^{\alpha}|\!=_{id}\Phi$), якщо $\boldsymbol{J}|\!=_{id}\Phi$ для всіх $\boldsymbol{J}\in\alpha$.

Якщо семантика α зафіксована, то замість ${}^{\alpha}|\!=$, ${}^{\alpha}|\!\equiv$, ${}^{\alpha}|\!=_{id}$ пишемо $|\!=$, $|\!\equiv$, $|\!=_{id}$.

Формула Φ виконувана при інтерпретації $\boldsymbol{J}$, якщо предикат Φ_J – виконуваний. Формула Φ виконувана в α, якщо Φ виконувана при деякій $\boldsymbol{J}\in\alpha$.

Твердження 1. $\boldsymbol{J}|\!=_{id}\Phi \Rightarrow \boldsymbol{J}|\!=\Phi$, $\boldsymbol{J}|\!=_{id}\Phi \Rightarrow \boldsymbol{J}|\!\equiv\Phi$; $|\!=_{id}\Phi \Rightarrow |\!=\Phi$, $|\!=_{id}\Phi \Rightarrow |\!\equiv\Phi$.

Для ЧКНЛ маємо (див. [5]).

Теорема 3. $\{\Phi \mid {}^{R}|\!=\Phi\} = \{\Phi \mid {}^{R}|\!\equiv\Phi\} = \{\Phi \mid {}^{R}|\!=_{id}\Phi\} = \varnothing$;

$$\{\Phi \mid {}^{P}|\!\equiv\Phi\} = \{\Phi \mid {}^{P}|\!=_{id}\Phi\} = \{\Phi \mid {}^{T}|\!=\Phi\} = \{\Phi \mid {}^{T}|\!=_{id}\Phi\} = \varnothing;$$

$$\{\Phi \mid {}^{P}|\!=\Phi\} = \{\Phi \mid {}^{T}|\!\equiv\Phi\} = \{\Phi \mid {}^{TS}|\!=_{id}\Phi\} = \{\Phi \mid {}^{TS}|\!=\Phi\} = \{\Phi \mid {}^{TS}|\!\equiv\Phi\}.$$

У випадках T-семантики і TS-семантики предикати слабкої рівності відсутні. Отже, для ЧКНЛР можна розглядати лише R-семантику і P-семантику.

Приклад 2. ${}^{R}|\!= x=x$, ${}^{R}|\!= x=y\leftrightarrow y=x$; ${}^{P}|\!= x=x$, ${}^{P}|\!= x=y\leftrightarrow y=x$.

Тому для ЧКНЛР маємо.

Теорема 4. 1) $\{\Phi \mid {}^{R}|\!\equiv\Phi\} = \{\Phi \mid {}^{R}|\!=_{id}\Phi\} = \varnothing$; $\{\Phi \mid {}^{R}|\!=\Phi\} \neq \varnothing$;

2) $\{\Phi \mid {}^{P}|\!\equiv\Phi\} = \{\Phi \mid {}^{P}|\!=_{id}\Phi\} = \varnothing$; $\{\Phi \mid {}^{P}|\!=\Phi\} \neq \varnothing$.

Із теорем 3 та 4 випливає, що для ЧКНЛ (окрім TS-семантики) та ЧКНЛР множина тотожно істинних формул порожня. Це не так для ЧКНЛРС.

Приклад 3. Маємо ${}^{\alpha}|\!=_{id} x\equiv x$ та ${}^{\alpha}|\!=_{id} x\equiv y\leftrightarrow y\equiv x$ (тут α – одне з R, P, T, TS).

Отже, для ЧКНЛРС пп.1 і 2 теореми 3 неправильні, правильним залишається п. 3.

4. Семантичні властивості формул

На основі різних співвідношень між областями істинності та хибності предикатів можна ввести (див. [3–5, 8]) низку відношень, які формалізують фундаментальне поняття логічного наслідку. Спочатку задаємо відношення наслідку для двох формул при фіксованій інтерпретації $\boldsymbol{J}$.

1) істиннісний, або T-наслідок ${}_{J}|\!=_{T}$: $\Phi\ {}_{J}|\!=_{T}\Psi \Leftrightarrow T(\Phi_J)\subseteq T(\Psi_J)$;

2) хибнісний, або F-наслідок ${}_{J}|\!=_{F}$: $\Phi\ {}_{J}|\!=_{F}\Psi \Leftrightarrow F(\Psi_J)\subseteq F(\Phi_J)$;

3) сильний, або TF-наслідок ${}_{J}|\!=_{TF}$: $\Phi\ {}_{J}|\!=_{TF}\Psi \Leftrightarrow \Phi\ {}_{J}|\!=_{T}\Psi$ та $\Phi\ {}_{J}|\!=_{F}\Psi$;

4) неспростовнісний, або IR-наслідок ${}_{J}|\!=_{IR}$: $\Phi\ {}_{J}|\!=_{IR}\Psi \Leftrightarrow T(\Phi_J)\cap F(\Psi_J) = \varnothing$;

5) дуальний до IR, або DI-наслідок ${}_{J}|\!=_{DI}$: $\Phi\ {}_{J}|\!=_{DI}\Psi \Leftrightarrow F(\Phi_J)\cup T(\Psi_J) = {}^{V}A$.

Відповідні відношення логічного наслідку в семантиці α задаємо за схемою:

$\Phi\ {}^{\alpha}|\!=\Psi$, якщо $\Phi\ {}_{J}|\!=\Psi$ для всіх $\boldsymbol{J}\in\alpha$.

У випадку TS-семантики усі наведені відношення логічного наслідку втрачають відмінності [4, 5] і стають єдиним відношенням, яке позначимо ${}^{TS}|\!=$.

Для наведених відношень логічного наслідку маємо [4, 5] співвідношення:

${}^{R}|\!=_{T} = {}^{R}|\!=_{F} = {}^{R}|\!=_{TF}$; ${}^{P}|\!=_{IR} = {}^{T}|\!=_{DI} = {}^{TS}|\!=$; ${}^{P}|\!=_{T} = {}^{T}|\!=_{F}$; ${}^{P}|\!=_{F} = {}^{T}|\!=_{T}$; ${}^{P}|\!=_{TF} = {}^{T}|\!=_{TF}$.

Серед цих відношень лише 5 різних, тому достатньо розглядати

$$ {}^{P}|\!=_{IR},\ {}^{P}|\!=_{T},\ {}^{P}|\!=_{F},\ {}^{P}|\!=_{TF},\ {}^{R}|\!=_{TF}. $$

Відношення

$$ {}^{P}|\!=_{IR},\ {}^{P}|\!=_{T},\ {}^{P}|\!=_{F},\ {}^{P}|\!=_{TF} $$

також позначаємо

$$ |\!=_{IR},\ |\!=_{T},\ |\!=_{F},\ |\!=_{TF}. $$

Для зазначених відношень маємо [3–5]:

${}^{R}|\!=_{TF}\subset |\!=_{TF} = |\!=_{T}\cap|\!=_{F}$;

$|\!=_{TF}\subset|\!=_{T}\subset|\!=_{IR}$, $|\!=_{TF}\subset|\!=_{F}\subset|\!=_{IR}$.

Відношення логічного наслідку індукують відповідні відношення логічної еквівалентності. Відношення еквівалентності при інтерпретації $\boldsymbol{J}$ $_{J}{\sim}_{T}$, $_{J}{\sim}_{F}$, $_{J}{\sim}_{TF}$, $_{J}{\sim}_{IR}$, $_{J}{\sim}_{DI}$ визначаємо за такою схемою:

$\Phi\ _{J}{\sim}\ \Psi$, якщо $\Phi\ _{J}|{=}\ \Psi$ та $\Psi\ _{J}|{=}\ \Phi$.

Відношення логічної еквівалентності ${}^{P}{\sim}_{IR}$, ${}^{P}{\sim}_{T}$, ${}^{P}{\sim}_{F}$, ${}^{P}{\sim}_{TF}$, ${}^{R}{\sim}_{TF}$ визначаємо за схемою: $\Phi\ {}^{\alpha}{\sim}\ \Psi$, якщо $\Phi\ {}^{\alpha}|{=}\ \Psi$ та $\Psi\ {}^{\alpha}|{=}\ \Phi$. Маємо $\Phi\ {}^{\alpha}{\sim}_{*}\ \Psi \Leftrightarrow \Phi\ _{J}{\sim}_{*}\ \Psi$ для кожної $\boldsymbol{J}\in\boldsymbol{\alpha}$.

Відношення ${}^{P}{\sim}_{IR}$, ${}^{P}{\sim}_{T}$, ${}^{P}{\sim}_{F}$, ${}^{P}{\sim}_{TF}$ також позначаємо ${\sim}_{IR}$, ${\sim}_{T}$, ${\sim}_{F}$, ${\sim}_{TF}$.

Описані вище відношення логічного наслідку рефлексивні й транзитивні, відношення логічної еквівалентності рефлексивні, транзитивні й симетричні.

Властивості відношень логічного наслідку вивчались в [2–5, 8]. Відношення логічного наслідку в логіках монотонних предикатів та логіках антитонних предикатів досліджено в [8].

Особливу роль мають відношення $|{=}_{IR}$ та ${\sim}_{IR}$, вони традиційно позначаються [2, 3] як $|{=}$ та $\sim$. Це пов'язано з тим фактом, що логічні зв'язки $\to$ та $\leftrightarrow$ узгоджуються з відношеннями $|{=}_{IR}$ та ${\sim}_{IR}$:

$\Phi\ |{=}_{IR}\ \Psi \Leftrightarrow {}^{P}|{=}\ \Phi\to\Psi \Leftrightarrow {}^{T}|{\equiv}\ \Phi\to\Psi$.

$\Phi\ {\sim}_{IR}\ \Psi \Leftrightarrow {}^{P}|{=}\ \Phi\leftrightarrow\Psi \Leftrightarrow {}^{T}|{\equiv}\ \Phi\leftrightarrow\Psi$.

Дуже важливим є відношення $_{J}{\sim}_{TF}$: $\Phi\ _{J}{\sim}_{TF}\ \Psi \Leftrightarrow T(\Phi_J) = T(\Psi_J)$ та $F(\Phi_J) = F(\Psi_J)$.

Отже, $\Phi\ _{J}{\sim}_{TF}\ \Psi$ означає, що Φ_J та Ψ_J – це один і той же предикат.

Маємо такі співвідношення між тотожно істинністю та відношеннями сильного наслідку й еквівалентності.

Теорема 5. 1) ${}^{P}|{=}_{id}\ \Phi\to\Psi \Rightarrow$ $\Rightarrow \Phi\ |{=}_{TF}\ \Psi$, водночас зворотне неправильне;

2) ${}^{P}|{=}_{id}\ \Phi\leftrightarrow\Psi\ \Rightarrow\ \Phi\ {\sim}_{TF}\ \Psi$, водночас зворотне неправильне;

3) ${}^{R}|{=}_{id}\ \Phi\leftrightarrow\Psi \Rightarrow \Phi\ {}^{R}{\sim}_{TF}\ \Psi$, водночас зворотне неправильне.

Твердження теореми нетривіальне для ЧКНЛРС, адже для ЧКНЛ та ЧКНЛР $\{\Phi\ |\ {}^{P}|{=}_{id}\ \Phi\} = \varnothing$ та $\{\Phi\ |\ {}^{R}|{=}_{id}\ \Phi\} = \varnothing$, для них твердження теореми тривіально правильне.

На основі властивостей предикатів отримуємо відповідні властивості формул.

Властивості пропозиційного рівня описано в [2, 3], наведемо тут основні властивості, пов'язані з реномінаціями, кванторами та предикатами рівності.

R) $R(\Phi)^{\alpha}{\sim}_{TF}\ \Phi$.

RI) $R^{z,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi)^{\alpha}{\sim}_{TF}\ R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)$.

RU) $R^{z,\bar{v}}_{y,\bar{x}}(\Phi)^{\alpha}{\sim}_{TF}\ R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)$, якщо z неістотне для Φ.

RR) $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(R^{\bar{w}}_{\bar{y}}(\Phi))^{\alpha}{\sim}_{TF}\ R^{\bar{v}}_{\bar{x}}\circ^{\bar{w}}_{\bar{y}}(\Phi)$.

R¬) $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)^{\alpha}{\sim}_{TF}\ \neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)$.

R∨) $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi\vee\Psi)^{\alpha}{\sim}_{TF}\ R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)\vee R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Psi)$.

Реномінація предикатів рівності:

RD) за умови $x, y \notin \{\bar{u}\}$ маємо

$R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(=_{xy})^{\alpha}{\sim}_{TF} =_{xy}$ тт $R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\equiv_{xy})^{\alpha}{\sim}_{TF} \equiv_{xy}$;

за умови $y \notin \{\bar{u}\}$ маємо

$R^{\bar{u},x}_{\bar{v},z}(=_{xy})^{\alpha}{\sim}_{TF} =_{zy}$ та $R^{\bar{u},x}_{\bar{v},z}(\equiv_{xy})^{\alpha}{\sim}_{TF} \equiv_{zy}$,

$R^{\bar{u},x,y}_{\bar{v},z,u}(=_{xy})\ {}^{\alpha}{\sim}_{TF} =_{zu}$ та $R^{\bar{u},x,y}_{\bar{v},z,u}(\equiv_{xy})\ {}^{\alpha}{\sim}_{TF} \equiv_{zu}$.

Для предикатів рівності маємо властивості рефлективності, симетричності, а також транзитивності й заміни рівних.

Rf) ${}^{P}|{=}\ x = x$, ${}^{R}|{=}\ x = x$; ${}^{\alpha}|{=}_{id}\ x \equiv x$.

Sm) ${}^{P}|{=}\ x = y \leftrightarrow y = x$, ${}^{R}|{=}\ x = y \leftrightarrow y = x$;

${}^{\alpha}|{=}_{id}\ x \equiv y \leftrightarrow y \equiv x$.

Tr) ${}^{P}|{=}\ x = y \to y = z \to x = z$,

${}^{R}|{=}\ x = y \to y = z \to x = z$;

${}^{\alpha}|{=}_{id}\ x \equiv y \to y \equiv z \to x \equiv z$.

ER) ${}^{\alpha}|{=}\ x_1 = y_1 \to \ldots \to x_n = y_n \to$

$\to (R^{\bar{u},v_1,\ldots,v_n}_{\bar{z},x_1,\ldots,x_n}(\Phi) \leftrightarrow R^{\bar{u},v_1,\ldots,v_n}_{\bar{z},y_1,\ldots,y_n}(\Phi))$,

α – P чи R;

${}^{\alpha}|{=}\ x_1 \equiv y_1 \to \ldots \to x_n \equiv y_n \to$

$\to (R^{\bar{u},v_1,\ldots,v_n}_{\bar{z},x_1,\ldots,x_n}(\Phi) \leftrightarrow R^{\bar{u},v_1,\ldots,v_n}_{\bar{z},y_1,\ldots,y_n}(\Phi))$,

α – P чи R;

${}^{\alpha}|{=}_{id}\ x_1 \equiv y_1 \to \ldots \to x_n \equiv y_n \to$

$\to (R^{\bar{u},v_1,\ldots,v_n}_{\bar{z},x_1,\ldots,x_n}(\Phi) \leftrightarrow R^{\bar{u},v_1,\ldots,v_n}_{\bar{z},y_1,\ldots,y_n}(\Phi))$,

α – T чи TS.

Квантифікація предикатів рівності:

QE) $\exists x \equiv_{xy}\ {\sim}_{TF}\ Ey$.

Для предикатів слабкої рівності подібний вираз можна записати лише при розширенні сигнатури символом $\perp$ всюди невизначеного предиката: $\exists x =_{xy} \sim_{TF} Ey \vee \perp$.

Основою еквівалентних перетворень формул є [2, 3] теорема еквівалентності. Вона формулюється для відношень ${}^{R}{\sim}_{TF}$, $\sim_{TF}$, $\sim_{IR}$. Для $\sim_T$ та $\sim_F$ теорема неправильна.

Теорема 6. Нехай Φ' отримано з формули Φ заміною деяких входжень $\Phi_1, ..., \Phi_n$ на $\Psi_1, ..., \Psi_n$. Якщо $\Phi_1 {}^{\alpha}{\sim}_* \Psi_1$, ..., $\Phi_n {}^{\alpha}{\sim}_* \Psi_n$, то $\Phi {}^{\alpha}{\sim}_* \Phi'$.

Важливе поняття *Rs*-*Un*-еквівалентних формул вводимо так (див. також [5]).

Rs-формою *R*-формули $R_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}^{\bar{x},\bar{u},\bar{v}}(\Phi)$, де $\{\bar{u}\} \subseteq \nu(\Phi)$, назвемо *R*-формулу $R_{\bar{z}}^{\bar{v}}(\Phi)$, утворену із $R_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}^{\bar{x},\bar{u},\bar{v}}(\Phi)$ всеможливими спрощенням на основі властивостей R, RI, RU, R∃R, а також RD (застосування R та RD може дати *Rs*-форму, яка не буде *R*-формулою). *Rs*-форми *R*-формул чи їх заперечень назвемо *Rs*-формулами.

Властивості R, RI, RU, R∃R, RD гарантують: якщо Ψ та ϑ мають однакові *Rs*-форми, то $T(\Psi_J) = T(\vartheta_J)$ та $F(\Psi_J) = F(\vartheta_J)$ для всіх інтерпретацій ***J***.

Нехай $Un \subseteq V$ – множина імен, трактованих як неозначені (таку *Un* задаємо за допомогою предикатів-індикаторів *Ez*), а символ $\varepsilon \notin V$ позначає відсутність значення. Нехай *R*-формула $R_{\bar{s},\bar{y},\bar{v}}^{\bar{r},\bar{x},\bar{u}}\Phi$ така: $\{\bar{r}, \bar{s}, \bar{y}\} \subseteq Un$, $\{\bar{x}, \bar{v}\} \cap Un = \varnothing$. *Un*-форма формули $R_{\bar{s},\bar{y},\bar{v}}^{\bar{r},\bar{x},\bar{u}}\Phi$ – це вираз $R_{\bar{\varepsilon},\bar{v}}^{\bar{x},\bar{u}}\Phi$.

R-формули Ψ та Ξ назвемо *Rs*-*Un*-еквівалентними, якщо Ψ та Ξ мають однакові *Rs*-форми або ці *Rs*-форми мають однакові *Un*-форми.

Якщо *R*-формули Ψ та Ξ – *Rs*-*Un*-еквівалентні, то ¬Ψ та ¬Ξ теж назвемо *Rs*-*Un*-еквівалентними. Те, що Ψ та Ξ є *Rs*-*Un*-еквівалентними, записуємо $\Psi \sim_{Un} \Xi$. Вважаємо, що для Ψ, яка не є *R*-формулою чи запереченням *R*-формули, її *Un*-форма збігається із Ψ. Звідси $\Psi \sim_{Un} \Psi$.

Твердження 2. Якщо $\Psi \sim_{Un} \Xi$, то для кожної інтерпретації ***J*** = (*A*, *I*) маємо:

$$T(\Psi_J) \cap {}^{V\setminus Un}A = T(\Xi_J) \cap {}^{V\setminus Un}A,$$

$$F(\Psi_J) \cap {}^{V\setminus Un}A = F(\Xi_J) \cap {}^{V\setminus Un}A.$$

Це означає: $\Psi_J(d) = \Xi_J(d)$ для всіх ***J*** = (*A*, *I*) та $d \in {}^{V}A$, для яких $asn(d) \cap Un = \varnothing$, тобто $Eu(d) = F$ для всіх $u \in Un$.

5. Відношення логічного наслідку для множин формул

Нехай $\Gamma, \Delta \subseteq Fr$, ***J*** – інтерпретація. Далі позначатимемо $\bigcap_{\Phi\in\Gamma} T(\Phi_J)$ як $T^{\wedge}(\Gamma_J)$, $\bigcap_{\Psi\in\Delta} F(\Psi_J)$ як $F^{\wedge}(\Delta_J)$, $\bigcup_{\Psi\in\Delta} T(\Psi_J)$ як $T^{\vee}(\Delta_J)$, $\bigcup_{\Phi\in\Gamma} F(\Phi_J)$ як $F^{\vee}(\Gamma_J)$.

Δ є *T*-наслідком Γ при ***J*** (позн. $\Gamma\ {}_J{\models}_T\ \Delta$), якщо $T^{\wedge}(\Gamma_J) \subseteq T^{\vee}(\Delta_J)$.

Δ є *F*-наслідком Γ при ***J*** (позн. $\Gamma\ {}_J{\models}_F\ \Delta$), якщо $F^{\wedge}(\Delta_J) \subseteq F^{\vee}(\Gamma_J)$.

Δ є *TF*-наслідком Γ при ***J*** (позн. $\Gamma\ {}_J{\models}_{TF}\ \Delta$), якщо $\Gamma\ {}_J{\models}_T\ \Delta$ та $\Gamma\ {}_J{\models}_F\ \Delta$.

Δ є *IR*-наслідком Γ при ***J*** (позн. $\Gamma\ {}_J{\models}_{ID}\ \Delta$), якщо $T^{\wedge}(\Gamma_J) \cap F^{\wedge}(\Delta_J) = \varnothing$.

Δ є *DI*-наслідком Γ при ***J*** (позн. $\Gamma\ {}_J{\models}_{DI}\ \Delta$), якщо $F^{\vee}(\Gamma_J) \cup T^{\vee}(\Delta_J) = {}^{V}A$.

Відповідні відношення логічного наслідку визначаємо за схемою:

$\Gamma\ {}^{\alpha}{\models}_*\ \Delta$, якщо $\Gamma\ {}_J{\models}_*\ \Delta$ для всіх $\boldsymbol{J} \in \boldsymbol{\alpha}$.

Аналогом теореми 6 для множин формул є теорема заміни еквівалентних.

Теорема 7. Нехай $\Phi \sim \Psi$, тоді:

$$\Phi, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \Psi, \Gamma \models \Delta; \ \ \Gamma \models \Delta, \Phi \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \Psi.$$

Тут ~ – одне з відношень ${}^{R}{\sim}_{TF}$, $\sim_{TF}$, $\sim_{IR}$; $\models$ – одне з відношень ${}^{R}{\models}_{TF}$, ${\models}_{TF}$, ${\models}_{IR}$.

Опишемо властивості відношень логічного наслідку для множин формул.

Надалі, якщо інше не зазначене, $\models$ означає одне з ${}^{R}{\models}_{TF}$, ${\models}_{TF}$, ${\models}_T$, ${\models}_F$, ${\models}_{IR}$.

M) нехай $\Gamma \subseteq \Lambda$ та $\Delta \subseteq \Sigma$, тоді $\Gamma \models \Delta \Rightarrow \Lambda \models \Sigma$ (монотонність).

Властивості декомпозиції формул:

¬¬L) $\neg\neg\Phi, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \Phi, \Gamma \models \Delta$.

$\neg\neg_R$) $\Gamma \models \Delta, \neg\neg\Phi \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \Phi$.

$\vee_L$) $\Phi\vee\Psi, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \Phi, \Gamma \models \Delta$ та $\Psi, \Gamma \models \Delta$.

$\vee_R$) $\Gamma \models \Delta, \Phi\vee\Psi \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \Phi, \Psi$.

$\neg\vee_L$) $\neg(\Phi\vee\Psi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \neg\Phi, \neg\Psi, \Gamma \models \Delta$.

$\neg\vee_R$) $\Gamma \models \Delta, \neg(\Phi\vee\Psi) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \neg\Phi$ та $\Gamma \models \Delta, \neg\Psi$.

Для $\models_{IR}$ додатково маємо (проте це неправильно [3] для ${}^R\!\models_{TF}$, $\models_{TF}$, $\models_T$, $\models_F$):

$\neg_L$) $\neg\Phi, \Gamma \models_{IR} \Delta \Leftrightarrow \Gamma \models_{IR} \Delta, \Phi$.

$\neg_R$) $\Gamma \models_{IR} \Delta, \neg\Phi \Leftrightarrow \Phi, \Gamma \models_{IR} \Delta$.

Наявність кожного з ${}^R\!\models_{TF}$, $\models_{TF}$, $\models_T$, $\models_F$, $\models_{IR}$ гарантує властивість:

C) $\Phi, \Gamma \models \Delta, \Phi$.

Наступні властивості гарантують наявність відповідного відношення:

CL) $\Phi, \neg\Phi, \Gamma \models_* \Delta$ ($*$ – *T* чи *IR*);

CR) $\Gamma \models_* \Delta, \Phi, \neg\Phi$ ($*$ – *F* чи *IR*);

CLR) $\Phi, \neg\Phi, \Gamma \models_{TF} \Delta, \Psi, \neg\Psi$.

Для $\models_{IR}$ в силу $\neg_L$ та $\neg_R$ властивості *CLR*, *CL*, *CR* зводяться до *C*.

Загальні умови, які гарантують наявність того чи іншого відношення логічного наслідку, індуковані властивостями *C*, *CL*, *CR*, *CLR* та твердженням 2.

Нехай $\Gamma, \Delta \subseteq Fr$, $Un = \{x \mid Ex \in \Delta\}$; нехай $\models$ – одне з $\models_{IR}$, $\models_T$, $\models_F$, $\models_{TF}$, ${}^R\!\models_{TF}$.

Теорема 8. 1) $\Psi \sim_{Un} \Xi \Rightarrow \Psi, \Gamma \models \Xi, \Delta$; зокрема, $\Phi, \Gamma \models \Phi, \Delta$;

2) $\Psi \sim_{Un} \Xi \Rightarrow \Psi, \neg\Xi, \Gamma\ {}^P\!\models_T \Delta$; зокрема, $\Phi, \neg\Phi, \Gamma\ {}^P\!\models_T \Delta$;

3) $\Psi \sim_{Un} \Xi \Rightarrow \Gamma\ {}^P\!\models_F \Psi, \neg\Xi, \Delta$; зокрема, $\Gamma\ {}^P\!\models_F \Phi, \neg\Phi, \Delta$;

4) $\varphi \sim_{Un} \xi$ та

$\theta \sim_{Un} \omega \Rightarrow \varphi, \neg\xi, \Gamma\ {}^P\!\models_{TF} \theta, \neg\omega, \Delta$;

зокрема, $\Phi, \neg\Phi, \Gamma\ {}^P\!\models_{TF} \Psi, \neg\Psi, \Delta$

Справді, згідно твердження 2 за умови $\Psi \sim_{Un} \Xi$ для кожної $\boldsymbol{J} = (A, I)$ маємо:

$T(\Psi_J) \cap {}^{V\setminus Un}A = T(\Xi_J) \cap {}^{V\setminus Un}A$,

$F(\Psi_J) \cap {}^{V\setminus Un}A = F(\Xi_J) \cap {}^{V\setminus Un}A$.

Для доведення пп. 1, 2, 3, 4 далі використовуємо властивості *C*, *CL*, *CR*, *CLR*.

Властивості еквівалентних перетворень, пов'язані з реномінацією, отримуються на основі властивостей R, RI, RU, R∃R, RR, R¬, R∨. Кожна з них продукує 4 відповідні властивості для відношення логічного наслідку, коли виділена формула чи її заперечення знаходиться у лівій чи правій частині відношення. Наведемо для прикладу властивості R_L, $\neg R_R$, $R\neg_L$, $\neg R\vee_R$:

R_L) $R(\Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \Phi, \Gamma \models \Delta$;

$\neg R_R$) $\Gamma \models \neg R(\Phi), \Delta \Leftrightarrow \Gamma \models \neg\Phi, \Delta$;

$R\neg_L$) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi), \Gamma \models \Delta$;

$\neg R\vee_R$) $\Gamma \models \Delta, \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \neg(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi))$.

Властивості елімінації кванторів:

$\exists_L$) $\exists x\Phi, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow R_z^x(\Phi), Ez, \Gamma \models \Delta$;

$\exists R_L$) $R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(\Phi), Ez, \Gamma \models \Delta$;

$\neg\exists_R$) $\Gamma \models \neg\exists x\Phi, \Delta \Leftrightarrow \Gamma, Ez \models \neg R_z^x(\Phi), \Delta$;

$\neg\exists R_R$) $\Gamma \models \neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi), \Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Gamma, Ez \models \neg R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(\Phi), \Delta$;

$\exists v_R$) $\Gamma, Ey \models \exists x\Phi, \Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Gamma, Ey \models \exists x\Phi, R_y^x(\Phi), \Delta$;

$\exists Rv_R$) $\Gamma, Ey \models \Delta, R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Gamma, Ey \models \Delta, R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi), R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi)$;

$\neg\exists v_L$) $\neg\exists x\Phi, Ey, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \neg\exists x\Phi, \neg R_y^x(\Phi), Ey, \Gamma \models \Delta$;

$\neg\exists Rv_L$) $\neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi), Ey, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi), \neg R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi), Ey, \Gamma \models \Delta$.

Для $\exists_L$ і $\neg\exists_R$ умова: $z \in fu(\Gamma, \Delta, \exists x\Phi)$ форми для зовнішнього заперечення зайві, базовими; для $\exists R_L$ і $\neg\exists Rv_L$: $z \in fu(\Gamma, \Delta, R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi))$.

E-розподіл та первісного означення:

Ed) $\Gamma \models \Delta \Leftrightarrow Ey, \Gamma \models \Delta$ та $\Gamma \models \Delta, Ey$.

Ev) $\Gamma \models \Delta \Leftrightarrow Ez, \Gamma \models \Delta$, де $z \in fu(\Gamma, \Delta)$.

Для $\models_{IR}$ в силу $\neg_L$ та $\neg_R$ властивості вигляду $\neg*$ із запереченням виділеної формули є похідними.

Розглянемо властивості для слабкої рівності. Зауважимо, що знімати заперечення, переносячи $\neg\, x=y$ з лівої частини відношення у праву і навпаки, можна лише для $\models_{IR}$ (це випливає з $\neg_L$ та $\neg_R$), водночас для $\models_T$, $\models_F$, $\models_{TF}$, ${}^R\!\models_{TF}$ це робити не можна.

Приклад 4. Маємо $\neg\, x=y,\ x=x \models_T y=y$, водночас $x=x \not\models_T y=y,\ x=y$.

Справді, $T(\neg\, x=y \,\&\, x=x) \subseteq \{d \mid d(x)\downarrow$ та $d(y)\downarrow\} \subseteq \{d \mid d(y)\downarrow\} = T(y=y)$; проте для $d=[x\mapsto a]$ $d\in T(x=x)$ та $d\notin T(y=y \vee x=y) =$ $= T(y=y)\cup T(x=y) = T(y=y)$.

Аналогічно $\neg\, y=y \models_F x=y, \neg x=x$, проте $\neg y=y, \neg x=y \not\models_F \neg x=x$.

На основі Sm маємо властивості:

$\mathrm{Sm_L})$ $x=y, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow x=y, y=x, \Gamma \models \Delta$;

$\mathrm{Sm_R})$ $\Gamma \models \Delta, \neg x=y \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \neg x=y, \neg y=x$.

Властивість Tr індукує:

$\mathrm{Tr_L})$ $x=y, y=z, \Gamma \models_* \Delta \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x=y, y=z, x=z, \Gamma \models_* \Delta$ ($*$ – T чи IR);

$\mathrm{Tr_R})$ $\Gamma \models_* \Delta, \neg x=y, \neg y=z \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \Gamma \models_* \Delta, \neg x=y, \neg y=z, \neg x=z$ ($*$ – F чи IR);

Це випливає із $T(x=y)\cap T(y=z) =$ $= T(x=y)\cap T(y=z)\cap T(x=z)$.

Приклад 5. Для $d=[x\mapsto a, z\mapsto b]$ маємо $d\notin F(x=y)\cup F(y=z)$ та $d\in F(x=z)$, тому $d\in F(x=z)\cup F(x=y)\cup F(y=z)$. Звідси отримуємо $x=y, y=z \not\models_F x=y \,\&\, y=z \,\&\, x=z$ та $\neg\, x=y \vee \neg\, y=z \vee \neg\, x=z \not\models_T \neg\, x=y, \neg\, y=z$. Проте $x=y, y=z, x=z \models_F x=y \,\&\, y=z \,\&\, x=z$ та $\neg\, x=y \vee \neg\, y=z \vee \neg\, x=z \models_T$ $\models_T \neg\, x=y, \neg\, y=z, \neg\, x=z$.

Звідси $\mathrm{Tr_L}$ неправильна для $\models_F$, а $\mathrm{Tr_R}$ неправильна для $\models_T$.

Таким чином, транзитивність слабкої рівності порушується для відношень $\models_T$, $\models_F$, $\models_{TF}$, ${}^R\!\models_{TF}$, тому для ЧКНЛР адекватним залишається лише відношення $\models_{IR}$.

Властивість RD індукує властивості реномінації рівності для відношення $\models_{IR}$.

$\mathrm{RD_L})$ за умови $x, y \notin \{\bar{u}\}$ маємо

$R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(x=y), \Gamma \models_{IR} \Delta \Leftrightarrow x=y, \Gamma \models_{IR} \Delta$;

за умови $y \notin \{\bar{u}\}$ маємо

$R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(x=y), \Gamma \models_{IR} \Delta \Leftrightarrow z=y, \Gamma \models_{IR} \Delta$;

$R_{\bar{v},z,u}^{\bar{u},x,y}(x=y), \Gamma \models_{IR} \Delta \Leftrightarrow z=u, \Gamma \models_{IR} \Delta$;

$\mathrm{RD_R})$ за умови $x, y \notin \{\bar{u}\}$ маємо

$\Gamma \models_{IR} R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(x=y), \Delta \Leftrightarrow \Gamma \models_{IR} x=y, \Delta$;

за умови $y \notin \{\bar{u}\}$ маємо

$\Gamma \models_{IR} R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(x=y), \Delta \Leftrightarrow \Gamma \models_{IR} z=y, \Delta$;

$\Gamma \models_{IR} R_{\bar{v},z,u}^{\bar{u},x,y}(x=y), \Delta \Leftrightarrow \Gamma \models_{IR} z=u, \Delta$.

Властивість ER індукує властивості заміни рівних для відношення $\models_{IR}$:

$\mathrm{ER_L})$ $x=y, R_{\bar{v},x}^{\bar{u},z}(\Phi), \Gamma \models_{IR} \Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=y, R_{\bar{v},x}^{\bar{u},z}(\Phi), R_{\bar{v},y}^{\bar{u},z}(\Phi), \Gamma \models_{IR} \Delta$;

$\mathrm{ER_R})$ $x=y, \Gamma \models_{IR} R_{\bar{v},x}^{\bar{u},z}(\Phi), \Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=y, \Gamma \models_{IR} R_{\bar{v},x}^{\bar{u},z}(\Phi), R_{\bar{v},y}^{\bar{u},z}(\Phi), \Delta$.

Властивість Rf індукує достатню умову наявності відношення $\models_{IR}$:

$C_{\mathrm{Rf}})$ $\Gamma \models_{IR} x=x, \Delta$.

Розглянемо тепер властивості для строгої рівності. Маємо

$\mathrm{E_{LR}})$ $\Gamma \models \neg\, x\equiv y, \Delta \Leftrightarrow x\equiv y, \Gamma \models \Delta$ та $\neg\, x\equiv y, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \Gamma \models x\equiv y, \Delta$;

$\mathrm{ER_{LR}})$ $\Gamma \models \neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(x\equiv y), \Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(x\equiv y), \Gamma \models \Delta$ та

$\neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(x\equiv y), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \Gamma \models R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(x\equiv y), \Delta$.

Властивість RD індукує властивості реномінації строгої рівності.

$\mathrm{RDS_L})$ за умови $x, y \notin \{\bar{u}\}$ маємо:

$R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(x\equiv y), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow x\equiv y, \Gamma \models \Delta$;

за умови $y \notin \{\bar{u}\}$ маємо:

$R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(x\equiv y), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow z\equiv y, \Gamma \models \Delta$;

$R_{\bar{v},z,u}^{\bar{u},x,y}(x\equiv y), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow z\equiv u, \Gamma \models \Delta$;

RDS_R) за умови $x, y \notin \{\bar{u}\}$ маємо:

$\Gamma \models R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(x \equiv y), \Delta \Leftrightarrow \Gamma \models x \equiv y, \Delta$;

за умови $y \notin \{\bar{u}\}$ маємо:

$\Gamma \models R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(x \equiv y), \Delta \Leftrightarrow \Gamma \models z \equiv y, \Delta$;

$\Gamma \models R_{\bar{v},z,u}^{\bar{u},x,y}(x \equiv y), \Delta \Leftrightarrow \Gamma \models z \equiv u, \Delta$.

На основі Sm та Tr отримуємо:

SmS) $x \equiv y, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow x \equiv y, y \equiv x, \Gamma \models \Delta$;

TrS) $x = y, y = z, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = y, y = z, x = z, \Gamma \models \Delta$.

Властивість ER індукує такі властивості заміни рівних:

ERS_L) $\Gamma, x \equiv y, R_{\bar{v},x}^{\bar{u},z}(\Phi) \models \Delta \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \Gamma, x \equiv y, R_{\bar{v},x}^{\bar{u},z}(\Phi), R_{\bar{v},y}^{\bar{u},z}(\Phi) \models \Delta$;

ERS_R) $\Gamma, x \equiv y \models R_{\bar{v},x}^{\bar{u},z}(\Phi), \Delta \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \Gamma, x \equiv y \models R_{\bar{v},x}^{\bar{u},z}(\Phi), R_{\bar{v},y}^{\bar{u},z}(\Phi), \Delta$.

Достатню умову наявності кожного з ${}^{R}\models_{TF}$, $\models_{TF}$, $\models_{T}$, $\models_{F}$, $\models_{IR}$ індукує Rf:

C_{RfS}) $\Gamma \models x \equiv x, \Delta$.

6. Секвенційні числення чистих першопорядкових логік

Секвенційні числення формалізують відношення логічного наслідку для множин формул. Будуємо їх у стилі семантичних таблиць. Ми трактуємо секвенції як множини формул, специфікованих (відмічених) спеціальними символами $\vdash$ та $\dashv$. Позначаємо секвенції $\vdash\Gamma\dashv\Delta$, скорочено Σ.

Секвенційні числення будуємо так: секвенція $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ вивідна $\Leftrightarrow \Gamma \models \Delta$.

Формули із Γ (відмічені $\vdash$) назвемо *T*-формулами, а формули із Δ (відмічені $\dashv$) назвемо *F*-формулами. Це відповідає семантичному трактуванню формул із Γ як істинних, а формул із Δ – як хибних.

Формули вигляду $\vdash\exists x\Phi$, $\dashv\neg\exists x\Phi$, $\vdash R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)$, $\dashv\neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)$ назвемо $\exists_T$-формулами, а вигляду $\dashv\exists x\Phi$, $\vdash\neg\exists x\Phi$, $\dashv R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)$, $\vdash\neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)$ – $\exists_F$-формулами.

Прикладами формул $\exists x\Phi$, $\neg\exists x\Phi$, $R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi), \neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)$ назвемо формули вигляду $R_y^x(\Phi), \neg R_y^x(\Phi), R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi), \neg R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi)$.

Введемо для множини специфікованих формул $\Sigma = \vdash\Gamma\dashv\Delta$ множини *означених* предметних імен та *неозначених* предметних імен, або *val*-змінних та *unv*-змінних:

$val(\vdash\Gamma\dashv\Delta) = \{x \in V \mid Ex \in \Gamma\}$;

$unv(\vdash\Gamma\dashv\Delta) = \{x \in V \mid Ex \in \Delta\}$.

Введемо множину *нерозподілених* для Σ імен: $ud(\Sigma) = nm(\Sigma) \setminus (val(\Sigma) \cup unv(\Sigma))$.

Виведення в секвенційних численнях має вигляд дерева, вершинами якого є секвенції. Такі дерева – *секвенційні*.

Секвенція X – *наступник* секвенції Y у секвенційному дереві δ з коренем Σ, якщо в δ існує шлях $\Sigma = \Sigma_1, \ldots, \Sigma_n, \ldots, \Sigma_m, \ldots$ такий, що $X = \Sigma_n$ та $Y = \Sigma_m$.

Секвенція Σ вивідна, або має виведення, якщо існує замкнене секвенційне дерево з коренем Σ – виведення Σ.

Секвенційне дерево замкнене, якщо кожний його лист – замкнена секвенція.

Секвенційне числення задається базовими секвенційними формами і умовами замкненості секвенції. Замкнені секвенції є аксіомами секвенційного числення.

Правилами виведення секвенційних числень є секвенційні форми. Вони індукуються властивостями відношень логічного наслідку. Секвенційні форми записуємо у вигляді $\dfrac{\Sigma}{\Omega}$ або $\dfrac{\Sigma \quad \Lambda}{\Omega}$. Секвенції над рискою – засновки (зіставлені правим частинам відповідних властивостей відношень логічного наслідку $\models$), під рискою – висновки (зіставлені їх лівим частинам).

Умови замкненості секвенції $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ із множиною *unv*-змінних *Un* обґрунтовує теорема 8. Замкненість $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ означає $\Gamma \models \Delta$.

Базова умова замкненості індукована властивістю *C*.

C) існують формули Ψ та Ξ такі: $\Psi \sim_{Un} \Xi$, $\Psi \in \Gamma$ та $\Xi \in \Delta$;

зокрема, існує Φ: $\Phi \in \Gamma$ та $\Phi \in \Delta$.

Властивості *CL*, *CR*, *CLR* індукують додаткові умови CL, CR, CLR замкненості секвенції $\vdash\Gamma\dashv\Delta$.

CL) існують формули Ψ та Ξ такі: $\Psi \sim_{Un} \Xi$, $\Psi \in \Gamma$ та $\neg\Xi \in \Gamma$;

зокрема, існує Φ: $\Phi \in \Gamma$ та $\neg\Phi \in \Gamma$;

CR) існують формули Ψ та Ξ такі: $\Psi \sim_{Un} \Xi$, $\Psi \in \Delta$ та $\neg\Xi \in \Delta$;

зокрема, існує Φ: $\Phi \in \Delta$ та $\neg\Phi \in \Delta$;

CLR) існують формули Ψ, Ξ, φ, ξ: $\Psi \sim_{Un} \Xi$, $\varphi \sim_{Un} \xi$, $\Psi, \neg\Xi \in \Gamma$ та $\varphi, \neg\xi \in \Delta$;

зокрема, існують формули Φ та ϑ: $\Phi, \neg\Phi \in \Gamma$ та $\vartheta, \neg\vartheta \in \Delta$.

Зрозуміло, що CLR $\Leftrightarrow$ CL та CR.

У випадку числень для $\models_{IR}$ умови CL, CR, CLR зводяться до C.

Опишемо різновиди секвенційних числень чистих першопорядкових КНЛ.

Розглянемо числення рівня ЧКНЛ.

Числення QG формалізує ${}^{R}\models_{TF}$. Умова замкненості секвенції: C.

Числення QLR формалізує $\models_{TF}$. Умова замкненості секвенції: $\mathrm{C} \vee \mathrm{CLR}$.

Числення QL формалізує $\models_{T}$. Умова замкненості секвенції: $\mathrm{C} \vee \mathrm{CL}$.

Числення QR формалізує $\models_{F}$. Умова замкненості секвенції: $\mathrm{C} \vee \mathrm{CR}$.

Числення QC формалізує $\models_{IR}$. Умова замкненості секвенції: C.

На рівні ЧКНЛР маємо лише відношення $\models_{IR}$, його формалізує числення QC_E. Умова замкненості секвенції така: $\mathrm{C} \vee \mathrm{CRf}$. Умова CRf індукована властивістю C_{Rf}:

CRf) секвенція ${}_{\vdash}\Gamma{}_{\dashv}\Delta$ замкнена, якщо $x = x \in \Delta$ для деякого $x \in V$.

Для числень рівня ЧКНЛРС маємо додаткову умову CRfS замкненості секвенції, індуковану властивістю C_{RfS}:

CRfS) секвенція ${}_{\vdash}\Gamma{}_{\dashv}\Delta$ замкнена, якщо $x \equiv x \in \Delta$ для деякого $x \in V$.

Для ЧКНЛРС маємо такі числення.

Числення $Q_E G$ формалізує ${}^{R}\models_{TF}$. Умова замкненості секвенції: $\mathrm{C} \vee \mathrm{CRfS}$.

$Q_E LR$ формалізує $\models_{TF}$. Умова замкненості секвенції: $\mathrm{C} \vee \mathrm{CLR} \vee \mathrm{CRfS}$.

$Q_E L$ формалізує $\models_{T}$. Умова замкненості секвенції: $\mathrm{C} \vee \mathrm{CL} \vee \mathrm{CRfS}$.

$Q_E R$ формалізує $\models_{F}$. Умова замкненості секвенції: $\mathrm{C} \vee \mathrm{CR} \vee \mathrm{CRfS}$.

$Q_E C$ формалізує $\models_{IR}$. Умова замкненості секвенції: $\mathrm{C} \vee \mathrm{CRfS}$.

Числення $Q_E G$, $Q_E LR$, $Q_E L$, $Q_E R$ мають однакові базові секвенційні форми.

Форми спрощення формул:

$${}_{\vdash}\mathrm{R}\ \frac{{}_{\vdash}\Phi, \Sigma}{{}_{\vdash}R(\Phi), \Sigma}; \qquad {}_{\dashv}\mathrm{R}\ \frac{{}_{\dashv}\Phi, \Sigma}{{}_{\dashv}R(\Phi), \Sigma};$$

$${}_{\vdash}\neg\mathrm{R}\ \frac{{}_{\vdash}\neg\Phi, \Sigma}{{}_{\vdash}\neg R(\Phi), \Sigma}; \qquad {}_{\dashv}\neg\mathrm{R}\ \frac{{}_{\dashv}\neg\Phi, \Sigma}{{}_{\dashv}\neg R(\Phi), \Sigma};$$

$${}_{\vdash}\mathrm{RI}\ \frac{{}_{\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi), \Sigma}{{}_{\vdash}R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi), \Sigma}; \qquad {}_{\dashv}\mathrm{RI}\ \frac{{}_{\dashv}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi), \Sigma}{{}_{\dashv}R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi), \Sigma};$$

$${}_{\vdash}\neg\mathrm{RI}\ \frac{{}_{\vdash}\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi), \Sigma}{{}_{\vdash}\neg R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi), \Sigma}; \qquad {}_{\dashv}\neg\mathrm{RI}\ \frac{{}_{\dashv}\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi), \Sigma}{{}_{\dashv}\neg R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi), \Sigma};$$

$${}_{\vdash}\mathrm{RU}\ \frac{{}_{\vdash}R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(\Phi), \Sigma}{{}_{\vdash}R_{z,\bar{u}}^{y,\bar{v}}(\Phi), \Sigma}; \qquad {}_{\dashv}\mathrm{RU}\ \frac{{}_{\dashv}R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(\Phi), \Sigma}{{}_{\dashv}R_{z,\bar{u}}^{y,\bar{v}}(\Phi), \Sigma};$$

$${}_{\vdash}\neg\mathrm{RU}\ \frac{{}_{\vdash}\neg R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(\Phi), \Sigma}{{}_{\vdash}\neg R_{z,\bar{u}}^{y,\bar{v}}(\Phi), \Sigma}; \qquad {}_{\dashv}\neg\mathrm{RU}\ \frac{{}_{\dashv}\neg R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(\Phi), \Sigma}{{}_{\dashv}\neg R_{z,\bar{u}}^{y,\bar{v}}(\Phi), \Sigma}.$$

Для форм типу RU умова: $y \in \nu(\Phi)$.

Форми еквівалентних перетворень:

$${}_{\vdash}\mathrm{RR}\ \frac{{}_{\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_{\bar{y}}^{\bar{w}} (\Phi), \Sigma}{{}_{\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)), \Sigma}; \qquad {}_{\dashv}\mathrm{RR}\ \frac{{}_{\dashv}R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_{\bar{y}}^{\bar{w}} (\Phi), \Sigma}{{}_{\dashv}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)), \Sigma};$$

$${}_{\vdash}\neg\mathrm{RR}\ \frac{{}_{\vdash}\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_{\bar{y}}^{\bar{w}} (\Phi), \Sigma}{{}_{\vdash}\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)), \Sigma};$$

$${}_{\dashv}\neg\mathrm{RR}\ \frac{{}_{\dashv}\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_{\bar{y}}^{\bar{w}} (\Phi), \Sigma}{{}_{\dashv}\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)), \Sigma};$$

$${}_{\vdash}\mathrm{R}\neg\ \frac{{}_{\vdash}\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi), \Sigma}{{}_{\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi), \Sigma}; \qquad {}_{\dashv}\mathrm{R}\neg\ \frac{{}_{\dashv}\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi), \Sigma}{{}_{\dashv}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi), \Sigma};$$

$${}_{\vdash}\neg\mathrm{R}\neg\ \frac{{}_{\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi), \Sigma}{{}_{\vdash}\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi), \Sigma}; \qquad {}_{\dashv}\neg\mathrm{R}\neg\ \frac{{}_{\dashv}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi), \Sigma}{{}_{\dashv}\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi), \Sigma};$$

$${}_{\vdash}\mathrm{R}\vee\ \frac{{}_{\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi), \Sigma}{{}_{\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi), \Sigma};$$

$$\dashv\mathrm{R}\vee\ \frac{\dashv R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi),\Sigma}{\dashv R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi\vee\Psi),\Sigma};$$

$$\vdash\neg\mathrm{R}\vee\ \frac{\vdash\neg(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi)),\Sigma}{\vdash\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi\vee\Psi),\Sigma};$$

$$\dashv\neg\mathrm{R}\vee\ \frac{\dashv\neg(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi)),\Sigma}{\dashv\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi\vee\Psi),\Sigma}.$$

Форми декомпозиції формул:

$$\vdash\neg\neg\ \frac{\vdash\Phi,\Sigma}{\vdash\neg\neg\Phi,\Sigma};\qquad \dashv\neg\neg\ \frac{\dashv\Phi,\Sigma}{\dashv\neg\neg\Phi,\Sigma};$$

$$\vdash\vee\ \frac{\vdash\Phi,\Sigma\quad \vdash\Psi,\Sigma}{\vdash\Phi\vee\Psi,\Sigma};\qquad \dashv\vee\ \frac{\dashv\Phi,\ \dashv\Psi,\Sigma}{\dashv\Phi\vee\Psi,\Sigma};$$

$$\vdash\neg\vee\ \frac{\vdash\neg\Phi,\ \vdash\neg\Psi,\Sigma}{\vdash\neg(\Phi\vee\Psi),\Sigma};\ \dashv\neg\vee\ \frac{\dashv\neg\Phi,\Sigma\quad \dashv\neg\Psi,\Sigma}{\dashv\neg(\Phi\vee\Psi),\Sigma}.$$

Форми елімінації кванторів:

$$\vdash\exists\ \frac{\vdash R_{z}^{x}(\Phi),\ \vdash Ez,\Sigma}{\vdash\exists x\Phi,\Sigma};$$

$$\dashv\neg\exists\ \frac{\dashv\neg R_{z}^{x}(\Phi),\ \vdash Ez,\Sigma}{\dashv\neg\exists x\Phi,\Sigma};$$

$$\vdash\exists\mathrm{R}\ \frac{\vdash R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(\Phi),\ \vdash Ez,\Sigma}{\vdash R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi),\Sigma};$$

$$\dashv\neg\exists\mathrm{R}\ \frac{\dashv\neg R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(\Phi),\ \vdash Ez,\Sigma}{\dashv\neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi),\Sigma};$$

$$\vdash\neg\exists\mathrm{v}\ \frac{\vdash\neg\exists x\Phi,\ \vdash Ey,\ \vdash R_{y}^{x}(\Phi),\Sigma}{\vdash\neg\exists x\Phi,\ \vdash Ey,\Sigma};$$

$$\dashv\exists\mathrm{v}\ \frac{\dashv\exists x\Phi,\ \vdash Ey,\ \dashv R_{y}^{x}(\Phi),\Sigma}{\dashv\exists x\Phi,\ \vdash Ey,\Sigma};$$

$$\vdash\neg\exists\mathrm{Rv}\ \frac{\vdash\neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi),\ \vdash\neg R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi),\ \vdash Ey,\Sigma}{\vdash\neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi),\ \vdash Ey,\Sigma};$$

$$\dashv\exists\mathrm{Rv}\ \frac{\dashv R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi),\ \dashv R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi),\ \vdash Ey,\Sigma}{\dashv R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi),\ \vdash Ey,\Sigma}.$$

Для $\vdash\exists$, $\dashv\neg\exists$ умова: $z\in fu(\Sigma,\exists x\Phi)$; для $\vdash\exists$R, $\dashv\neg\exists$R умова: $z\in fu(\Sigma, R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi))$.

Форми $\vdash\exists$R, $\dashv\neg\exists$R, $\vdash\exists$, $\dashv\neg\exists$ назвемо $\exists_{\mathrm{T}}$-формами. $\dashv\exists$v, $\vdash\neg\exists$v, $\dashv\exists$Rv, $\vdash\neg\exists$Rv – це форми типу $\exists$v, назвемо їх $\exists_{\mathrm{F}}$-формами; для цих форм Ey не входить до Σ.

Форми E-розподілу Ed та первісного означення Ev:

$$\mathrm{Ed}\ \frac{\vdash Ex,\Sigma\quad \dashv Ex,\Sigma}{\Sigma};$$

$$\mathrm{Ev}\ \frac{\vdash Ez,\Sigma}{\Sigma}\ \text{за умови } z\in fu(\Sigma).$$

Базові форми для строгої рівності:

$$\vdash\neg\mathrm{ES}\ \frac{\dashv x\equiv y,\Sigma}{\vdash\neg x\equiv y,\Sigma};\qquad \dashv\neg\mathrm{ES}\ \frac{\vdash x\equiv y,\Sigma}{\dashv\neg x\equiv y,\Sigma};$$

$$\mathrm{ESmS}\ \frac{\vdash x\equiv y,\ \vdash y\equiv x,\Sigma}{\vdash x\equiv y,\Sigma};$$

$$\mathrm{ETrS}\ \frac{\vdash x\equiv y,\ \vdash y\equiv z,\ \vdash x\equiv z,\Sigma}{\vdash x\equiv y,\ \vdash y\equiv z,\Sigma};$$

$$\vdash\mathrm{RDS}\ \frac{\vdash z\equiv u,\Sigma}{\vdash R_{\bar{v},z,u}^{\bar{u},x,y}(x\equiv y),\Sigma};$$

$$\frac{\vdash z\equiv y,\Sigma}{\vdash R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(x\equiv y),\Sigma},\ \text{де } y\notin\{\bar{u}\};$$

$$\frac{\vdash x\equiv y,\Sigma}{\vdash R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(x\equiv y),\Sigma},\ \text{де } x,y\notin\{\bar{u}\};$$

$$\dashv\mathrm{RDS}\ \frac{\dashv z\equiv u,\Sigma}{\dashv R_{\bar{v},z,u}^{\bar{u},x,y}(x\equiv y),\Sigma};$$

$$\frac{\dashv z\equiv y,\Sigma}{\dashv R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(x\equiv y),\Sigma},\ \text{де } y\notin\{\bar{u}\};$$

$$\frac{\dashv x\equiv y,\Sigma}{\dashv R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(x\equiv y),\Sigma},\ \text{де } x,y\notin\{\bar{u}\};$$

$$\vdash\neg\mathrm{RDS}\ \frac{\vdash\neg z\equiv u,\Sigma}{\vdash\neg R_{\bar{v},z,u}^{\bar{u},x,y}(x\equiv y),\Sigma};$$

$$\frac{\vdash\neg z\equiv y,\Sigma}{\vdash\neg R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(x\equiv y),\Sigma},\ \text{де } y\notin\{\bar{u}\};$$

$$\frac{\vdash \neg x \equiv y, \Sigma}{\vdash \neg R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(x \equiv y), \Sigma}, \text{ де } x, y \notin \{\bar{u}\};$$

$$\dashv\neg\text{RDS } \frac{\dashv \neg z \equiv u, \Sigma}{\dashv \neg R^{\bar{u},x,y}_{\bar{v},z,u}(x \equiv y), \Sigma};$$

$$\frac{\dashv \neg z \equiv y, \Sigma}{\dashv \neg R^{\bar{u},x}_{\bar{v},z}(x \equiv y), \Sigma}, \text{ де } y \notin \{\bar{u}\};$$

$$\frac{\dashv \neg x \equiv y, \Sigma}{\dashv \neg R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(x \equiv y), \Sigma}, \text{ де } x, y \notin \{\bar{u}\};$$

$$\vdash\text{ERS } \frac{\vdash x \equiv y, \vdash R^{\bar{u},z}_{\bar{v},x}(p), \vdash R^{\bar{u},z}_{\bar{v},y}(p), \Sigma}{\vdash x \equiv y, \vdash R^{\bar{u},z}_{\bar{v},x}(p), \Sigma};$$

$$\dashv\text{ERS } \frac{\vdash x \equiv y, \dashv R^{\bar{u},z}_{\bar{v},x}(p), \dashv R^{\bar{u},z}_{\bar{v},y}(p), \Sigma}{\vdash x \equiv y, \dashv R^{\bar{u},z}_{\bar{v},x}(p), \Sigma};$$

$$\vdash\neg\text{ERS } \frac{\vdash x \equiv y, \vdash \neg R^{\bar{u},z}_{\bar{v},x}(p), \vdash \neg R^{\bar{u},z}_{\bar{v},y}(p), \Sigma}{\vdash x \equiv y, \vdash \neg R^{\bar{u},z}_{\bar{v},x}(p), \Sigma};$$

$$\dashv\neg\text{ERS } \frac{\vdash x \equiv y, \dashv \neg R^{\bar{u},z}_{\bar{v},x}(p), \dashv \neg R^{\bar{u},z}_{\bar{v},y}(p), \Sigma}{\vdash x \equiv y, \dashv \neg R^{\bar{u},z}_{\bar{v},x}(p), \Sigma}.$$

Для форм типу ERS умова: $p \in Ps$.

Маємо різновиди базових форм: допоміжні (типів R, RI, RU, R∃R, RDS); форми E-розподілу та первісного означення (Ed та Ev); спеціальні форми рівності (ESmS, ETrS та форми типів ERS); основні – це всі інші базові секвенційні форми.

В численнях Q_EC форми для зовнішнього заперечення зайві, базовими секвенційні форми – це $\vdash$R, $\dashv$R, $\vdash$RI, $\dashv$RI, $\vdash$RU, $\dashv$RU, $\vdash$R∃R, $\dashv$R∃R, $\vdash$RR, $\dashv$RR, $\vdash$R¬, $\dashv$R¬, $\vdash$R∨, $\dashv$R∨, $\vdash$∨, $\dashv$∨, $\vdash$∃, $\vdash$∃R, $\dashv$∃v, $\dashv$∃Rv, до яких додаємо форми для рівності ESmS, ETrS, $\vdash$RDS, $\dashv$RDS, $\vdash$ERS, $\dashv$ERS та форми:

$$\vdash\neg \frac{\dashv \Phi, \Sigma}{\vdash \neg \Phi, \Sigma}; \qquad \dashv\neg \frac{\vdash \Phi, \Sigma}{\dashv \neg \Phi, \Sigma}.$$

В численнях QC_E базовими секвенційними формами є $\vdash$R, $\dashv$R, $\vdash$RI, $\dashv$RI, $\vdash$RU, $\dashv$RU, $\vdash$R∃R, $\dashv$R∃R, $\vdash$RR, $\dashv$RR, $\vdash$R¬, $\dashv$R¬, $\vdash$R∨, $\dashv$R∨, $\vdash$¬, $\dashv$¬, $\vdash$∨, $\dashv$∨, $\vdash$∃, $\vdash$∃R, $\dashv$∃v, $\dashv$∃Rv, до яких додаємо:

$$\text{ESm } \frac{\vdash x = y, \vdash y = x, \Sigma}{\vdash x = y, \Sigma};$$

$$\text{ETr } \frac{\vdash x = y, \vdash y = z, \vdash x = z, \Sigma}{\vdash x = y, \vdash y = z, \Sigma};$$

$$\vdash\text{RD } \frac{\vdash z = u, \Sigma}{\vdash R^{\bar{u},x,y}_{\bar{v},z,u}(x = y), \Sigma};$$

$$\frac{\vdash z = y, \Sigma}{\vdash R^{\bar{u},x}_{\bar{v},z}(x = y), \Sigma}, \text{ де } y \notin \{\bar{u}\};$$

$$\frac{\vdash x = y, \Sigma}{\vdash R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(x = y), \Sigma}, \text{ де } x, y \notin \{\bar{u}\};$$

$$\dashv\text{RD } \frac{\dashv z = u, \Sigma}{\dashv R^{\bar{u},x,y}_{\bar{v},z,u}(x = y), \Sigma};$$

$$\frac{\dashv z = y, \Sigma}{\dashv R^{\bar{u},x}_{\bar{v},z}(x = y), \Sigma}, \text{ де } y \notin \{\bar{u}\};$$

$$\frac{\dashv x = y, \Sigma}{\dashv R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(x = y), \Sigma}, \text{ де } x, y \notin \{\bar{u}\};$$

$$\vdash\text{ER } \frac{\vdash x = y, \vdash R^{\bar{u},z}_{\bar{v},x}(p), \vdash R^{\bar{u},z}_{\bar{v},y}(p), \Sigma}{\vdash x = y, \vdash R^{\bar{u},z}_{\bar{v},x}(p), \Sigma}, p \in Ps;$$

$$\dashv\text{ER } \frac{\vdash x = y, \dashv R^{\bar{u},z}_{\bar{v},x}(p), \dashv R^{\bar{u},z}_{\bar{v},y}(p), \Sigma}{\vdash x = y, \dashv R^{\bar{u},z}_{\bar{v},x}(p), \Sigma}, p \in Ps.$$

Базові секвенційні форми числень *QG*, *QLR*, *QL*, *QR* однакові, це наведені вище форми числень Q_EG, Q_ELR, Q_EL, Q_ER з вилученими формами для рівності.

Базові секвенційні форми числення *QC* – це форми числень Q_EC та Q_EC з вилученими формами для рівності.

Властивості відношень логічного наслідку для множин формул індукують основну властивість секвенційних форм (|= – одне з $^{R}|=_{TF}$, $|=_{TF}$, $|=_{T}$, $|=_{F}$, $|=_{IR}$).

Теорема 9.

1. Нехай $\frac{\vdash \Lambda \dashv \mathrm{K}}{\vdash \Gamma \dashv \Delta}$ – базова секвенційна форма. Тоді:

a) $\Lambda \models \mathrm{K} \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta$; b) $\Gamma \not\models \Delta \Leftrightarrow \Lambda \not\models \mathrm{K}$.

2. Нехай $\dfrac{{}_{\vdash}\Lambda_{\dashv}\mathrm{K} \quad {}_{\vdash}\mathrm{X}_{\dashv}\mathrm{Z}}{{}_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta}$ – базова секвенційна форма. Тоді:

a) $\Lambda \models \mathrm{K}$ та $\mathrm{X} \models \mathrm{Z} \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta$;

b) $\Gamma \not\models \Delta \Leftrightarrow \Lambda \not\models \mathrm{K}$ або $\mathrm{X} \not\models \mathrm{Z}$.

7. Побудова секвенційного дерева

Опишемо побудову виведення для заданої скінченної секвенції Σ.

При побудові секвенційні форми застосовуються від висновку до засновків, тобто ми спрощуємо виділену формулу чи розкладаємо її на компоненти.

Секвенції – це *множини* специфікованих формул, тому повтори формул у секвенціях неможливі: якщо в результаті виконання форми отримуємо специфіковану формулу, яка вже є в секвенції, цю формулу-копію до секвенції не заносимо.

Специфіковані формули вигляду ${}_{\vdash}Ex$ та ${}_{\dashv}Ex$ індукуються формами елімінації кванторів, а також формами E-розподілу та первісного означення, тому вони відсутні в початковій секвенції-корені Σ.

Побудова секвенційного дерева розбита на етапи. Вона починається з кореня дерева. Опишемо етап виведення для певної незамкненої листа-секвенції η.

Нехай Ξ – множина формул секвенцій на шляху від кореня Σ до даної η. Якщо $val(\Xi) = \varnothing$, η не має $\exists_T$-формул та має $\exists_F$-формули, то виконуємо первісне означення: збагачуємо секвенцію η формулою ${}_{\vdash}Ez$ такою, що $z \in fu(\Xi)$, тобто ми переходимо до секвенції $\eta, {}_{\vdash}Ez$. Це дає непорожність множини означених імен для кожної вершини-секвенції, яка є наступником η, що надалі гарантує застосовність $\exists_F$-форм.

Далі добудовуємо скінченне піддерево з вершиною η. Активізуємо (окрім примітивних) формули секвенції η. До кожної активної формули далі застосовуємо відповідну форму. В процесі застосування основних форм кожен раз при появі відповідної ситуації виконуємо спрощення, застосовуючи належні допоміжні форми типів R, RI, RU, R∃R. Після застосування основної форми і виконання спрощень утворені нею формули на даному етапі *пасивні*, до цих формул на цьому етапі основні секвенційні форми не застосовуються.

Застосування форм рівності в численнях ЧКНЛР і ЧКНЛРС має особливості.

Форми типу RDS (RD для QC_E) допоміжні. Форми ESmS (ESm для QC_E) виконуємо кожен раз при появі *нової* для секвенції формули вигляду ${}_{\vdash}x \equiv y$ (чи ${}_{\vdash}x = y$).

Форми ETrS (ETr для QC_E) виконуємо кожен раз при появі пари формул вигляду ${}_{\vdash}x \equiv y$ та ${}_{\vdash}y \equiv z$ (вигляду ${}_{\vdash}x = y$ та ${}_{\vdash}y = z$), принаймні одна з яких *нова* для секвенції.

Форми типу ER виконуємо кожен раз при появі пари формул, одна з яких – ${}_{\vdash}x = y$, а друга – вигляду ${}_{\vdash}R_{\bar{v},x}^{\bar{u},z}(p)$ чи ${}_{\dashv}R_{\bar{v},x}^{\bar{u},z}(p)$, причому принаймні одна з них *нова* для секвенції. Форми типу ERS виконуємо кожен раз при появі пари формул, одна з яких ${}_{\vdash}x \equiv y$, а друга – вигляду ${}_{\vdash}R_{\bar{v},x}^{\bar{u},z}(p)$, ${}_{\dashv}R_{\bar{v},x}^{\bar{u},z}(p)$, ${}_{\vdash}\neg R_{\bar{v},x}^{\bar{u},z}(p)$, ${}_{\dashv}\neg R_{\bar{v},x}^{\bar{u},z}(p)$, причому принаймні одна з них *нова* для секвенції.

Застосування на етапі основних секвенційних форм проводимо так.

Спочатку виконуємо 1-засновкові форми, окрім $\exists_F$-форм. При кожному застосуванні $\exists_T$ беремо *нове* $z \in V_T$, яке відсутнє на шляху від кореня до секвенції, в якій виконуємо цю $\exists_T$-форму. При цьому усі застосування $\exists_T$-форми до одної і тої ж $\exists_T$-формули в секвенціях-наступниках η використовують одне і те ж нове $z \in V_T$. Множину усіх нових $z \in V_T$, використаних при застосуванні $\exists_T$-форм до $\exists_T$-формул секвенції η, позначимо vt_η.

Нехай в η є l активних формул, до яких треба застосувати 2-засновкову форму ${}_{\vdash}\vee$ чи ${}_{\dashv}\neg\vee$. Застосування ${}_{\vdash}\vee$ чи ${}_{\dashv}\neg\vee$ веде до побудови для η піддерева, що має $n = 2^l$ листів-наступників η. Застосування кожної з форм, окрім $\exists_F$-форм, до активних формул секвенції η *не залежить* від результатів застосування кожної з інших цих форм. Отже, із η при застосуванні таких форм отримуємо *одну і ту ж* множину листів-наступників $\{\eta_1,\ldots,\eta_n\}$ незалежно від порядку виконання цих форм.

Якщо секвенція η має активні $\exists_F$-

формули (це якраз активні $\exists_F$-формули кожної з секвенцій $\eta_1,\ldots,\eta_n$), то до них треба застосувати відповідні $\exists_F$-форми.

Нехай $\Theta,\Theta_1,\ldots,\Theta_n$ – множини формул секвенцій на шляхах від Σ до $\eta,\eta_1,\ldots,\eta_n$. Тоді $nm(\Theta_k) = nm(\Theta)\cup vt_\eta$, $val(\Theta_k) = val(\Theta)$ та $ud(\Theta_k) = ud(\Theta)$ для кожної Θ_k. Позначимо $ud(\Theta)$ як ud_η. Якщо $ud_\eta \neq \varnothing$, то в $\eta_1,\ldots,\eta_n$ маємо *нерозподілені* імена. Тому перед застосуванням $\exists_F$-форм в кожній η_k спочатку робимо, використовуючи Ed-форму, всеможливі розподіли імен із ud_η на означені та неозначені. Це веде до побудови піддерев висоти $h = |ud_\eta|$ з вершинами η_k, що дає $m = 2^h$ наступників кожної η_k – це секвенції $\eta_{11},\ldots,\eta_{1m},\ldots,\eta_{n1},\ldots,\eta_{nm}$ з множинами $vd_j \subseteq ud_\eta$ нових означених імен в секвенціях $\eta_{1j},\ldots,\eta_{nj}$. Кожна з секвенцій η_{kj} має ті ж активні $\exists_F$-формули, що й секвенція η. До цих $\exists_F$-формул застосовуємо відповідні $\exists_F$-форми, кожна така форма в η_{kj} виконується багатократно для кожного $y\in vd_j \cup val(\Theta)$. В результаті маємо секвенції $\xi_{11},\ldots,\xi_{1m}$, …, $\xi_{n1},\ldots,\xi_{nm}$. Незалежно від порядку виконання цих $\exists_F$-форм із кожної секвенції η_{kj} буде отримана *одна і та ж* секвенція ξ_{kj}.

Таким чином, за умови, що виконання $\exists_T$-форм передує виконанню $\exists_F$-форм, результатом виконання етапу для секвенції η є *одна і та ж* множина секвенцій-наступників $\{\xi_{11},\ldots,\xi_{1m},\ldots,\xi_{n1},\ldots,\xi_{nm}\}$ *незалежно від порядку виконання* цих форм. У цьому розумінні побудова секвенційного дерева *однозначна*.

Для того, щоб отримана на етапі множина секвенцій-наступників даної секвенції визначалась однозначно, істотним є лише порядок виконання $\exists_T$-форм та $\exists_F$-форм. Стосовно отримання замкненого секвенційного дерева чи отримання незамкненого шляху, то цей порядок неістотний. Справді, нехай на етапі *після* виконання деяких $\exists_F$-форм виконуємо $\exists_T$-форму, яка вводить нове $z\in V_T$. Тоді продуковані цими $\exists_F$-формами приклади із таким z обов'язково з'являться на наступному етапі.

Після виконання усіх форм на етапі перевіряємо кожну секвенцію-лист Ω на замкненість. Якщо Ω незамкнена, то перевіряємо, чи буде Ω фінальною секвенцією.

Незамкнена вершина-секвенція Ω виведення секвенції Σ – *фінальна*, якщо до неї вже незастосовна жодна секвенційна форма, або якщо кожне застосування секвенційної форми до Ω не вводить *нових* формул, відмінних від формул секвенцій на шляху від Σ до Ω. Поява фінальної секвенції означає ситуацію повторення незамкненої секвенції на даному шляху. Це сигналізує про наявність в дереві шляху (від кореня до даної фінальної секвенції), всі вершини якого незамкнені – *незамкненого* шляху. Його поява засвідчує, що побудова виведення завершена *негативно*.

Якщо всі листи будованого дерева замкнені, то отримано замкнене секвенційне дерево, побудова завершена *позитивно*.

Якщо побудова не завершується, маємо нескінченне дерево. За лемою Кеніга нескінченне дерево зі скінченним розгалуженням має хоча б один нескінченний шлях. Всі його вершини – незамкнені секвенції, такий шлях *незамкнений*.

Подібним чином проводимо поетапну побудову виведення для *зліченної* секвенції. Особливістю побудови є те, що кожне застосування секвенційної форми проводимо до скінченної множини *доступних* на даний момент формул (див., напр., [2, 9]). На початку побудови доступна лише пара перших формул списків *T*-формул та *F*-формул секвенції Σ (єдина *T*-формула чи *F*-формула, якщо один зі списків порожній). На початку кожного етапу в усіх незамкнених секвенціях виконуємо крок доступу: до списку доступних формул секвенції додаємо по одній формулі з її списків *T*-формул та *F*-формул. Далі діємо так, як описано вище. При побудові дерева для зліченної секвенції втрачає сенс поняття фінальної секвенції та можливі лише два варіанти: побудова завершена позитивно із отриманням скінченного замкненого дерева, або побудова не завершується, тоді маємо нескінченне незамкнене дерево, в якому існує незамкнений шлях. Кожна з формул початкової секвенції зустрінеться на цьому шляху і стане доступною.

Для кожного з побудованих секвенційних числень чистих першопорядкових КНЛ, що формалізує відповідне відношення логічного наслідку, справджується

Теорема 10 (коректності). Нехай секвенція $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ вивідна. Тоді $\Gamma \models \Delta$.

Якщо $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ вивідна, то для неї побудоване замкнене секвенційне дерево. Для кожної його вершини $_{\vdash}\Lambda_{\dashv}\mathrm{K}$ маємо $\Lambda \models \mathrm{K}$. Для листів дерева це випливає з визначення замкненої секвенції. Збереження секвенційними формами відношення логічного наслідку (від засновків до висновку) випливає з теореми 8. Тому для кореня дерева – секвенції $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ – теж маємо $\Gamma \models \Delta$.

8. Теореми про контрмоделі. Теореми повноти

Доведення повноти секвенційних числень опирається на теореми про існування контрмоделей для незамкненого шляху в секвенційному дереві, для цього використовуємо метод модельних множин. Розглянемо тут теореми про контрмоделі для числень ЧКНЛРС та ЧКНЛР. Доведення цих теорем подібне до доведення в [9] відповідних теорем для числень ЧКНЛ.

Теорема про контрмоделі для $Q_E G$.

Теорема 11. Нехай $\wp$ – незамкнений шлях у секвенційному дереві, збудованому для секвенції $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$, нехай H – множина всіх специфікованих формул секвенцій цього шляху. Тоді існують інтерпретації $A = (A, I_1)$, $B = (A, I_2)$ та $\delta, \eta \in {}^{V}\!A$ такі:

H$_T$) $_{\vdash}\Phi \in H \Rightarrow \delta \in T(\Phi_A)$, $_{\dashv}\Phi \in H \Rightarrow \delta \notin T(\Phi_A)$;

H$_F$) $_{\vdash}\Phi \in H \Rightarrow \eta \notin F(\Phi_B)$, $_{\dashv}\Phi \in H \Rightarrow \eta \in F(\Phi_B)$.

Пари (A, δ) і (B, η) назвемо T-контрмоделлю і F-контрмоделлю для $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$.

Доведення. Застосування секвенційних форм до секвенцій шляху $\wp$ відбувається до тих пір, поки це можливо, тому кожна непримітивна формула чи її заперечення, що зустрічається на шляху $\wp$, рано чи пізно буде розкладена чи спрощена.

Усі секвенції шляху $\wp$ незамкнені, тому для них не виконується умова замкненості $\mathrm{C} \vee \mathrm{CRfS}$. Отже, для множини H виконуються такі умови коректності:

HC) не існують Φ, Ψ такі: $\Phi \sim_{Un} \Psi$, $_{\vdash}\Phi \in H$ та $_{\dashv}\Psi \in H$;

HCRfS) не існує $x \in V$: $_{\vdash}x \equiv x \in H$.

Переходи від нижчої вершини шляху $\wp$ до вищої відбуваються згідно з певною секвенційною формою, тому для H виконуються відповідні умови переходу. Для секвенційних форм числень ЧКНЛ такі умови наведено в [9] (позначення для деяких – відмінні від наведених тут). Наведемо для прикладу умови H¬R, HR∃R, H∃, H¬∃R та пов'язані з предикатами рівності умови HES, HESmS, H¬RDS, HERS.

H¬R) $_{\vdash}\neg R(\Phi) \in H \Rightarrow {}_{\vdash}\neg\Phi \in H$;

$_{\dashv}\neg R(\Phi) \in H \Rightarrow {}_{\dashv}\neg\Phi \in H$;

HR∃R) $_{\vdash}R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\exists x\Phi) \in H \Rightarrow {}_{\vdash}R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi) \in H$;

$_{\dashv}R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\exists x\Phi) \in H \Rightarrow {}_{\dashv}R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi) \in H$;

H∃) $_{\vdash}\exists x\Phi \in H \Rightarrow$ існує $y \in W$: $_{\vdash}R_{y}^{x}(\Phi) \in H$;

$_{\dashv}\exists x\Phi \in H \Rightarrow {}_{\dashv}R_{y}^{x}(\Phi) \in H$ для всіх $y \in W$;

H¬∃R) $_{\vdash}\neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi) \in H \Rightarrow {}_{\vdash}\neg R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi) \in H$ для всіх $y \in W$;

$_{\dashv}\neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi) \in H \Rightarrow$ існує $y \in W$: $_{\dashv}\neg R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi) \in H$;

HES) $_{\vdash}\neg x \equiv y \in H \Rightarrow {}_{\dashv}x \equiv y \in H$;

$_{\dashv}\neg x \equiv y \in H \Rightarrow {}_{\vdash}x \equiv y \in H$;

HESmS) $_{\vdash}x \equiv y \in H \Rightarrow {}_{\vdash}y \equiv x \in H$;

HETrS) $_{\vdash}x \equiv y \in H$ та $_{\vdash}y \equiv z \in H \Rightarrow {}_{\vdash}x \equiv z \in H$;

H¬RDS) $_{\vdash}\neg R_{\bar{v},z,u}^{\bar{u},x,y}(x \equiv y) \in H \Rightarrow {}_{\vdash}\neg z \equiv u \in H$;

$_{\dashv}\neg R_{\bar{v},z,u}^{\bar{u},x,y}(x \equiv y) \in H \Rightarrow {}_{\dashv}\neg z \equiv u \in H$;

$_{\vdash}\neg R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(x \equiv y)$, де $y \notin \{\bar{u}\} \Rightarrow {}_{\vdash}\neg z \equiv y \in H$;

$_{\dashv}R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(x \equiv y)$, де $y \notin \{\bar{u}\} \Rightarrow {}_{\dashv}z \equiv y \in H$;

$_{\vdash}\neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(x \equiv y)$, де $x, y \notin \{\bar{u}\} \Rightarrow {}_{\vdash}\neg x \equiv y \in H$;

$_{\dashv}\neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(x \equiv y)$, де $x, y \notin \{\bar{u}\} \Rightarrow {}_{\dashv}\neg x \equiv y \in H$;

HERS) $_{\vdash}x \equiv y \in H$, $_{\vdash}R_{\bar{v},x}^{\bar{u},z}(p) \in H \Rightarrow$

$\Rightarrow_{|-} x \equiv y \in H, _{|-} R^{\bar{u},z}_{\bar{v},x}(p) \in H, _{|-} R^{\bar{u},z}_{\bar{v},y}(p) \in H;$

$_{|-} x \equiv y \in H,\ _{-|} R^{\bar{u},z}_{\bar{v},x}(p) \in H \Rightarrow$

$\Rightarrow {}_{|-} x \equiv y \in H,\ _{-|} R^{\bar{u},z}_{\bar{v},x}(p) \in H,\ _{-|} R^{\bar{u},z}_{\bar{v},y}(p) \in H.$

Множину специфікованих формул H, для якої виконуються такі умови коректності та переходу, назвемо G_{ES}-*модельною*.

Побудуємо контрмодель за цією H.

Нехай $W = nm(H)$ – множина всіх предметних імен, що фігурують у H. Предикати рівності індукують на W відношення еквівалентності: $x \sim y \Leftrightarrow {}_{|-} x \equiv y \in H$.

Нехай $A = W/_{\sim}$ – фактор-множина множини W за відношенням ~. Нехай $\langle v \rangle$ – клас еквівалентності з представником v.

Визначимо $\delta = [v \mapsto \langle v \rangle \mid v \in W]$. Таке відображення δ є сюр'єкцією $W \to A$.

Задамо значення базових предикатів на δ та ІМ вигляду $\mathrm{r}^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\delta)$:

– якщо ${}_{|-} x \equiv y \in H$, то $(x \equiv y)_A(\delta) = T$;

– якщо ${}_{-|} x \equiv y \in H$, то $(x \equiv y)_A(\delta) = F$;

– ${}_{|-} p \in H \Rightarrow \delta \in T(p_A)$ та $\eta \notin F(p_B)$;

– ${}_{-|} p \in H \Rightarrow \delta \notin T(p_A)$ та $\eta \in F(p_B)$;

– ${}_{|-} \neg p \in H \Rightarrow \delta \in T(\neg p_A)$ та $\eta \notin F(\neg p_B)$;

– ${}_{-|} \neg p \in H \Rightarrow \delta \notin T(\neg p_A)$ та $\eta \in F(\neg p_B)$;

– ${}_{|-} R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(p) \in H \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathrm{r}^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\delta) \in T(p_A)$ та $\mathrm{r}^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\eta) \notin F(p_B)$;

– ${}_{|-} R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(p) \in H \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathrm{r}^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\delta) \notin T(p_A)$ та $\mathrm{r}^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\eta) \in F(p_B)$;

– ${}_{|-} \neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(p) \in H \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathrm{r}^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\delta) \in T(\neg p_A)$ та $\mathrm{r}^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\eta) \notin F(\neg p_B)$;

– ${}_{|-} \neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(p) \in H \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathrm{r}^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\delta) \notin T(\neg p_A)$ та $\mathrm{r}^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\eta) \in F(\neg p_B)$.

Для атомарних формул і формул вигляду $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(p)$ твердження теореми випливає з визначення базових предикатів. Далі доводимо індукцією за складністю формули згідно з пунктами визначення H.

Теореми про контрмоделі для числень Q_ELR, Q_EL, Q_ER, Q_EC формулюються та доводяться подібно до теореми 11.

Теорема 12. За умов теореми 11 існують інтерпретація $A = (A, I)$ та $\delta \in {}^VA$ такі:

$\mathrm{H}_T{}^S)$ ${}_{|-}\Phi \in H \Rightarrow \Phi_A(\delta) = T$,

${}_{-|}\Phi \in H \Rightarrow \Phi_A(\delta) \neq T$;

$\mathrm{H}_F{}^S)$ ${}_{|-}\Phi \in H \Rightarrow \Phi_B(\eta) \neq F$,

${}_{-|}\Phi \in H \Rightarrow \Phi_B(\eta) = F$.

Пари (A, δ) і (B, η) назвемо T^S-контрмоделлю і F^S-контрмоделлю для ${}_{|-}\Gamma_{-|}\Delta$.

Теорема 13. За умов теореми 11 існують інтерпретація $A = (A, I)$ та $\delta \in {}^VA$ такі:

$\mathrm{H}_T{}^S)$ ${}_{|-}\Phi \in H \Rightarrow \Phi_A(\delta) = T$,

${}_{-|}\Phi \in H \Rightarrow \Phi_A(\delta) \neq T$.

Теорема 14. За умов теореми 11 існують інтерпретація $A = (A, I)$ та $\delta \in {}^VA$ такі:

$\mathrm{H}_F{}^S)$ ${}_{|-}\Phi \in H \Rightarrow \Phi_B(\eta) \neq F$,

${}_{-|}\Phi \in H \Rightarrow \Phi_B(\eta) = F$.

Теорема 15. За умов теореми 11 існують інтерпретація $A = (A, I)$ та $\delta \in {}^VA$ такі:

$\mathrm{H}_C)$ ${}_{|-}\Phi \in H \Rightarrow \Phi_A(\delta) = T$,

${}_{-|}\Phi \in H \Rightarrow \Phi_A(\delta) = F$.

Пару (A, δ) назвемо IR-контрмоделлю для секвенції ${}_{|-}\Gamma_{-|}\Delta$.

В формулюваннях теорем 12–15 враховано, що числення Q_ELR, Q_EL, Q_ER, Q_EC формалізують відношення в P-семантиці, тому зазначені там предикати Φ_A та Φ_B мають бути однозначними.

Для числення QC_E теорема про контрмоделі формулюється аналогічно.

На основі теорем про контрмоделі для кожного з пропонованих секвенційних числень, що формалізує відповідне відношення логічного наслідку, отримуємо теореми повноти. Теореми повноти формулюються однотипно для всіх цих числень:

Теорема 16 (повноти). Нехай $\Gamma \models \Delta$. Тоді секвенція ${}_{|-}\Gamma_{-|}\Delta$ вивідна.

Наведемо для прикладу доведення для ${}^R\models_{TF}$ і числення Q_EG. та для $\models_{IR}$ і числення Q_EC (числення RC_E). Подібні доведення теорем повноти див. [9].

Доведення для $^{R}|\!=_{TF}$ *та* Q_EG. Нехай супротивне: $\Gamma\,^{R}|\!=_{TF}\Delta$ та $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ невивідна, тоді секвенційне дерево для $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ незамкнене. Отже, в цьому дереві існує незамкнений шлях. Нехай H – множина всіх специфікованих формул секвенцій цього шляху. За теоремою 11 існують T-контрмодель (A, δ) та F-контрмодель (B, η) такі:

$$_{\vdash}\Phi\in H \Rightarrow \delta\in T(\Phi_A) \text{ та } _{\dashv}\Phi\in H \Rightarrow \delta\notin T(\Phi_A);$$

$$_{\vdash}\Phi\in H \Rightarrow \eta\notin F(\Phi_B) \text{ та } _{\dashv}\Phi\in H \Rightarrow \eta\in F(\Phi_B).$$

Для T-контрмоделі згідно $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta\subseteq H$ для всіх $\Phi\in\Gamma$ маємо $\delta\in T(\Phi_A)$, для всіх $\Psi\in\Delta$ маємо $\delta\notin T(\Psi_A)$. Звідси $\delta\in T(\Gamma_A)$ та $\delta\notin T(\Delta_A)$, тому неправильно $T(\Gamma_A)\subseteq T(\Delta_A)$. Це заперечує $\Gamma\,_A|\!=_T\Delta$, тому й заперечує $\Gamma\,^{R}|\!=_{TF}\Delta$.

Для F-контрмоделі згідно $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta\subseteq H$ для всіх $\Phi\in\Gamma$ маємо $\eta\notin F(\Phi_B)$, для всіх $\Psi\in\Delta$ маємо $\eta\in F(\Psi_B)$. Звідси $\eta\notin F(\Gamma_B)$ та $\eta\in F(\Delta_B)$, тому неправильно $F(\Delta_B)\subseteq F(\Gamma_B)$. Це заперечує $\Gamma\,_B|\!=_F\Delta$ та заперечує $\Gamma\,^{R}|\!=_{TF}\Delta$.

Доведення для $|\!=_{IR}$ *та* Q_EC і QC_E. Нехай супротивне: $\Gamma\,|\!=_{IR}\Delta$ та $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ невивідна. Тоді секвенційне дерево δ для $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ незамкнене. Отже, в δ існує незамкнений шлях. Нехай H – множина всіх специфікованих формул секвенцій цього шляху. За теоремою 15 існує IR-контрмодель $(\boldsymbol{A}, \delta)$: $_{\vdash}\Phi\in H \Rightarrow \Phi_A(\delta) = T$ та $_{\dashv}\Phi\in H \Rightarrow \Phi_A(\delta) = F$. Згідно з $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta\subseteq H$ тоді для всіх $\Phi\in\Gamma$ маємо $\Phi_A(\delta) = T$ та для всіх $\Psi\in\Delta$ маємо $\Psi_A(\delta) = F$. Це суперечить $\Gamma\,|\!=_{IR}\Delta$.

Висновки

В роботі вивчаються програмно-орієнтовані логічні формалізми – чисті першопорядкові композиційно-номінативні логіки квазіарних предикатів з предикатами рівності. Виділено різновиди квазіарних предикатів, описано композиційні предикатні алгебри чистих першопорядкових логік. Розглянуто логіки з предикатами слабкої рівності та з предикатами строгої рівності, наведено властивості, пов'язані з цими предикатами. Описано мови чистих першопорядкових композиційно-номінативних логік та їх інтерпретації. Виділено класи інтерпретацій (семантики) часткових неоднозначних, часткових однозначних, тотальних неоднозначних та тотальних однозначних предикатів. Досліджено семантичні властивості пропонованих логік, особлива увага приділена відношенням логічного наслідку для множин формул. На базі властивостей цих відношень для чистих першопорядкових логік з предикатами рівності запропоновано низку числень секвенційного типу. Наведено умови замкненості секвенції та базові секвенційні форми цих числень, описано побудову виведення (секвенційного дерева). Для пропонованих числень доведено теореми коректності та повноти. Доведення повноти опирається на теореми про побудову контрмоделей за незамкненим шляхом в секвенційному дереві.

1. *Handbook* of Logic in Computer Science. Edited by S. Abramsky, Dov M. Gabbay and T. S. E. Maibaum. Oxford University Press. Vol. 1–5. 1993–2000.
2. *Нікітченко М.С., Шкільняк С.С.* Математична логіка та теорія алгоритмів. К.: ВПЦ Київський університет, 2008. 528 с.
3. *Нікітченко М.С., Шкільняк С.С.* Прикладна логіка. К.: ВПЦ Київський університет, 2013. 278 с.
4. *Nikitchenko M., Shkilniak S.* Semantic Properties of Logics of Quasiary Predicates. Workshop on Foundations of Informatics: Proceedings FOI-2015. Chisinau, Moldova. P. 180–197.
5. *Нікітченко М.С., Шкільняк О.С., Шкільняк С.С.* Чисті першопорядкові логіки квазіарних предикатів. *Проблеми програмування.* 2016. № 2–3. С. 73–86.
6. *Шкільняк С.С., Волковицький Д.Б.* Реномінативні композиційно-номінативні логіки з предикатами рівності. Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Сер.: фіз.-мат. науки. 2014. Вип. 3. С. 198–205.
7. *Шкільняк С.С., Волковицький Д.Б.* Реномінативні логіки квазіарних предикатів. *Компьютерная математика.* 2016. Вип. 1. С. 46–57.
8. *Шкільняк О.С.* Відношення логічного наслідку в логіках монотонних предикатів та

логіках антитонних предикатів. Проблеми програмування. 2017. № 1. С. 21–29.
9. *Шкільняк С.С.* Спектр секвенційних числень першопорядкових композиційно-номінативних логік. *Проблеми програмування.* 2013. № 3. С. 22–37.

References

1. ABRAMSKY S., GABBAY D. and MAIBAUM T. (editors). (1993–2000). Handbook of Logic in Computer Science Modal logic. Oxford University Press.
2. NIKITCHENKO M. and SHKILNIAK S. (2008). Mathematical logic and theory of algorithms. Kyiv: VPC Kyivskyi Universytet (in ukr).
3. NIKITCHENKO M. and SHKILNIAK S. (2013). Applied logic. Kyiv: VPC Kyivskyi Universytet (in ukr).
4. NIKITCHENKO M. and SHKILNIAK S. (2015). Semantic Properties of Logics of Quasiary Predicates. In Workshop on Foundations of Informatics: Proceedings FOI-2015. Chisinau, Moldova. P. 180–197.
5. NIKITCHENKO M. and SHKILNIAK S. (2016). Pure first-order logics of quasiary predicates. In Problems in Progamming. N 2–3. P. 73–86 (in ukr).
6. SHKILNIAK S. and VOLKOVYTSKYI D. (2014). Renominative composition-nominative logics with predicates of equality. In Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics. N 3. P. 198–205 (in ukr).
7. SHKILNIAK S. and VOLKOVYTSKYI D. (2016). Renominative logics of quasiary predicates. In Computer mathematics. **1**. P. 46–57 (in ukr).
8. SHKILNIAK O. (2017). Logical consequence relations in logics of monotone predicates and logics of antitone predicates. In Problems in Progamming. N 1. P. 21–29 (in ukr).
9. SHKILNIAK S. (2013). Spectrum of sequent calculi of first-order composition-nominative logics. In Problems in Progamming. N 3, P. 22–37 (in ukr).

Одержано 24.04.2017

Про авторів:

Нікітченко Микола Степанович,
доктор фізико-математичних наук,
професор, завідувач кафедри Теорії
та технології програмування.
Кількість наукових публікацій в
українських виданнях – понад 200,
у тому числі у фахових виданнях – 100.
Кількість наукових публікацій в
зарубіжних виданнях – 30.
Scopus Author ID: 6602842336.
H-індекс (Google Scholar): 9 (7 з 2012).
http://orcid.org/0000-0002-4078-1062.

Шкільняк Степан Степанович,
доктор фізико-математичних наук,
професор, професор кафедри Теорії
та технології програмування.
Кількість наукових публікацій в
українських виданнях – понад 200,
у тому числі у фахових виданнях – 100.
Кількість наукових публікацій в
зарубіжних виданнях – 15.
H-індекс (Google Scholar): 4 (3 з 2010).
http://orcid.org/0000-0001-8624-5778.

***Місце роботи авторів*:**

Київський національний університет
імені Тараса Шевченка,
01601, Київ, вул. Володимирська, 60.
Тел.: (044) 259 0519, (044) 522 0640 (д).
E-mail: nikitchenko@unicyb.kiev.ua,
sssh@unicyb.kiev.ua.