

І. В. РОЗОРА, д-р фіз.-мат. наук

А. О. МЕЛЬНИК, магістр

## ПОБУДОВА КРИТЕРІЇВ ЗГОДИ ПРО ВИГЛЯД ІМПУЛЬСНОЇ ПЕРЕХІДНОЇ ФУНКЦІЇ

**Резюме.** Стаття присвячена дослідженню імпульсної перехідної функції, її оцінки та властивостей, квадратно-гаусових випадкових величин і процесів, швидкості збіжності невідомої імпульсної перехідної функції, перевірці гіпотези про вигляд імпульсної перехідної функції, побудові імітаційної моделі. Проведене дослідження показало, що імпульсна перехідна функція — це вихідний сигнал системи при обробці сигналів, коли вхідний сигнал є коротким імпульсом. У більш загальному вигляді імпульсна перехідна функція описує відповідь або вихід системи як функцію часу. Також імпульсна перехідна функція вважається властивістю систем лінійного переміщення. У процесі дослідження оцінки імпульсної перехідної функції на ортонормованому та тригонометричному базисах були сформовані дві умови А, Б та зауваження до них, які надалі в роботі використовуються для знаходження різних коефіцієнтів. Дослідження квадратно-гаусових випадкових величин і процесів показало користь від використання їх по відношенню до імпульсної перехідної функції. Також була показана теорема, яка дала оцінку ймовірності великого відхилення квадратно-гаусового процесу в нормі неперервної функції. Для дослідження швидкості збіжності оцінки невідомої імпульсної перехідної функції в просторі неперервних функцій і в просторі  $L_2$  були сформовані лема, а також теорема, яка безпосередньо показала швидкість збіжності оцінки імпульсної перехідної функції в просторі неперервних функцій. Були сформовані нульова й альтернативна гіпотези. Нульова гіпотеза стверджувала, що імпульсна перехідна функція існує, а альтернативна передбачала протилежне твердження. Для перевірки гіпотези про вигляд імпульсної перехідної функції була використана теорема, за допомогою якої був сформований критерій. Для побудови імітаційної моделі використовувалося інтегроване середовище розробки Visual Studio Community 2022 (мова програмування C++) та система комп'ютерної алгебри Wolfram Mathematica для аналітичних перетворень і чисельних розрахунків, що дало змогу досить точно зробити математичні розрахунки.

**Ключові слова:** імпульсна перехідна функція, квадратно-гаусові величини, оцінка імпульсної перехідної функції.

### ВСТУП

Імпульсна перехідна функція — це реакція будь-якої динамічної системи у відповідь на деяку зовнішню зміну. Однією з найпоширеніших сфер використання імпульсних звуків у музиці є додавання реверберації до різних голосів. Її часто використовують, наприклад, для створення різних ефектів і звуків для гітар. Для імітації звуку залів також використовуються пульсові переплетення багатьох відомих концертних майданчиків.

В економіці імпульсна перехідна функцію використовують для опису економічних реакцій на зовнішні імпульси в макроекономічних моделях. Імпульси, які також називають шоками, з макроекономічної точки зору, є такими зовнішніми факторами, як податкові ставки, державні бюджети, резерви тощо. Імпульсна перехідна функція описує реакцію економіки на імпульс, де змінними є випуск, споживання, інвестиції та рівень безробіття на момент імпульсу та в наступні моменти часу.

Окрім перерахованих вище сфер, імпульсна перехідна функція також відіграє важливу роль

у радарях, ультразвуковому діагностичному обладнанні та супутниках.

**Метою** статті є побудова критеріїв згоди про вигляд імпульсної перехідної функції та відповідного програмного засобу на основі побудованих критеріїв. Для досягнення мети поставлено такі завдання:

- ознайомитися з імпульсною перехідною функцією та її властивостями;
- оцінити імпульсну перехідну функцію на ортонормованому та тригонометричному базисах;
- ознайомитися з квадратно-гаусовими випадковими величинами та процесами;
- дослідити швидкість збіжності оцінки невідомої імпульсної перехідної функції;
- перевірити гіпотези про вигляд імпульсної перехідної функції;
- побудувати імітаційну модель.

### АНАЛІЗ ПУБЛІКАЦІЙ

Проблема ідентифікації й оцінки стохастичної лінійної системи є предметом активних досліджень останніх років. Ідентифікація

системи означає побудову математичних моделей динамічних систем на основі спостережуваних вхідних і вихідних даних. Це створює значну кількість моделей, які можна розглянути. Сфера застосування цих моделей дуже широка: обробка сигналів, автоматичне керування, фінансовий ринок, медицина, машинне навчання тощо.

Питання оцінки імпульсної перехідної функції подібне до оберненої задачі та розгортки, які використовуються, наприклад, для відновлення сигналу чи зображення, виявлення сигналу.

Цікавить оцінка так званої імпульсної перехідної функції від спостережень за відгуками системи SISO (single-input single-output) на певні вхідні сигнали. Для розв'язання цієї проблеми використовувалися різні статистичні підходи. Згадаймо дві монографії з цієї проблеми Бендата і Пірсола [1] та Шетцена [2]. Акайке [3] досліджував лінійну систему MISO (multiple-input single-output) і отримав оцінки перетворення Фур'є функції відгуку в кожному компоненті. Пізніше він розглянув сценарій, що передбачає негаусові процеси [4].

Деякі методи оцінки невідомої імпульсної перехідної функції лінійної системи та дослідження властивостей відповідних оцінок були розглянуті в працях Булдігіна та його послідовників. Ці методи засновані на побудові вибіркової крос-корелограми між вхідним стохастичним процесом і відповіддю системи.

Нерівність розподілу для супремуму похибки оцінки в просторі неперервних функцій у випадку крос-корелограмної оцінки інтегрального типу отримана Козаченком і Розорою в [5].

У праці [6] розглянуто неперервну лінійну систему, незмінну в часі, з дійсною імпульсною перехідною функцією. Процес вхідного сигналу був гаусовим стохастичним процесом із нульовим середнім, який був представлений у вигляді обробленої суми щодо ортонормованого базису в  $L_2(\mathbb{R})$ . Випадок поліномів Ерміта як ортонормованого базису в  $L_2(\mathbb{R})$  було вивчено.

У [7] для інтегральної крос-корелограмної оцінки був написаний алгоритм перевірки статистичної гіпотези для функції відповіді із застосуванням верхньої оцінки перевищення випадковим квадратно-гаусовим процесом з рівнем, заданим неперервною функцією.

## ВИКЛАД ОСНОВНОГО МАТЕРІАЛУ

### Імпульсна перехідна функція, її оцінка та властивості

Імпульсна перехідна функція — це реакція будь-якої динамічної системи у відповідь на деяку зовнішню зміну. Наприклад, імпульсну перехідну функцію кімнати можна відобразити

та виміряти, генеруючи короткий звуковий сигнал у кімнаті та записуючи його разом із сигналом реверберації. Знаючи частоту і довжину початкового сигналу, можна знайти імпульсну перехідну функцію в кімнаті. Імпульсна перехідна функція вважається властивістю систем лінійного переміщення.

Розглянемо незмінну в часі неперервну лінійну систему з квадратно інтегрованою імпульсною перехідною функцією  $H(\tau)$ , яка визначена на скінченній області інтервалу  $\tau \in [0, \Lambda]$ . Це означає, що відповідь системи на вхідний сигнал  $X(t)$ , що спостерігається на  $t \in \mathbb{R}$ , має наступну форму:

$$Y(t) = \int_0^\Lambda H(\tau)X(t - \tau)d\tau, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

та  $H \in L_2([0, \Lambda])$ .

Однією з проблем, що виникає в теорії лінійних систем, є оцінка функції  $H$  від спостережень за відповіддю системи на певні вхідні сигнали.

Нехай система функцій  $\{\varphi_0(t), \varphi_k(t), \psi_k(t), k \geq 1\}$  буде ортонормованим базисом в  $L_2([0, \Lambda])$ . Припустимо, що функція  $\varphi_0(t)$  є константою. Це означає, що вона має дорівнювати  $\varphi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{\Lambda}}$ .

Розглянемо тепер як вхідні дані лінійної системи дійсний гаусовий стаціонарний стохастичний процес з нульовим середнім  $X = X_N = (X_N(u), u \in \mathbb{R})$ , що можна представити як

$$X_N(u) = \sum_{k=0}^N \xi_k \varphi_k(u) + \sum_{k=1}^N \eta_k \psi_k(u), \quad (2)$$

де  $N > 0$  — це фіксоване ціле число і випадкові величини  $\xi_k, \eta_k, k \geq 0$ , є незалежними з  $E\xi_k = E\eta_k = 0$ ,  $E\xi_k^2 = E\eta_k^2$ .

### Зауваження 1

Існує багато методик, що дають змогу розширити випадкові процеси в ряди, наприклад, розкладання Кахрунена-Лове [8; 9], ряд Фур'є [10] тощо. У працях [10; 11], присвячених моделюванню випадкових процесів із точністю та надійністю, головна ідея полягає в тому, щоб представити модель у вигляді скінченної суми ряду, якщо сам процес можна представити у вигляді ряду зі стохастичними членами. Момент відсікання таких скінчених (зрізаних) рядів базується на умовах, що залежать від заданої точності та надійності. Тому стохастичний процес  $X_N(u)$  з (2) можна розглядати як модель випадкового процесу

$$X_N(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k \varphi_k(u) + \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \psi_k(u). \quad (3)$$

### Зауваження 2

Оскільки процес  $X(t)$  визначений на  $\mathbb{R}$  та функції  $\varphi_k(t), \psi_k(t), k \geq 1$ , є ортонормованим базисом в  $L_2([0, \Lambda])$  то далі будемо вважати, що ці функції періодичні з періодом  $\Lambda$ . Отже,

$$\varphi_0(t) = \varphi_0(t + n\Lambda), \quad \varphi_k(t) = \varphi_k(t + n\Lambda) \quad (4)$$

$$\psi_k(t) = \psi_k(t + n\Lambda), \quad k \geq 1, \quad t \in [0, \Lambda], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Якщо система (1) збурена випадковим процесом  $X_N$ , то для вихідного процесу отримуємо

$$Y_N(t) = \int_0^\Lambda H(\tau)X_N(t-\tau)d\tau. \quad (5)$$

Коваріаційну функцію стаціонарного стохастичного процесу легко знайти  $X_N$ . Справді,

$$r_N(t-s) = EX_N(t)X_N(s) = \quad (6)$$

$$= \sum_{k=1}^N (\varphi_k(t)\varphi_k(s) + \psi_k(t)\psi_k(s)).$$

Під  $a_0$  визначаємо вихід (відповідь) системи на постійний сигнал

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \int_0^\Lambda H(t)dt. \quad (7)$$

Набір

$$H^*(\tau) = H(\tau) - a_0. \quad (8)$$

Як оцінку  $H^*(\tau)$  різниці функції імпульсної характеристики та  $a_0$  розглянемо інтегральну крос-корелограму

$$\hat{H}(\tau) = \hat{H}_{N,T,\Lambda}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T Y_N(t)X_N(t-\tau)d\tau, \quad (9)$$

де  $T > 0$  є параметром усереднення.

**Зауваження 3**

Інтеграл у (1) розглядається як середньо-квадратичний інтеграл Рімана.

Інтеграл в (1) існує тоді і лише тоді, коли існує інтеграл Рімана [12]

$$\int_0^\Lambda \int_0^\Lambda H(\tau)r_N(s-\tau)H(s)dsd\tau. \quad (10)$$

Оскільки  $r_N(t-s) = \sum_{k=1}^N (\varphi_k(t)\varphi_k(s) + \psi_k(t)\psi_k(s))$ , функції  $\varphi_k(s)$ ,  $\psi_k(t)$  є квадратно інтегрованими на  $[0,\Lambda]$  та  $H \in L_2([0,\Lambda])$ , то інтеграл у (10) існує.

Позначимо тепер

$$a_k = \int_0^\Lambda H(t)\varphi_k(t)dt, \quad b_k = \int_0^\Lambda H(t)\psi_k(t)dt. \quad (11)$$

Припустимо, що  $H \in C^1([0,\Lambda])$ . Потім функцію  $H$  можна розкласти в ряд за ортонормованим базисом  $\{\varphi_k(t), \psi_k(t), k \geq 0\}$  на просторі  $[0,\Lambda]$ . Отримуємо

$$H(\tau) = \sum_{k=0}^\infty a_k\varphi_k(\tau) + \sum_{k=1}^\infty b_k\psi_k(\tau), \quad (12)$$

де  $a_k$  та  $b_k$  з (11). Окрім того, ряд у (12) рівномірно збігається на  $[0,\Lambda]$ .

**Лема 1**

Справедливі наступні співвідношення:

$$E\hat{H}_{N,T,\Lambda}(\tau) = \int_0^\Lambda H(v)r_N(v-\tau)dv = \quad (13)$$

$$= \sum_{k=1}^N (\varphi_k(\tau)a_k + \psi_k(\tau)b_k), \quad \tau \in [0,\Lambda],$$

та

$$H^*(\tau) - E\hat{H}_{N,T,\Lambda}(\tau) = \quad (14)$$

$$= \sum_{k=N+1}^\infty (\varphi_k(\tau)a_k + \psi_k(\tau)b_k), \quad \tau \in [0,\Lambda].$$

У наступній лемі обчислюємо спільні моменти для оцінки імпульсної перехідної функції.

**Лема 2**

Спільний момент  $\hat{H}_{N,T,\Lambda}$  дорівнює

$$E\hat{H}_{N,T,\Lambda}(\tau)\hat{H}_{N,T,\Lambda}(\theta) = \int_0^\Lambda H(u)r_N(\tau-u)du \times$$

$$\times \int_0^\Lambda H(v)r_N(\theta-v)dv + \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T [\int_0^\Lambda \int_0^\Lambda H(v)H(u) \times r_N(t-s+u-v)dudv \cdot r_N(t-s+\theta-\tau) + \int_0^\Lambda H(v)r_N(t-s+\theta-v)dv \times \int_0^\Lambda H(u)r_N(s-t+\tau-u)du]dtds, \quad (15)$$

де  $r_N(t-s) = EX_N(t)X_N(s)$  є коваріацією  $X_N$ , коефіцієнти  $a_k$  та  $b_k$  визначені у (11).

**Наслідок 1**

Дисперсія оцінки  $\hat{H}_{N,T,\Lambda}$  дорівнює

$$\text{Var} \hat{H}_{N,T,\Lambda}(\tau) = \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T [\int_0^\Lambda \int_0^\Lambda H(v)H(u) \times r_N(t-s+u-v)dudv \cdot r_N(t-s) + \int_0^\Lambda H(v) \times r_N(t-s+\tau-v)dv \times \int_0^\Lambda H(u)r_N(s-t+\tau-u)du]dtds. \quad (16)$$

$$\text{Var} (\hat{H}_{N,T,\Lambda}(\tau) - \hat{H}_{N,T,\Lambda}(\theta)) = \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T [2 \int_0^\Lambda \int_0^\Lambda H(v) \times H(u)r_N(t-s+u-v)dudv (r_N(t-s) - r_N(t-s+\theta-\tau)) + \int_0^\Lambda H(v)(r_N(t-s+\tau-v) - r_N(t-s+\theta-v))dv \int_0^\Lambda H(u)r_N(s-t+\tau-u)du + \int_0^\Lambda H(u)r_N(t-s+\theta-v)dv \int_0^\Lambda H(u) \times (r_N(s-t+\theta-u) - r_N(s-t+\tau-u))du]dtds. \quad (17)$$

Розглянемо тепер систему функцій

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{\Lambda}}, \sqrt{\frac{2}{\Lambda}} \cos\left(\frac{2k\pi t}{\Lambda}\right), \sqrt{\frac{2}{\Lambda}} \sin\left(\frac{2k\pi t}{\Lambda}\right), k \geq 1 \right\}, \quad (18)$$

що є ортонормованим базисом в  $L_2([0,\Lambda])$ .

За позначеннями з попереднього розділу маємо

$$\varphi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{\Lambda}}, \quad \varphi_k(t) = \sqrt{\frac{2}{\Lambda}} \cos\left(\frac{2k\pi t}{\Lambda}\right), \quad (19)$$

$$\psi_k(t) = \sqrt{\frac{2}{\Lambda}} \sin\left(\frac{2k\pi t}{\Lambda}\right), \quad k \geq 1$$

та коефіцієнти  $a_k, b_k$  дорівнюють

$$a_k = \int_0^\Lambda H(\tau)\varphi_k(\tau)d\tau = \quad (20)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\Lambda}} \int_0^\Lambda H(\tau) \cos\left(\frac{2k\pi\tau}{\Lambda}\right)d\tau, \quad k \geq 1,$$

$$b_k = \int_0^\Lambda H(\tau)\psi_k(\tau)d\tau = \quad (21)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\Lambda}} \int_0^\Lambda H(\tau) \sin\left(\frac{2k\pi\tau}{\Lambda}\right)d\tau, \quad k \geq 1.$$

Припустимо тепер, що процеси вхідного сигналу системи (1) є стаціонарними гаусовими стохастичними процесами з нульовими середніми, які формуються в (18). Це означає, що процес  $X_N(u)$  виглядає:

$$X_N(u) = \sqrt{\frac{2}{\Lambda}} \sum_{k=1}^N (\xi_k \cos\left(\frac{2k\pi u}{\Lambda}\right) + \eta_k \sin\left(\frac{2k\pi u}{\Lambda}\right)), \quad u \in \mathbb{R}. \quad (22)$$

З (6) випливає, що коваріаційну функцію стаціонарного гаусового процесу  $X_N$  можна записати як

$$r_N(t-s) = \sum_{k=1}^N (\varphi_k(t)\varphi_k(s) + \psi_k(t)\psi_k(s)) = \\ = \frac{2}{\Lambda} \sum_{k=1}^N \left( \cos\left(\frac{2k\pi t}{\Lambda}\right) \cos\left(\frac{2k\pi s}{\Lambda}\right) + \right. \\ \left. + \sin\left(\frac{2k\pi t}{\Lambda}\right) \sin\left(\frac{2k\pi s}{\Lambda}\right) \right) = \frac{2}{\Lambda} \left( \sum_{k=1}^N \cos\left(\frac{2k\pi(t-s)}{\Lambda}\right) \right) \quad (23)$$

Розглянемо наступні умови:

**Умова А.**

Функція  $H(\tau)$  двічі диференційована на  $[0, \Lambda]$ . Функції  $H(\tau)$  та  $H'(\tau)$  неперервні на  $[0, \Lambda]$  та

$$I_0 = I_0(\Lambda) = \int_0^\Lambda |H(\tau)| d\tau < \infty, \quad (24)$$

$$0 < I_1 = I_1(\Lambda) = \left( \int_0^\Lambda |H'(\tau)|^2 d\tau \right)^{1/2} < \infty, \quad (25)$$

$$I_2 = I_2(\Lambda) = \int_0^\Lambda |H''(\tau)| d\tau < \infty. \quad (26)$$

**Умова Б.**

Справедливо таке співвідношення

$$H(0) = H(\Lambda). \quad (27)$$

**Зауваження 4**

Умова Б означає, що імпульсна перехідна функція скінчена на інтервалі  $[0, \Lambda]$ . Отже, значення функції на початку  $H(0)$  має дорівнювати значенню в кінці  $H(\Lambda)$  та  $H(\tau)$  не може бути константою.

Позначимо

$$d := |H'(0)| + |H'(\Lambda)|. \quad (28)$$

**Лема 3**

Припустимо, що виконуються умови А та Б. Тоді

$$|H^*(\tau) - E\hat{H}_{N,T,\Lambda}(\tau)| \leq \frac{\Lambda(d+I_2)}{2\pi^2 N}, \quad (29)$$

$$\text{Var} \hat{H}_{N,T,\Lambda}(\tau) \leq \frac{\Lambda^3(\Lambda+2)I_1^2}{\pi^4 T^2} \left(2 - \frac{1}{N}\right)^2, \quad (30)$$

де  $I_1(\Lambda)$  та  $I_2(\Lambda)$  визначені в умові А.

Наступна лема дає оцінку дисперсії різниці  $\hat{H}_{N,T,\Lambda}(\tau) - \hat{H}_{N,T,\Lambda}(\theta)$ .

**Лема 4**

Нехай виконуються умови леми 3. Тоді

$$\text{Var}(\hat{H}_{N,T,\Lambda}(\tau) - \hat{H}_{N,T,\Lambda}(\theta)) \leq \tilde{C}(N, T, \Lambda) |\tau - \theta|^\alpha, \\ \alpha \in (0, 1], \quad \tau, \theta \in [0, \Lambda], \quad (31)$$

де

$$\tilde{C}(N, T, \Lambda) = \\ = \frac{(4 + \sqrt{2})\Lambda^{3-\alpha} I_1^2 (2N-1) ((2-\alpha)N^{1-\alpha} + 1)}{(1-\alpha)\pi^{4-\alpha} T^2 N^{2-\alpha}} \\ \text{при } \alpha \in (0, 1), \\ \tilde{C}(N, T, \Lambda) = \frac{(4+\sqrt{2})\Lambda^2 I_1^2 (2N-1)(1+\ln N)}{\pi^3 T^2 N} \text{ при } \alpha = 1. \quad (32)$$

**Квадратно-гаусові випадкові величини, процеси та їх застосування**

Нехай  $(\Omega, L, P)$  — ймовірнісний простір і нехай  $(T, \rho)$  — компактний метричний простір із метрикою  $\rho$ .

**Означення 1**

[13] Нехай  $\Xi = \{\xi_t, t \in T\}$  — сімейство об'єднаних гаусових випадкових величин, для яких

$E\xi_t = 0$  (наприклад,  $\xi_t, t \in T$ , є гаусовим випадковим процесом).

Простір  $SG_{\Xi}(\Omega)$  — це простір квадратно-гаусових випадкових величин, якщо будь-який елемент  $\eta \in SG_{\Xi}(\Omega)$  можна представити як

$$\eta = \bar{\xi}^T A \bar{\xi} - E\bar{\xi}^T A \bar{\xi}, \quad (33)$$

де  $\bar{\xi}^T = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ ,  $\xi_k \in \Xi$ ,  $k = 1, \dots, n$ ,  $A$  — це дійсна матриця чи елемент  $\eta \in SG_{\Xi}(\Omega)$  може бути представлений як границя середньоквадратичної послідовності випадкових величин з (33)

$$\eta = \lim_{n \rightarrow \infty} (\bar{\xi}^T A \bar{\xi} - E\bar{\xi}^T A \bar{\xi}). \quad (34)$$

**Означення 2**

[13] Стохастичний процес  $\xi(t) = \{\xi(t), t \in T\}$  є квадратно-гаусовим, якщо для будь-якого  $t \in T$  випадкова величина  $\xi(t)$  належить простору  $SG_{\Xi}(\Omega)$ .

Властивості квадратно-гаусових випадкових процесів можна знайти, наприклад, у [10–16].

Позначимо через  $N(u)$  метричну масивність, тобто найменшу кількість замкнутих куль радіуса  $u$ , покриття набору  $T$  щодо метрики  $\rho$ . Нехай  $\xi(t) = \{\xi(t), t \in T\}$  квадратно-гаусовий випадковий процес. Припустимо, що існує монотонно зростаюча неперервна функція  $\sigma(h)$ ,  $h > 0$  така, що  $\sigma(h) \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ , та нерівність

$$\sup_{\rho(t,s) \leq h} (\text{Var}(\xi(t) - \xi(s)))^{1/2} \leq \sigma(h) \quad (35)$$

справедлива. Тепер визначимо наступні значення:

$$\varepsilon_0 = \inf_{t \in T} \sup_{s \in T} \rho(t, s), \quad t_0 = \sigma(\varepsilon_0), \quad (36)$$

$$\gamma_0 = \sup_{t \in T} (\text{Var} \xi(t))^{1/2}. \quad (37)$$

Нехай  $C$  — це максимум з  $t_0$  та  $\gamma_0$ ,  $C = \max\{t_0, \gamma_0\}$ . Наступна теорема дає оцінку ймовірності великого відхилення квадратно-гаусового процесу в нормі неперервної функції. Доведення теореми можна знайти у статті [5] або в монографії [10].

**Теорема 1**

Нехай  $\xi(t) = \{\xi(t), t \in T\}$  — це сепарабельний квадратно-гаусовий випадковий процес. Припустимо, що існує зростаюча функція  $r_N(u) \geq 0$ ,  $u \geq 1$ , з властивостями:  $r(u) \rightarrow \infty$  та  $u \rightarrow \infty$  і нехай функція  $r(\exp\{t\})$  опукла. Припустимо, що наступний інтеграл

$$\int_0^{t_0} r(N(\sigma^{(-1)}(u))) du \quad (38)$$

є збіжним. Тоді для всіх  $x > 0$

$$P\{\sup_{t \in T} |\xi(t)| > x\} \leq \\ \leq 2 \inf_{0 < p < 1} \left\{ r^{(-1)} \frac{1}{t_0 p} \left( \int_0^{t_0 p} r(N(\sigma^{(-1)}(v))) dv \right) \times \right. \\ \left. \times \left( 1 + \frac{\sqrt{2}x(1-p)}{c} \right)^{1/2} \exp \left\{ -\frac{x(1-p)}{\sqrt{2}\gamma_0} \right\} \right\}.$$

Припустимо, що  $X_N = (X_N(u), u \in \mathbb{R})$ , є дійсним незалежним центрованим гаусовим процесом з (22). Припустимо, що це збурює непостійну в часі випадкову неперервну лінійну систему (1).

Розглянемо оцінку (9) для імпульсної перехідної функції  $H$  невимірної відповіді на постійний сигнал  $a_0$  з (7). Вихідний процес  $Y(t)$  визначений в (1).

Маємо наступну лему.

**Лема 5**

Стохастичний процес  $\hat{Z}_{N,T,\Lambda}(\tau) = \hat{H}_{N,T,\Lambda}(\tau) - E\hat{H}_{N,T,\Lambda}(\tau)$ ,  $\tau > 0$ , є квадратно-гаусовим.

Розглянемо різницю оцінки  $\hat{H}_{N,T,\Lambda}(\tau)$  та імпульсної перехідної функції  $H(\tau)$  невимірної відповіді на постійний сигнал  $a_0$

$$H^*(\tau) - \hat{H}_{N,T,\Lambda}(\tau), \tau > 0. \quad (40)$$

Спочатку досліджуємо розподіл супремуму для цієї різниці на області інтервалу  $[0, \Lambda]$ , де  $\Lambda > 0$  є фіксованим додатнім числом,

$$P \left\{ \sup_{\tau \in [0, \Lambda]} |\hat{H}_{N,T,\Lambda}(\tau) - H^*(\tau)| \geq \varepsilon \right\}, \varepsilon > 0. \quad (41)$$

Позначимо

$$h_{N,\Lambda}^* = \frac{\Lambda(d+I_2)}{2\pi^2 N}. \quad (42)$$

Тоді з (29) випливає, що

$$|E\hat{H}_{N,T,\Lambda}(\tau) - H^*(\tau)| \leq h_{N,\Lambda}^*, \tau \in [0, \Lambda]. \quad (43)$$

Покладемо

$$\gamma_0(N, T, \Lambda) = \gamma_0 = \frac{\Lambda \sqrt{\Lambda(\Lambda+2)} I_1}{\pi^2 T} \left(2 - \frac{1}{N}\right). \quad (44)$$

З (30) маємо, що

$$\sup_{\tau \in [0, \Lambda]} \sqrt{\text{Var} \hat{Z}_{N,T,\Lambda}(\tau)} \leq \gamma_0. \quad (45)$$

Нехай

$$M_\alpha = 2^{2-\frac{1}{2\alpha}} e^{\frac{1}{\alpha}} \gamma_0^{\frac{1}{2}} \alpha^{-\frac{1}{2}} \alpha^{-\frac{1}{2}}. \quad (46)$$

Наступна теорема показує швидкість збіжності оцінки імпульсної перехідної функції в просторі неперервних функцій.

**Теорема 2**

Припустимо, що виконуються умови А та Б.

Тоді нерівність

$$P \left\{ \sup_{\tau \in [0, \Lambda]} |H^*(\tau) - H_{N,T,\Lambda}(\tau)| > \varepsilon \right\} \leq M_\alpha (\varepsilon - h_{N,\Lambda}^*)^{\frac{1}{\alpha}} \times (C\alpha + \sqrt{2}\alpha(\varepsilon - h_{N,\Lambda}^*) - 2\gamma_0)^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{\varepsilon - h_{N,\Lambda}^*}{\sqrt{2}\gamma_0} + \frac{1}{\alpha} \right\} \quad (47)$$

справедлива для

$$\varepsilon > \frac{\sqrt{2}\gamma_0}{\alpha} + h_{N,\Lambda}^*, \alpha \in (0, 1]. \quad (48)$$

**Побудова критеріїв згоди про вигляд імпульсної перехідної функції**

Використовуючи теорему 2, можна перевірити гіпотези про вигляд імпульсної перехідної функції.

Нехай нульова гіпотеза  $H_0$  стверджує, що імпульсна перехідна функція є  $H(\tau)$ ,  $\tau \in [0, \Lambda]$ , а альтернативна гіпотеза  $H_\alpha$  передбачає протилежне твердження.

Позначимо

$$g(\varepsilon) = g(\varepsilon, N, T) = M_\alpha (\varepsilon - h_{N,\Lambda}^*)^{\frac{1}{\alpha}} \times (C\alpha + \sqrt{2}\alpha(\varepsilon - h_{N,\Lambda}^*) - 2\gamma_0)^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{\varepsilon - h_{N,\Lambda}^*}{\sqrt{2}\gamma_0} + \frac{1}{\alpha} \right\} \quad (49)$$

З теореми 2 випливає, що якщо  $\varepsilon > z_{N,T,\Lambda} := \frac{\sqrt{2}\gamma_0}{\alpha} + h_{N,\Lambda}^*$ ,  $\alpha \in (0, 1]$ , тоді

$$P \left\{ \sup_{\tau \in [0, \Lambda]} |H(\tau) - \hat{H}_{N,T,\Lambda}(\tau)| > \varepsilon \right\} \leq g(\varepsilon). \quad (50)$$

Нехай  $\varepsilon_\delta$  буде розв'язком рівняння

$$g(\varepsilon_\delta) = \delta, \quad 0 < \delta < 1. \quad (51)$$

Покладемо

$$\varepsilon_\delta^* = \max\{\varepsilon_\delta, z_{N,T,\Lambda}\}. \quad (52)$$

Очевидно, що  $g(\varepsilon_\delta^*) \leq \delta$  та

$$P \left\{ \sup_{\tau \in [0, \Lambda]} |H(\tau) - \hat{H}_{N,T,\Lambda}(\tau)| > \varepsilon \right\} \leq \delta. \quad (53)$$

З теореми 2 випливає, що для перевірки гіпотези  $H_0$ , можна використати наступний критерій.

**Критерій**

Для заданого рівня довіри  $1 - \delta$ ,  $\delta \in (0, 1)$ , гіпотеза  $H_0$  відхиляється, якщо

$$\sup_{\tau \in [0, \Lambda]} |H(\tau) - \hat{H}_{N,T,\Lambda}(\tau)| > \varepsilon_\delta^*, \quad (54)$$

інакше гіпотеза  $H_0$  приймається, де  $\varepsilon_\delta^*$ ; з (52).

**Зауваження 5**

Рівняння  $g(\varepsilon_\delta) = \delta$ , має рішення для будь-якого  $\delta > 0$  оскільки функція  $g(\varepsilon)$  спадає. Розв'язок рівняння можна знайти за допомогою чисельних методів.

Розглянемо окремий випадок, коли  $\alpha = 1$ . Імпульсну перехідну функцію візьмемо у вигляді

$$H(\tau) = \tau(e^{-\tau} - e^{-\Lambda}). \quad (55)$$

Вигляд цієї функції продемонстровано на **рис. 1**.

Візьмемо  $\Lambda = 10$ . Очевидно, що умови А та Б виконуються для  $H(\tau)$ . Для пошуку  $I_0, I_1, I_2, d$  скористаємося системою комп'ютерної алгебри Wolfram Mathematica. Отже, маємо:

$$I_0 = \int_0^\Lambda |H(\tau)| d\tau = 0.9972, \quad (56)$$

$$I_1 = \left( \int_0^\Lambda |H'(\tau)|^2 d\tau \right)^{1/2} = 0.5, \quad (57)$$

$$I_2 = \int_0^\Lambda |H''(\tau)| d\tau = 1.2703, \quad (58)$$

$$d = |H'(0)| + |H'(\Lambda)| = 1.0004. \quad (59)$$

Для знаходження значень параметра  $T$  використаємо рівняння (49) так:

$$g(\varepsilon, N, T) = \delta \quad (60)$$

Отже, отримуємо

$$\delta = M_\alpha (\varepsilon - h_{N,\Lambda}^*)^{\frac{1}{\alpha}} \times (C\alpha + \sqrt{2}\alpha(\varepsilon - h_{N,\Lambda}^*) - 2\gamma_0)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{\varepsilon - h_{N,\Lambda}^*}{\sqrt{2}\gamma_0} + \frac{1}{\alpha}\right\} \quad (61)$$

Розв'язання рівняння (61) розіб'ємо на два кроки: першим кроком буде знаходження коефіцієнтів  $h_{N,\Lambda}^*$ ,  $\tilde{C}(N, T, \Lambda)$ ,  $\gamma_0$ ,  $M_\alpha$ ; другим — підставлення коефіцієнтів у рівняння (61) і пошук  $T$ .

Для пошуку коефіцієнтів  $h_{N,\Lambda}^*$ ,  $\tilde{C}(N, T, \Lambda)$ ,  $\gamma_0$ ,  $M_\alpha$  скористаємося реалізацією написаній на мові C++. Для знаходження  $T$  скористаємося системою комп'ютерної алгебри Wolfram Mathematica. Для порівняння результатів візьмемо рівні зрізу  $N = 100$ ,  $N = 200$ ,  $N = 500$  та  $N = 1000$ .

Отримуємо **табл. 1–4**, які містять мінімальні значення параметра  $T$  такі, що  $g(\varepsilon, N, T) = \delta$  із заданим рівнем значущості  $\delta$  та точністю  $\varepsilon$ .

**Табл. 1–4** містить мінімальні значення параметра  $T$  такі, що  $g(\varepsilon, N, T) = \delta$  із заданим рівнем значущості  $\delta$  та точністю  $\varepsilon$ . Ці значення можна назвати критичними точками та їх варто використовувати так: якщо параметр усереднення  $T$  в оцінці

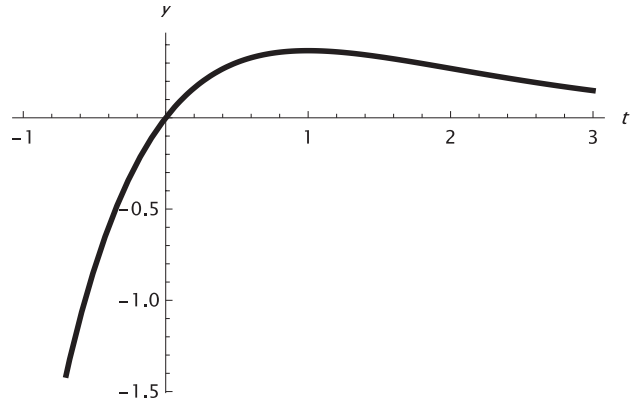


Рис. 1. Графік  $H(t)$

$$\hat{H}_{N,T,\Lambda}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T Y_N(t) X_N(t - \tau) dt \quad (62)$$

менший ніж критичні точки з таблиці, тоді гіпотеза  $H_0$  відхиляється. Якщо  $T$  більший або дорівнює критичній точці з таблиці, то гіпотеза  $H_0$  прийнята.

З отриманих **табл. 1–4** можна побачити, що при збільшенні рівня зрізу  $N$  мінімальне значення параметра усереднення  $T$  для відповідних рівнів значущості  $\delta$  та точності  $\varepsilon$  зменшується.

Таблиця 1

Мінімальні значення  $T$  при  $\Lambda = 10$  для фіксованого  $N = 100$  із заданим рівнем значущості  $\delta$  та точності  $\varepsilon$  для  $g(\varepsilon, N, T) = \delta$

$\varepsilon \backslash \delta$	0,3	0,2	0,1
0,3	432	460	505
0,5	255	271	298
1	126	134	147
1,5	84	89	98
2	63	67	73
5	25	27	29

Таблиця 3

Мінімальні значення  $T$  при  $\Lambda = 10$  для фіксованого  $N = 500$  із заданим рівнем значущості  $\delta$  та точності  $\varepsilon$  для  $g(\varepsilon, N, T) = \delta$

$\varepsilon \backslash \delta$	0,3	0,2	0,1
0,3	421	447	491
0,5	252	267	294
1	126	133	147
1,5	84	89	98
2	63	67	73
5	25	27	29

Таблиця 2

Мінімальні значення  $T$  при  $\Lambda = 10$  для фіксованого  $N = 200$  із заданим рівнем значущості  $\delta$  та точності  $\varepsilon$  для  $g(\varepsilon, N, T) = \delta$

$\varepsilon \backslash \delta$	0,3	0,2	0,1
0,3	425	452	496
0,5	253	269	296
1	126	134	147
1,5	84	89	98
2	63	67	73
5	25	27	29

Таблиця 4

Мінімальні значення  $T$  при  $\Lambda = 10$  для фіксованого  $N = 1000$  із заданим рівнем значущості  $\delta$  та точності  $\varepsilon$  для  $g(\varepsilon, N, T) = \delta$

$\varepsilon \backslash \delta$	0,3	0,2	0,1
0,3	419	446	490
0,5	251	267	293
1	125	133	147
1,5	84	89	98
2	63	67	73
5	25	27	29

Також таблиці показують, що при найбільшій точності  $\varepsilon = 0,3$  та найменшому рівню значущості  $\delta = 0,1$  (надійністю 90 %) параметр усереднення  $T$  є найбільшим, що відповідає дійсності.

### ВИСНОВКИ

Проведене дослідження показало, що імпульсною перехідною функцією деякого процесу є вихідний сигнал, який отримується, коли вхідний сигнал є імпульсом, тобто раптовою та короткою зміною сигналу. Також імпульсна перехідна функція вважається властивістю систем лінійного переміщення.

При дослідженні оцінки імпульсної перехідної функції на ортонормованому та тригонометричному базисах були сформовані дві умови А, Б та зауваження до них, у яких були введені формули для обчислення  $I_0, I_1, I_2, d$ , які надалі в роботі постійно використовуються для знаходження різних коефіцієнтів.

Дослідження квадратно-гаусових випадкових величин і процесів показало користь від використання їх по відношенню до імпульсної перехідної функції. Також було показано теорему, яка дала оцінку ймовірності великого відхилення квадратно-гаусового процесу в нормі неперервної функції.

Для дослідження швидкості збіжності оцінки невідомої імпульсної перехідної функції в просторі неперервних функцій та в просторі  $L_2$  були сформовані лема, а також теорема, яка безпосередньо показала швидкість збіжності оцінки імпульсної перехідної функції в просторі неперервних функцій.

Були сформовані нульова й альтернативна гіпотези. Нульова гіпотеза стверджувала, що імпульсна перехідна функція існує, а альтернативна передбачала протилежне твердження. Для перевірки гіпотези про вигляд імпульсної перехідної функції було використано теорему, за допомогою якої був сформований критерій.

Для побудови імітаційної моделі використовувалося інтегроване середовище розробки Visual Studio Community 2022 (мова програмування C++) та система комп'ютерної алгебри Wolfram Mathematica для аналітичних перетворень і чисельних розрахунків, що дало змогу досить точно зробити математичні розрахунки.

Імітаційна модель складалася з трьох кроків. Першим кроком було знаходження  $I_0, I_1, I_2, d$  за допомогою системи комп'ютерної алгебри Wolfram Mathematica з умов А та Б та зауваження до них. Другим кроком було знаходження коефіцієнтів  $h_{N,\Lambda}^*, \tilde{C}(N, T, \Lambda), \gamma_0, M_\alpha$  з рівняння (61) за допомогою реалізації написаній на мові C++. Третім кроком було підставлення коефіцієнтів у рівняння (61) і пошук параметра усереднення

$T$  за допомогою системи комп'ютерної алгебри Wolfram Mathematica.

У моделі були наступні змінні:  $\Lambda = 10, N = 100; 200; 500; 1000, \varepsilon = 0,3; 0,5; 1; 1,5; 2; 5, \delta = 0,1; 0,2; 0,3$  дослідження яких виявило, що при однакових рівнях зрізу при збільшенні області інтервалу  $[0, \Lambda]$  мінімальне значення параметра  $T$  при найбільшій точності  $\varepsilon = 0,3$  та найменшому рівню значущості  $\delta = 0,1$  (надійністю 90 %) є найбільшим. Тобто побудована модель показала, що при збільшенні рівня зрізу  $N$  мінімальне значення параметра усереднення  $T$  для відповідних рівнів значущості  $\delta$  та точності  $\varepsilon$  зменшується.

### СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Bendat J. S. Engineering Applications of Correlation and Spectral Analysis / J. S. Bendat, A. G. Piersol. — New York : Wiley, 1980. — 472 p.
2. Schetzen M. The Volterra and Wiener Theories of Nonlinear Systems / M. Schetzen. — New York : Wiley, 1980. — 550 p.
3. Akaike H. On the statistical estimation of the frequency response function of a system having multiple input // Annals of the Institute of Statistical Mathematics. — 1965. — No. 17. — P. 185–210.
4. Akaike H. On the use of non-Gaussian process in the identification of a linear dynamic system / H. Akaike // Annals of the Institute of Statistical Mathematics. — 1966. — No. 18. — P. 269–276.
5. Kozachenko Yu. On cross-correlogram estimators of impulse response function / Yu. Kozachenko, I. Rozora // Theoretical Probability and Mathematical Statistics. — 2016. — No. 93. — P. 79–91.
6. Kozachenko Yu. A criterion for testing hypothesis about impulse response function / Yu. Kozachenko, I. Rozora // Statistics, Optimization & Information Computing. — 2016. — No. 4. — P. 214–232.
7. Rozora I. Statistical hypothesis testing for the shape of impulse response function // Communications in Statistics — Theory and Methods. — 2018. — No. 47(6). — P. 1459–1474.
8. Kozachenko Yu. On an expansion of random processes in series / Yu. Kozachenko, I. Rozora, Ye. Turchyn // Random Operators and Stochastic Equations. — 2007. — No. 15(1). — P. 15–34.
9. Kozachenko Yu. Properties of Some Random Series / Yu. Kozachenko, I. Rozora, Ye. Turchyn // Communications in Statistics — Theory and Methods. — 2011. — No. 40(19–20). — P. 3672–3683.
10. Kozachenko Yu. Simulation of Stochastic Processes with given Accuracy and Reliability / Yu. Kozachenko, O. Pogoriliak, I. Rozora, A. Tegra. — London : ISTE Press Ltd and Elsevier Ltd, 2016. — 346 p.
11. Kozachenko Yu. Simulation of stochastic processes and fields / Yu. Kozachenko, A. Pashko, I. Rozora — Kyiv : Zadruga, 2007. — 232 p.
12. Gikhman I. I. Introduction to the theory of random processes / I. I. Gikhman, A. V. Skorokhod — New York : Dover Publications Inc, 1996. — 544 p.
13. Buldygin V. V. Metric characterization of random variables and random processes / V. V. Buldygin, Yu. V. Kozachenko. — Providence : American Mathematical Society, 2000. — 257 p.
14. Kozachenko Yu. Large deviation probabilities for square-Gaussian stochastic processes / Yu. Kozachenko, O. Moklyachuk // Extremes. — 1999. — No. 2(3). — P. 269–293.

15. Kozachenko Yu. Square-Gaussian stochastic processes / Yu. Kozachenko, O. Moklyachuk // *Theory of Stochastic Processes*. — 2000. — No. 3–4. — P. 98–121.
16. Kozachenko Yu. Square-Gaussian random processes and estimators of covariance functions / Yu. Kozachenko, O. Stus // *Mathematical Communications*. — 1998. — No. 3(1). — P. 83–94.
17. Gondenshluger A. On adaptive inverse estimation of linear functionals in Hilbert scales / A. Gondenshluger, S. Pereverzev // *Bernoulli*. — 2003. — No. 9(5). — P. 783–807.
18. Meister A. Deconvolution Problems in Nonparametric Statistics / A. Meister. — Berlin: Springer-Verlag, 2009. — 210 p.
19. Ingster Y. Nonparametric Goodness-of-Fit Testing Under Gaussian Models / Y. Ingster, I. Suslina // Springer. — 2003. — No. 2. — P. 141–152.
20. Tsybakov A. Introduction to Nonparametric Estimation. Springer Series in Statistics / A. Tsybakov. — New York : Springer, 2009. — 214 p.
21. Fan J. Local Polynomial Modelling and its Applications / J. Fan, I. Gijbels. — London : Chapman & Hall, 1996. — 360 p.
22. Hannan E. The Statistical Theory of Linear Systems / E. Hannan, M. Deistler // Wiley. — 1988. — No. 8. — P. 135–143.
23. Cardot H. Thresholding projection estimators in functional linear models / H. Cardot, J. Johannes // *Journal of Multivariate analysis*. — 2010. — No. 101. — P. 395–408.
24. Pilonetto G. Kernel methods in system identification, machine learning and function estimation: A survey / G. Pilonetto, F. Dinuzzo, T. Chen // *Automatica*. — 2014. — No. 40(3). — P. 657–682.
25. Delaigle A. On deconvolution with repeated measurements / A. Delaigle, P. Hall, A. Meister // *Annals of Statistics*. — 2008. — No. 36. — P. 665–685.
26. Dashti M. The Bayesian approach to inverse problems / M. Dashti, A. Stuart. — New York : Springer, 2007. — 107 p.
27. Alquier P. Inverse Problems and High-Dimensional Estimation / P. Alquier, E. Gautier, G. Stoltz. — New York : Springer, 2011. — 363 p.
28. Kozachenko Yu., Rozora, I., & Turchyn, Ye. (2007). On an expansion of random processes in series. *Random Operators and Stochastic Equations*, 15 (1), P. 15–34. <https://doi.org/10.1515/ROSE.2007.002>
29. Kozachenko, Yu., Rozora, I., & Turchyn, Ye. (2011). Properties of Some Random Series. *Communications in Statistics — Theory and Methods*, 40 (19–20), P. 3672–3683. <https://doi.org/10.1080/03610926.2011.581188>
30. Kozachenko, Yu, Pogoriliak, O., Rozora, I., & Tegra, A. (2016). *Simulation of Stochastic Processes with given Accuracy and Reliability*. London: ISTE Press Ltd and Elsevier Ltd, 346 p.
31. Kozachenko, Yu., Pashko, A., & Rozora, I. (2007). *Simulation of stochastic processes and fields*. Kyiv, 232 p.
32. Gikhman, I. I., & Skorokhod, A. V. (1996). *Introduction to the theory of random processes*. New York: Dover Publications Inc, 544 p.
33. Buldygin, V. V., & Kozachenko, Yu. V. (2000). *Metric characterization of random variables and random processes*. Providence: American Mathematical Society, 257 p. <https://doi.org/10.1090/mmono/188>
34. Kozachenko, Yu., & Moklyachuk, O. (1999). Large deviation probabilities for square-Gaussian stochastic processes. *Extremes*, 2 (3), P. 269–293.
35. Kozachenko, Yu., & Moklyachuk, O. (2000). Square-Gaussian stochastic processes. *Theory of Stochastic Processes*, 3–4, P. 98–121.
36. Kozachenko, Yu., & Stus, O. (1998). Square-Gaussian random processes and estimators of covariance functions. *Mathematical Communications*, 3 (1), P. 83–94.
37. Gondenshluger, A., & Pereverzev, S. (2003). On adaptive inverse estimation of linear functionals in Hilbert scales. *Bernoulli*, 9 (5), P. 783–807. <https://doi.org/10.3150/bj/1066418878>
38. Meister, A. (2009). *Deconvolution Problems in Nonparametric Statistics*. Berlin: Springer-Verlag, 210 p.
39. Ingster, Y., & Suslina, I. (2003). Nonparametric Goodness-of-Fit Testing Under Gaussian Models. *Springer*, 2, P. 141–152. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-21580-8>
40. Tsybakov, A. (2009). *Introduction to Nonparametric Estimation. Springer Series in Statistics*. New York: Springer, 214 p. <https://doi.org/10.1007/b13794>
41. Fan, J., & Gijbels, I. (1996). *Local Polynomial Modelling and its Applications*. London: Chapman & Hall, 360 p.
42. Hannan, E., & Deistler, M. (1988). The Statistical Theory of Linear Systems. *Wiley*, 8, P. 135–143.
43. Cardot, H., & Johannes, J. (2010). Thresholding projection estimators in functional linear models. *Journal of Multivariate analysis*, 101, P. 395–408. <https://doi.org/10.1016/j.jmva.2009.03.001>
44. Pilonetto, G., Dinuzzo, F., & Chen, T. (2014). Kernel methods in system identification, machine learning and function estimation: A survey. *Automatica*, 40 (3), P. 657–682. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2014.01.001>
45. Delaigle, A., Hall, P. & Meister, A. (2008). On deconvolution with repeated measurements. *Annals of Statistics*, 36, P. 665–685.
46. Dashti, M., & Stuart, A. (2007). *The Bayesian approach to inverse problems*. New York: Springer, 107 p.
47. Alquier, P., Gautier, E., & Stoltz, G. (2011). *Inverse Problems and High-Dimensional Estimation*. New York: Springer, 363 p.

## REFERENCES

1. Bendat, J. S., & Piersol, A. G. (1980). *Engineering Applications of Correlation and Spectral Analysis*. New York: Wiley, 472 p.
2. Schetzen, M. (1980). *The Volterra and Wiener Theories of Nonlinear Systems*. New York: Wiley, 550 p.
3. Akaike, H. (1965). On the statistical estimation of the frequency response function of a system having multiple input. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 17, P. 185–210. <https://doi.org/10.1007/BF02868166>
4. Akaike, H. (1966). On the use of non-Gaussian process in the identification of a linear dynamic system. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 18, P. 269–276. <https://doi.org/10.1007/BF02869534>
5. Kozachenko, Yu., & Rozora, I. (2016). On cross-correlogram estimators of impulse response function. *Theoretical Probability and Mathematical Statistics*, 93, P. 79–91. <https://doi.org/10.1090/tpms/995>
6. Kozachenko, Yu., & Rozora, I. (2016). A criterion for testing hypothesis about impulse response function. *Statistics, Optimization & Information Computing*, 4, P. 214–232. <https://doi.org/10.19139/soic.v4i3.222>
7. Rozora, I. (2018). hypothesis testing for the shape of impulse response function. *Communications in Sta-*



I. V. ROZORA, D. Sc. in Physics and Mathematics

A. O. MELNYK, Master Student

## CONSTRUCTION OF GOODNESS-OF-FIT CRITERIA FOR THE TYPE OF IMPULSE RESPONSE FUNCTION

**Abstract.** The article is devoted to the study of the impulse response function, its estimation and properties, square-Gaussian random variables and processes, the rate of convergence of the unknown impulse response function, testing the hypothesis about the type of impulse response function, building a simulation model. The study showed that the pulse response function is the output signal of the system during signal processing, when the input signal is a short pulse. In a more general form, the impulse response function describes the response or output of the system as a function of time. Also, the impulse response function is considered a property of linear displacement systems. During the study of the estimation of the impulse response function on orthonormal and trigonometric bases, two conditions A, B and remarks to them were formed, which are used in the future to find different coefficients. The study of square-Gaussian random variables and processes has shown the benefits of using them in relation to the impulse response function. A theorem was also presented, which estimated the probability of a large deviation of the square-Gaussian process in the norm of a continuous function. To study the rate of convergence of the unknown impulse response function in the space of continuous functions and in the space  $L_2$ , a lemma was formed, as well as a theorem that directly showed the rate of convergence of the impulse response function in the space of continuous functions. Zero and alternative hypotheses were formed. The null hypothesis claimed that the impulse response function existed, and the alternative hypothesis suggested the opposite. To test the hypothesis about the form of the impulse response function, a theorem was used by which a criterion was formed. Visual Studio Community 2022 integrated development environment (C++ programming language) and Wolfram Mathematica computer algebra system for analytical transformations and numerical calculations were used to build the simulation model, which allowed to make mathematical calculations quite accurately.

**Keywords:** impulse response function, square-Gaussian quantities, estimation of impulse response function.

### ІНФОРМАЦІЯ ПРО АВТОРІВ

**Розора Ірина Василівна** — д-р фіз.-мат. наук, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, просп. Академіка Глушкова 4-д, м. Київ, Україна, 02000; +38 (044) 521-35-35; irozora@knu.ua; ORCID: 0000-0002-8733-7559

**Мельник Анастасія Олександрівна** — магістр, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, просп. Академіка Глушкова 4-д, м. Київ, Україна, 02000; +38 (066) 032-86-42; melinik2011@gmail.com; ORCID: 0000-0002-3167-4353

### INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

**Rozora I. V.** — D. Sc. in Physics and Mathematics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, 4-d Akademika Glushkova Avenue, Kyiv, Ukraine, 02000; +38 (044) 521-35-35; irozora@knu.ua; ORCID: 0000-0002-8733-7559

**Melnyk A. O.** — Master Student, Taras Shevchenko National University of Kyiv, 4-d Akademika Glushkova Avenue, Kyiv, Ukraine, 02000; +38 (066) 032-86-42; melinik2011@gmail.com; ORCID: 0000-0002-3167-4353



### ДО УВАГИ АВТОРІВ:

До друку приймаються статті українською та англійською мовами.

Відповідальність за достовірність поданих даних несуть автори матеріалів.

Редакція може не поділяти думки авторів, викладені у статтях.

У разі передруку матеріалів — посилання на журнал “Наука, технології, інновації” обов’язкове.

**Адреса редакції:** вул. Антоновича, 180, м. Київ, Україна, 0315.

**Контакти редакції:** тел.: +38 (044) 521-00-39.

e-mail: journal@uintei.kiev.ua

**Умови для публікації викладено на сайті:** <http://nti.ukrintei.ua>.

**З питань придбання та розміщення реклами:** тел. +38 (044) 521-00-39.

e-mail: uintei.ua@gmail.com або sale@uintei.kiev.ua