

## МОДЕЛЮВАННЯ ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИХ ПРОЦЕСІВ ЛІНІЙНОГО МАГНІТО-ЕЛЕКТРИЧНОГО ДВИГУНА ПРИВОДА ДВОМАСОВОЇ ВІБРОУДАРНОЇ СИСТЕМИ

Р.П. Бондар<sup>\*</sup>, канд.техн.наук, Г.М. Голенков<sup>\*\*</sup>, канд.техн.наук  
Київський національний університет будівництва і архітектури,  
пр. Повітрофлотський, 31, Київ, 03037, Україна, e-mail: [rpbondar@gmail.com](mailto:rpbondar@gmail.com)

*Запропоновано модель для дослідження електромеханічних процесів у двомасовій віброударній системі з приводом від лінійного двигуна, що ґрунтується на заступній схемі із зосередженими параметрами. Електричні параметри моделі є залежними від робочої частоти. Також враховуються магнітні втрати в осерді двигуна. Для моделювання сили удару приймається сила контактної взаємодії, що описується формулою Герца. Виконано розрахунок характеристик двомасової електромеханічної системи залежно від параметрів ударного навантаження та робочої частоти. Проведено експериментальні дослідження електромеханічних характеристик магнітоелектричного двигуна у віброударному режимі роботи та виконано порівняльний розрахунок із застосуванням розробленої моделі. Бібл. 7, табл. 1, рис. 4.*

**Ключові слова:** віброударна система, електромеханічні характеристики, лінійний магнітоелектричний двигун.

**Вступ.** Вібраційні технології є основою багатьох сучасних технологічних процесів, пов'язаних із переміщенням та обробкою матеріалів, ущільненням, сортуванням, гранулюванням та ін. Лінійні магнітоелектричні машини використовуються у випробувальних та калібрувальних стендах, віброізоляційних платформах, для поглинання енергії ударів у підвісках автомобілів [1, 2] тощо. Залежно від призначення такі пристрої можуть як утворювати вібраційні навантаження, так і навпаки, зменшувати їх.

Застосування лінійних магнітоелектричних двигунів (ЛМД) вібраційної дії у приводах будівельних машин забезпечує низку переваг, основними з яких є широкий частотний робочий діапазон, відсутність механічних передач, а отже надійність і низький рівень шуму, можливість регулювання експлуатаційних характеристик в автоматичному режимі.

Використання вібраційних та віброударних пристроїв з приводом від лінійних двигунів має свої особливості, які визначаються характером робочого процесу. Для того щоб вібратор виконував певну технологічну операцію (ущільнення, перемішування тощо), необхідно забезпечити відповідність електромеханічних характеристик ЛМД вимогам робочого процесу.

Дослідженням та розрахункам характеристик ЛМД вібраційної дії присвячено низку праць. Значна увага під час дослідження таких систем приділяється аналізу поведінки приводу залежно від параметрів ЛМД та робочої частоти, тобто частотним характеристикам. Як правило, такі системи розглядаються як одномасові з лінійним навантаженням пружного чи в'язкого типу [3]. При цьому параметри заступних схем можуть вважатися сталими [4] або бути залежними від частоти [5].

Разом з тим робота ЛМД на нелінійне навантаження, зокрема ударного типу, не має достатнього відображення у літературі. Тому актуальним є питання створення математичних моделей ЛМД у віброударному режимі роботи та дослідження з їхнім використанням особливостей електромеханічних процесів приводу залежно від параметрів ударного навантаження.

**Метою роботи** є розробка математичної моделі для розрахунку електромеханічних характеристик ЛМД вібраційної дії з навантаженням ударного типу та визначення впливу параметрів навантаження на характеристики машини.

**Розрахункова модель віброударної системи з лінійним електроприводом.** Як збудник періодичної електромагнітної сили  $F_{ev}$  застосовується циліндричний ЛМД із гладкою (беззубцевою) структурою статора [4]. Електрична схема заміщення двигуна показана на рис. 1, а, де  $R_{sv}$ ,  $L_v$  – відповідно активний опір та індуктивність обмотки статора,  $e$  – ЕРС руху якоря,  $R_{mag}$  – активний опір, що відповідає магнітним втратам в осерді. У схемі опір обмотки статора  $R_{sv}$  приймається сталим. Індуктивність обмотки  $L_v$  є функцією переміщення якоря відносно статора, а також враховується її зміна залежно від робочої частоти ЛМД. Передбачається, що розрахунок характеристик віброударної системи (ВУС) проводиться для сталого значення струму в обмотці ЛМД, тому опір  $R_{mag}$  є залежним тільки від робочої частоти. ЕРС руху якоря дорівнює  $e = -d\Psi_{pm}/dt$ , де  $\Psi_{pm}$  – потокозчеплення об-

мотки статора, зумовлене полем постійних магнітів, яке є функцією положення якоря.

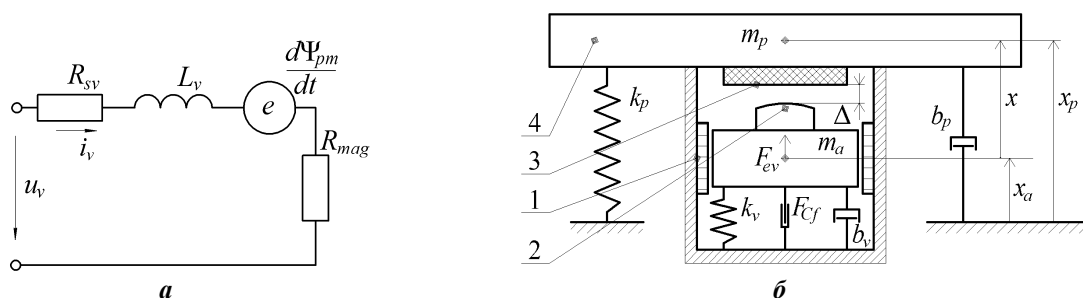


Рис. 1

Враховуючи зазначене, і згідно із заступною схемою диференціальне рівняння рівноваги напруг обмотки статора машини можна записати у вигляді

$$u_v = i_v(R_{sv} + R_{mag}) + L_v \frac{di_v}{dt} + \frac{dL_v}{dx} \frac{dx}{dt} i_v + \frac{d\Psi_{pm}}{dx} \frac{dx}{dt}, \quad (1)$$

де  $u_v$ ,  $i_v$  – відповідно напруга та струм обмотки двигуна;  $x$  – переміщення якоря відносно статора.

За наведеної конструкції ЛМД (коли відсутні зубцеві гармоніки та міжзубцеві сили зчеплення) електромагнітну силу можна виразити через похідну від магнітної енергії

$$F_{ev} = \left. \frac{\partial W_m}{\partial x} \right|_{i_v = const} = \frac{d\Psi_{pm}}{dx} i_v + \frac{1}{2} \frac{dL_v}{dx} i_v^2. \quad (2)$$

Вирази (1), (2) використовуються для визначення характеристик ВУС відповідно до механічної схеми заміщення, поданої далі.

Для ударно-вібраційних площадок, що застосовуються у будівельному виробництві під час ущільнення бетону або формування бетонних виробів, типовою є двомасова механічна схема, яка показана на рис. 1, б. Тут ЛМД вібраційної дії 1 за допомогою ударника 2 періодично здійснює удари по демпферу 3. Між ударником та демпфером має місце попередній зазор  $\Delta$ . Система здійснює переміщення під дією періодичної електромагнітної сили  $F_{ev}$ , що визначається рівнянням (2). Верхня маса  $m_p$  моделює раму з платформою 4, до якої кріпиться двигун вібраційної дії 1. Платформа ізолюється від фундаменту опорними амортизаторами з коефіцієнтом жорсткості  $k_p$ .

За вихідні припущення приймаються наступні: коливальні маси представляють собою абсолютно жорсткі тіла; поведінка пружних елементів описується законом Гука, тобто їхня жорсткість є постійною величиною; маса  $m_p$  враховує також приєднану масу навантаження (масу бетонної суміші тощо); система знаходиться у положенні механічної рівноваги, коли існує статична рівновага між силою тяжіння та силами пружності; удар є прямим і центральним, тобто вектор швидкості та нормалі до поверхні тіл у точці зіткнення проходить через їхні центри мас.

Якщо прийняти за початок координати переміщення положення механічної рівноваги системи (положення мас за відсутності сили  $F_{ev}$ ), то наведеній механічній схемі відповідають рівняння руху

$$\left. \begin{aligned} m_a \frac{d^2 x_a}{dt^2} &= F_{ev} - k_v x - b_v \frac{dx}{dt} - F_{im} - F_{Cf} \operatorname{sign} \frac{dx}{dt}; \\ m_p \frac{d^2 x_p}{dt^2} &= -F_{ev} + k_v x + b_v \frac{dx}{dt} + F_{im} + F_{Cf} \operatorname{sign} \frac{dx}{dt} - k_p x_p - b_p \frac{dx_p}{dt}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

де  $m_a$  – маса якоря двигуна;  $x$  – переміщення якоря двигуна відносно статора;  $k_v$  – коефіцієнт жорсткості пружної підвіски двигуна;  $b_v$  – коефіцієнт в'язкого тертя, який враховує механічні втрати у двигуні;  $F_{im}$  – сила удару;  $F_{Cf}$  – сила сухого кулонівського тертя;  $x_a$  – переміщення якоря відносно нерухомої системи координат ( $x_a = x + x_p$ );  $m_p$  – сумарна маса платформи та приєднана маса навантаження;  $x_p$  – переміщення платформи;  $k_p$  – коефіцієнт жорсткості амортизаторів платформи;  $b_p$  – сумарний коефіцієнт в'язкого тертя, що враховує втрати в амортизаторах платформи та навантаженні.

Для моделювання сили удару приймається сила контактної взаємодії, що описується формулою Герца [6]

$$F_{im} = K_{im} \alpha^{3/2}, \quad (4)$$

де  $\alpha = x - \Delta$  – відносне зближення тіл;  $K_{im}$  – стала, яка враховує властивості матеріалів, що ударяють-

ся, та геометрію зони контакту;  $K_{im} = \frac{4}{3} \frac{q}{(\delta_1 + \delta_2)\sqrt{A+B}}$ ;  $q, A, B$ , – константи, що характеризують геометрію зони контакту;  $\delta_1 = \frac{1-\mu_1^2}{E_1\pi}$ ;  $\delta_2 = \frac{1-\mu_2^2}{E_2\pi}$ ;  $\mu_1, \mu_2, E_1, E_2$  – відповідно коефіцієнти Пуассона та модулі Юнга для обох тіл.

Для випадку, коли ударник має форму сфери з радіусом  $R_1$ , а обмежник представляє собою плоску поверхню,  $A = B = 1/2R_1$ ,  $q = 0,318$  [7].

Сила удару  $F_{im}$  дорівнює величині (4), коли  $x > \Delta$ , і нулю, якщо  $x \leq \Delta$ .

У таблиці наведено вихідні значення параметрів для подальшого розрахунку із застосуванням представлених вище схем заміщення.

Електрична схема заміщення	Коефіцієнт електромагнітної сили $d\Psi_{pm}/dx$ , Н/А	12,5
	Активний опір обмотки статора $R_{sv}$ , Ом	2,67
Механічні параметри ВУС	Маса якоря двигуна $m_a$ , кг	5,8
	Коефіцієнт в'язкого тертя $b_v$ , кг/с	32
	Сила сухого тертя $F_{cf}$ , Н	2,5
	Коефіцієнт жорсткості пружної підвіски двигуна $k_v$ , Н/м	153291
	Маса платформи $m_p$ , кг	31,2
	Коефіцієнт в'язкого тертя $b_p$ , кг/с	35
	Коефіцієнт жорсткості амортизаторів платформи $k_p$ , Н/м	306582
Коефіцієнти моделі удару	Радіус сфери ударника $R_1$ , м	0,2
	Коефіцієнт $q$	0,318
	Коефіцієнт Пуассона сталі (Ст3) $\mu_1$	0,3
	Модуль Юнга сталі (Ст3) $E_1$ , Па	200e9
	Коефіцієнт Пуассона текстоліту $\mu_2$	0,1
	Модуль Юнга текстоліту $E_2$ , Па	1,68e8

**Моделювання електромеханічних характеристик ЛМД у разі роботи на ударне навантаження.** Рішення рівнянь (1)-(4) проводилося чисельно засобами структурного моделювання.

На рис. 2 показано розраховані з використанням представленої моделі криві потужності споживання  $P_v$ , напруги

живлення двигуна  $U_v$ , коефіцієнта потужності  $PF_v$ , коефіцієнта гармонік струму  $THD$ , амплітуди прискорення якоря  $A_{am}$  та платформи  $A_{pm}$  (максимальні за модулем значення), сили удару  $F_{im}$ , амплітуди коливань платформи  $X_{pm}$  залежно від значення попереднього зазору  $\Delta$  між ударником та демпфером.

Діючі значення струму та напруги, активна потужність та коефіцієнт потужності визначаються згідно з результатами чисельного рішення рівнянь (1)-(4).

Коефіцієнт гармонік струму розраховувався за виразом

$$THD = I_H / I_F,$$

де  $I_H = \sqrt{I_2^2 + I_3^2 + \dots + I_n^2}$  – діюче значення струмів гармонічних складових;  $I_2, I_3, \dots, I_n$  – діючі значення струмів другої, третьої, ...  $n$  гармонік;  $I_F$  – діюче значення струму фундаментальної гармоніки.

Амплітуда коливань платформи обчислювалася за основною гармонікою прискорення згідно з виразом

$$|X_{pm}| = \omega^{-2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad (5)$$

де  $a_n = \frac{2}{T} \int_{t-T}^t a_p \cos(n\omega t) dt$ ;  $b_n = \frac{2}{T} \int_{t-T}^t a_p \sin(n\omega t) dt$  – коефіцієнти ряду Фур'є;  $n$  – порядок гармоніки

(тут  $n = 1$ );  $T=1/f$  – період;  $\omega$  – частота коливань.

Характеристики знімалися за умови сталого діючого значення струму двигуна  $I_v = 3,2$  А з частотою  $194,2$  рад<sup>-1</sup>. Інші параметри відповідають зазначеним у таблиці.

Режим ударного навантаження відповідає випадку, коли один удар припадає на один цикл збудження. Для попереднього зазору  $\Delta < 0,0005$  м режим є неперіодичним та неефективним, тому дані для цієї ділянки на рис. 2 не наводяться. Максимальне значення попереднього зазору ( $\Delta = 0,0085$  м) обмежується максимальною амплітудою коливань якоря за даних параметрів системи, струму та частоти.

Як свідчать отримані дані, збільшення зазору призводить до збільшення напруги живлення та потужності споживання, що пояснюється зростанням амплітуди коливань та швидкості якоря, а отже, і ЕРС у рівнянні балансу напруг (1). Загалом значення електричних величин зі зростанням попереднього зазору наближаються до значень, що відповідають вібраційному режиму роботи.

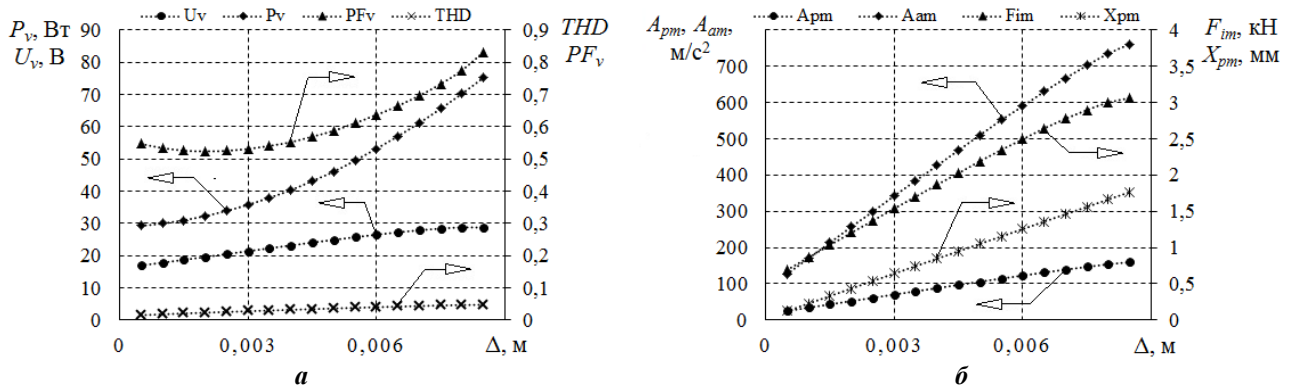


Рис. 2

**Експериментальне дослідження характеристик віброударної системи.** З метою перевірки розрахункової моделі проводилися експериментальні дослідження з застосуванням дослідного зразка лінійного магнітоелектричного двигуна вібраційної дії, що працює у віброударному режимі.

Схема досліду ВУС показана на рис. 3, а, а зовнішній вигляд експериментальної установки – на рис. 3, б. Лінійний двигун 1 жорстко кріпиться до платформи 2, що з'єднується з нерухомою основою через опорні амортизатори.

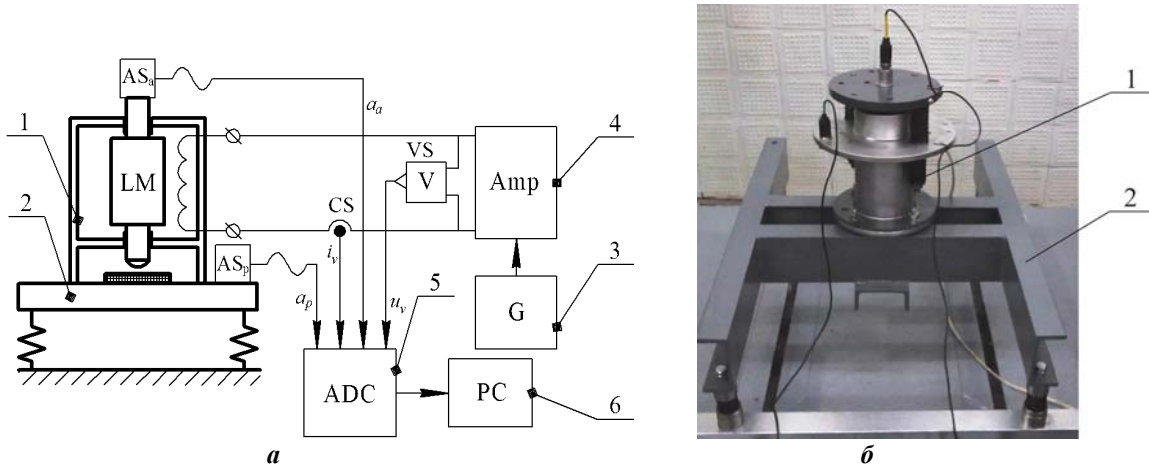


Рис. 3

Живлення двигуна здійснюється від джерела синусоїдної напруги, реалізованого з використанням генератора 3 та підсилювача 4. Прискорення якоря  $a_a$  та платформи  $a_p$  вимірюються датчиками прискорення  $AS_a$ ,  $AS_p$  відповідно. Для вимірювання струму  $i_v$  та напруги  $u_v$  обмотки двигуна використовуються датчики  $CS$  та  $VS$ . Сигнали вимірюваних величин подаються на модуль збору даних 5 і у цифровій формі передаються на комп'ютер 6, який виконує функцію реєстратора.

Дані, виміряні з застосуванням дослідної установки, експортувалися до програмного забезпечення та оброблялися з метою приведення вихідних сигналів датчиків до одиниць вимірюваних фізичних величин відповідно до їхньої чутливості, а також для розрахунків характеристик.

Результати експериментальних досліджень ВУС показано на рис. 4 (маркером). Обробка отриманих даних здійснювалася програмним забезпеченням відповідно до наступних умов. Характеристики відповідають режиму, коли всі електромеханічні процеси в системі є усталеними.

Обчислення діючого значення напруги  $U_v$ , потужності  $P_v$  (рис. 4, а) та коефіцієнта потужності  $PF_v$  (рис. 4, б) здійснювалося на підставі відповідних експериментальних осцилограм.

Амплітуда коливань якоря  $X_m$  (рис. 4, в) для вібраційного режиму розраховувалася згідно з виразом (5) за першою гармонікою миттєвого прискорення якоря. Для віброударного режиму цей показник визначався як максимальне додатне значення, що відповідає руху якоря в напрямку демпфера (рис. 1, б). Амплітуда коливань платформи  $X_{pm}$  (рис. 4, в) розраховувалася згідно із (5) за першою гармонікою прискорення платформи. Амплітуди прискорення якоря  $A_{am}$  та платформи  $A_{pm}$  (рис. 4, з) визначаються як максимальні за модулем значення прискорення в ударному режимі або за основною гармонікою прискорення у вібраційному режимі.

Характеристики знімалися для сталого значення струму двигуна –  $I_v = 3,2$  А і показані залеж-

но від відносної частоти  $\omega/\omega_0$ , де  $\omega_0 = \sqrt{k_v/m_a}$  – власна частота механічної системи ЛМД. Попередній зазор становить  $\Delta = 0,0045$  м.

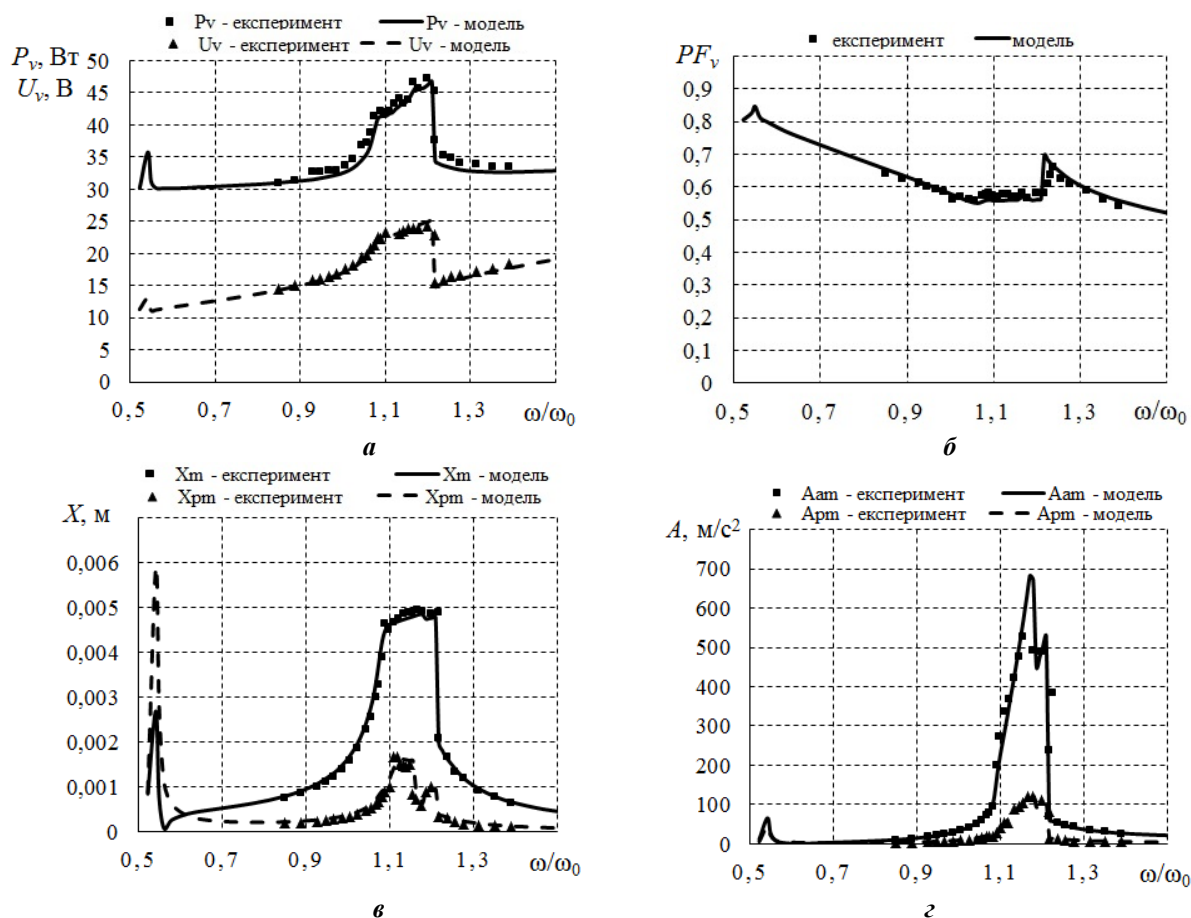


Рис. 4

Під час виконання серії дослідів частота коливань поступово збільшувалася від значення  $0,5\omega_0$  до  $1,5\omega_0$ . Ділянка  $\omega/\omega_0 \approx 1,08 \div 1,21$  характеристик відповідає віброударному режиму, на інших частотах режим є вібраційним.

Періодичний віброударний рух може бути охарактеризований коефіцієнтом  $q_{im} = p_{im}/n_c$ , де  $p_{im}$  – кількість ударів,  $n_c$  – кількість циклів збудження. Тоді для проміжку частоти  $\omega/\omega_0 \approx 1,08 \div 1,17$  відповідний коефіцієнт становить  $q_{im} = 1/2$ , а для частоти  $\omega/\omega_0 \approx 1,17 \div 1,21$  –  $q_{im} = 1/1$ .

Як видно з рис. 4, результати експериментальних досліджень досить добре узгоджуються з характеристиками, розрахованими згідно з представленою вище моделлю, які показані лініями. Це свідчить про те, що розроблена модель може використовуватися для розрахунку електромеханічних процесів віброударних машин із приводом від ЛМД вібраційної дії.

**Висновки.** Запропонована модель дає змогу проводити розрахунки електромеханічних процесів у двомасовій віброударній системі з приводом від лінійного магнітоелектричного двигуна.

Дія ударного навантаження зумовлює виникнення асиметричних режимів коливань, що характеризуються більшими прискореннями робочого органу за невеликих значень частоти.

Як свідчать отримані з застосуванням розробленої моделі дані, зростання попереднього зазору між якорем та демпфером призводить до збільшення напруги живлення та потужності споживання ЛМД, що пояснюється зростанням амплітуди коливань та швидкості якоря. При цьому значення електричних величин наближаються до значень, що відповідають вібраційному режиму роботи.

1. R.A. Oprea, M. Mihailescu, A.I. Chirila and I.D. Deaconu. Design and efficiency of linear electromagnetic shock absorbers. 2012 13th International Conference on Optimization of Electrical and Electronic Equipment (OPTIM), Brasov. 2012. Pp. 630-634. DOI: <https://doi.org/10.1109/OPTIM.2012.6231813>

2. J. Wang, W. Wang, K. Atallah and D. Howe. Design of a linear permanent magnet motor for active vehicle suspension. 2009 IEEE International Electric Machines and Drives Conference, Miami, FL. 2009. Pp. 585-591. DOI: <https://doi.org/10.1109/IEMDC.2009.5075265>

3. Бондар Р.П., Голенков Г.М., Литвин О.Ю., Подольцев О.Д. Моделирование энергетических характеристик вибратора с линейным электрическим приводом. *Електромеханічні і енергозберігаючі системи*. 2013. № 2. С. 66-74.
4. Бондар Р.П. Дослідження характеристик магнітоелектричного лінійного вібраційного двигуна при роботі на пружно-в'язке навантаження. *Електротехніка і Електромеханіка*. 2019. № 1. С. 9-16.  
DOI: <https://doi.org/10.20998/2074-272X.2019.1.02>
5. Бондар Р.П., Подольцев О.Д. Комплексна модель з частотно-залежними параметрами для розрахунку робочих характеристик магнітоелектричного вибратора. *Техн. електродинаміка*. 2017. № 1. С. 44-51.  
DOI: <https://doi.org/10.15407/techned2017.01.044>
6. Bazhenov V.A., Pogorelova O.S., Postnikova T.G., Goncharenko S.N. Comparative analysis of modeling methods for studying contact interaction in vibroimpact systems. *Strength of Materials*. 2009. Vol. 41. No 4. Pp. 392-398.  
DOI: <https://doi.org/10.1007/s11223-009-9143-2>
7. Гольдсмит В. Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел. М.: Стройиздат, 1965. 448 с.

УДК 621.313.323

### МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ЛИНЕЙНОГО МАГНИТО-ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ДВИГАТЕЛЯ ПРИВОДА ДВУХМАССОВОЙ ВИБРОУДАРНОЙ СИСТЕМЫ

**Р.П. Бондар**, канд.техн.наук, **Г.М. Голенков**, канд.техн.наук

**Київський національний університет будівництва і архітектури,**

**пр. Воздухофлотський, 31, Київ, 03037, Україна, e-mail: [rbondar@gmail.com](mailto:rbondar@gmail.com)**

*Предложена модель для исследования электромеханических процессов в двухмассовой виброударной системе с приводом от линейного двигателя, основанная на схеме замещения с сосредоточенными параметрами. Электрические параметры модели зависят от рабочей частоты. Также учитываются магнитные потери в сердечнике двигателя. Для моделирования силы удара принимается сила контактного взаимодействия, которая описывается формулой Герца. Выполнен расчет характеристик двухмассовой электромеханической системы в зависимости от параметров ударной нагрузки и рабочей частоты. Проведены экспериментальные исследования электромеханических характеристик магнітоелектрического двигателя в виброударном режиме работы и выполнен сравнительный расчет с помощью разработанной модели. Библи. 7, табл. 1, рис. 4.*

**Ключевые слова:** виброударная система, электромеханические характеристики, линейный магнітоелектрический двигатель.

### MODELING OF ELECTROMECHANICAL PROCESSES OF THE LINEAR PERMANENT MAGNET ACTUATOR FOR TWO MASS VIBRO-IMPACT SYSTEM

**R.P. Bondar, G.M. Golenkov**

**Kyiv National University of Construction and Architecture,**

**pr. Povitroflotskyi, 31, Kyiv, 03037, Ukraine, e-mail: [rbondar@gmail.com](mailto:rbondar@gmail.com)**

*The paper presents a model for study of electromechanical processes in the linear permanent magnet actuator for two-mass vibro-impact system. The model is grounded on an equivalent circuit with the lumped parameters and takes account the dependence of electric parameters from an operating frequency. The model also considers magnetic losses in the actuator core. We applied the Hertz's formula for modeling of an impact force. Furthermore, we calculated the characteristics of two-mass electromechanical system in dependence of the impact parameters and operating frequency. Besides that, for the validation of the model, we did the comparative calculation of electromechanical characteristics of the linear permanent magnet actuator and experimental investigations for the same system parameters. There is good agreement of the experimental results with the developed model. References 7, table 1, figures 4.*

**Keywords:** electromechanical characteristics, linear permanent magnet actuator, vibro-impact system.

1. Oprea R.A., Mihailescu M., Chirila A.I., Deaconu I.D. Design and efficiency of linear electromagnetic shock absorbers. 13th International Conference on *Optimization of Electrical and Electronic Equipment (OPTIM)*, Brasov. 2012. Pp. 630-634. DOI: <https://doi.org/10.1109/OPTIM.2012.6231813>
2. Wang J., Wang W., Atallah K., Howe D. Design of a linear permanent magnet motor for active vehicle suspension. *IEEE International Electric Machines and Drives Conference*, Miami, FL. 2009. Pp. 585-591.  
DOI: <https://doi.org/10.1109/IEMDC.2009.5075265>
3. Bondar R.P., Golenkov G.M., Lytvun A. Yu., Podoltsev A.D. Modelling of power characteristics of the vibrator with a linear electric drive. *Електромеханічні і енергозберігаючі системи*. 2013. No 2. Pp. 66-74. (Ukr)
4. Bondar R.P. Research of the magnetoelectric linear oscillatory motor characteristics during the work on elastoviscous loading. *Electrical engineering & electromechanics*. 2019. No 1. Pp. 9-16. (Ukr) DOI: <https://doi.org/10.20998/2074-272X.2019.1.02>
5. Bondar R.P., Podoltsev A.D. Complex model with frequency dependent parameters for electrodynamic shaker characteristics. *Tekhnichna Elektrodynamika*. 2017. No 1. Pp. 44-51. (Ukr) DOI: <https://doi.org/10.15407/techned2017.01.044>
6. Bazhenov V.A., Pogorelova O.S., Postnikova T.G., Goncharenko S.N. Comparative analysis of modeling methods for studying contact interaction in vibroimpact systems. *Strength of Materials*. 2009. Vol. 41. No 4. Pp. 392-398.  
DOI: <https://doi.org/10.1007/s11223-009-9143-2>
7. Goldsmith W. Impact. The theory and physical behavior of colliding solids. Moskva: Stroyizdat, 1965. 448 p. (Rus)

Надійшла 19.04.2019

Остаточний варіант 23.04.2019