

АПРОКСИМАЦІЯ ОБВІДНИХ КВАЗИСИНУСОЇДАЛЬНИХ ЦИФРО-АНАЛОГОВИХ СИГНАЛІВ

О.Л. Карасінський*, канд.техн.наук, **Ю.Ф. Тесик****, докт.техн.наук, **Р.М. Мороз*****, канд.техн.наук
Інститут електродинаміки НАН України,
пр. Перемоги, 56, Київ, 03057, Україна.
E-mail: luckyposhta@gmail.com

Обґрунтовано необхідність створення безрозривних сигналів на виході генераторів, які використовуються в автоматизованому метрологічному обладнанні. Запропоновано принцип завдання миттєвих значень сигналів із згладженими обвідними за допомогою базисних сплайнів першого порядку, який є оптимальний з точки зору затрат обладнання та обчислювальної потужності мікроконтролера. Розроблено математичну і комп'ютерну моделі багатозафазного генератора, за допомогою яких проведено дослідження принципів ступінчастої та лінійної апроксимації обвідної сигналів. Наведено часові діаграми процесів відтворення вихідних сигналів із застосуванням сплайн-інтерполяції та без неї. Бібл. 11, рис. 5, табл. 1.

Ключові слова: генератор синусоїдальних сигналів, цифро-аналоговий перетворювач, обвідна синусоїдального сигналу, лінійна апроксимація, базисний сплайн першого порядку.

Вступ. Під час налагодження та перевірки різних пристроїв потрібно досліджувати вплив перепадів напруг та струмів, які виникають під час комутації навантаження [1]. Для цього потрібно використовувати спеціальні генератори, які імітують реальну електричну мережу з заданими нормованими значеннями напруги та/або струму. Для завдання сигналів з параметрами, що не змінюються тривалий час, достатньо використовувати існуючі генератори та калібратори, побудовані на синтезаторах DDS (Direct digital synthesis) [2]. Але під час перемикання параметрів або моделювання коливання напруги чи струму виникають розриви у кривій відповідного сигналу [3], що негативно впливає на апаратуру [4], яка підключена до виходів такого генератора чи калібатора, а також на їхню похибку.

Під час відновлювання дискретизованих сигналів досить ефективно застосовуються сплайни [5, 6]. Тому має сенс дослідити можливість використання сплайнів для відтворення полігармонічних сигналів без розриву миттєвих значень під час зміни їхніх параметрів.

У разі апроксимації функції, обмеженої в деяких інтервалах, наприклад в прямокутнику (x_1, y_1, x_2, y_2) , можна застосувати більш знайомі методи апроксимації та інтерполяції, наприклад, поліноміальну інтерполяцію поліномами Лагранжа [7] або Ньютона [8]. Але коли йде мова про функції, необмежені у часі, то застосувати поліноміальну апроксимацію проблематично, оскільки вона може бути застосована тільки для обмежених інтервалів, а у точках поєднання у загальному вигляді можливо забезпечити тільки безперервність апроксимуючої функції. Набагато кращі результати дає сплайн-апроксимація, яка у випадку застосування базових сплайнів n -го порядку забезпечує безперервність похідних до $(n-1)$ -го порядку. Задля вирішення поставленої у роботі задачі можливо використати сплайни другого або третього порядку (кубічні сплайни), але це занадто збільшить об'єми обчислень та майже непомітно на формі кривих миттєвих значень сигналів. Тому доцільно обмежитися дослідженням використання сплайнів першого порядку.

Мета роботи. Розробити принцип функціонування цифро-аналогових генераторів, вихідні сигнали та обвідні яких залишатимуться нерозривними функціями під час комутаційних стрибків таких параметрів, як амплітуда та/або кут зсуву фази, створити математичну і комп'ютерну моделі такого генератора на основі базисних сплайнів першого порядку та дослідити його характеристики.

Основні матеріали дослідження. У загальному випадку генератор або калібратор, який моделює електричну мережу, формує три напруги $u_A(t)$, $u_B(t)$, $u_C(t)$ та/або три струми $i_A(t)$, $i_B(t)$, $i_C(t)$. Такий генератор повинен завдавати сигнали із заданими частотою, діючими значеннями та кутами зсуву фази (КЗФ) напруг та/або струмів основної (першої) гармоніки. Крім того у деяких випадках до

© Карасінський О.Л., Тесик Ю.Ф., Мороз Р.М., 2022
ORCID ID: * <https://orcid.org/0000-0002-5323-8106>; ** <https://orcid.org/0000-0001-6567-1436>;
*** <https://orcid.org/0000-0002-4292-8160>

сигналів основної гармоніки потрібно підмішувати вищі гармоніки також із заданими діючими

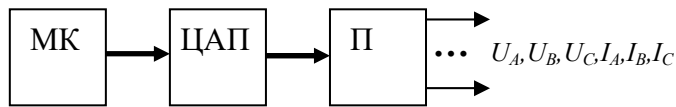


Рис. 1

значеннями та КЗФ. Такі генератори найбільш доцільно створювати на основі мікроконтролерів (МК) та цифро-аналогових перетворювачів (ЦАП). Структурну схему подібного генератора [9] наведено на рис. 1.

В автоматизованому метрологічному обладнанні за допомогою МК задаються коди миттєвих значень сигналів, які послідовно заносяться в ЦАП. Вихідні сигнали ЦАП підсилюються до необхідного рівня та потужності за допомогою підсилювачів П.

Нагадаємо основні положення роботи [9]. Для завдання миттєвих значень сигналів k -ої гармоніки використовуються ортогональні складові комплексної амплітуди (косинусна X_k і синусна Y_k), які визначають комплексну амплітуду цієї гармоніки

$$\dot{U}_k = U_k \cdot e^{j\varphi} = X_k + jY_k, \quad \dot{X}_k = U_k \cdot \cos(\varphi_k), \quad \dot{Y}_k = U_k \cdot \sin(\varphi_k). \quad (1)$$

Увесь період T основної гармоніки сигналу розбито на N рівних інтервалів

$$[T \cdot n / N, \quad T \cdot (n+1) / N], \quad (2)$$

де $n = 0..(N-1)$ – номер інтервалу.

Миттєві значення сигналів у моменти часу t_n задаються у вигляді суми добутків ортогональних складових і відповідних значень синусів та косинусів. Кожний з перелічених вище шести сигналів у інтервалі часу (2) має вигляд “сходинки”

$$u(t_n) = \sum_k (X_k \cdot \sin(2\pi nk / N) + Y_k \cdot \cos(2\pi nk / N)). \quad (3)$$

Для завдання сигналів з параметрами, що не змінюються тривалий час, досить використовувати вираз (3). Однак у разі зміни параметрів сигналів в точках на межі двох сусідніх періодів буде, в загальному випадку, спостерігатися розрив функції, що відіб’ється на миттєвих значеннях сигналів, величини яких залежить від співвідношення нових і попередніх значень амплітуд та КЗФ. У граничному випадку цей розрив дорівнює подвоєному значенню максимальної амплітуди (в сенсі максимально можливого заданого значення), тобто цей ефект максимально проявляється, наприклад, під час перемикання зі стану $U \cdot e^{j\pi/2}$ у $U \cdot e^{-j\pi/2}$. Приклад такого розриву функції (ступінчаста апроксимація обвідної) наведено на рис. 2.

В іншій ситуації, якщо необхідні сигнали з заданими обвідними (наприклад, під час моделювання коливань напруги), описані вище розриви миттєвих значень сигналів будуть повторюватися на межі кожного періоду. При цьому сама обвідна також буде ступінчато апроксимована на кожному періоді, тобто в ній також з’являються розриви. Подібні розриви можуть негативно впливати на досліджуване обладнання, зокрема збивати синхронізацію по частоті першої гармоніки, додавати динамічну похибку вимірювань, вражати імпульсні блоки живлення і т.п.

Без втрати спільності міркувань замість шестифазної системи сигналів виду (3) розглянемо один з сигналів k -ої гармоніки $U_k(t)$.

Відомий метод апроксимації функцій за допомогою базисних сплайнів, окремим випадком якої є лінійна апроксимація [10, 11]. Базисний сплайн 1-го порядку описується “трикутною” функцією

$$S(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t \notin [-T, T], \\ 1+t/T, & \text{при } t \in [-T, 0], \\ 1-t/T, & \text{при } t \in [0, T], \end{cases} \quad (4)$$

де T – період дискретизації функції $f(t)$.

Зауважимо, якщо сплайн (4) представлений у вигляді його миттєвих значень, то для інтервалу часу $[-T, T]$ у моменти $t_n = T \cdot n / N$, $n = -N, \dots, N-1$ його значення дорівнюють

$$S_n = S(t_n) = \begin{cases} 1+n/N, & \text{для } n = -N..0, \\ 1-n/N, & \text{для } n = 1..N. \end{cases}$$

З використанням сплайнів (зокрема сплайнів 1-го порядку) функція $f(t)$ апроксимується виразом

$$f(t) = \sum_m (f_m \cdot S(t - t_m)), \quad (5)$$

де m – номер періоду основної гармоніки сигналу.

Аналогічний підхід можна застосувати до сигналів за виразом (3), але апроксимувати не миттєві значення $U_k(t)$, а комплексну обвідну, дискретні значення якої для періоду з номером m дорівнюють

$$U_{mk}(mT) = (X_{mk} + jY_{mk}) \cdot S(t - t_m). \quad (6)$$

За аналогією з формулою (5) отримаємо для обвідної

$$U_{mk}(t) = \sum_m (X_{mk} + jY_{mk}) \cdot S(t - t_m). \quad (7)$$

В силу того, що сплайн 1-го порядку відмінний від нуля тільки в інтервалі $[-T, T]$, то поведінка апроксимуючої функції між двома вибірками $U_m = U_k \cdot (mT)$ та $U_{m+1} = U_k \cdot ((m+1)T)$ повністю визначається їхніми значеннями. Цим значенням на початку та наприкінці деякого інтервалу довжиною T можна привласнити індекси 1 і 2 відповідно, а шляхом зміщення часу на величину mT цей інтервал можна привести до інтервалу $[0, T]$. Для останнього інтервалу апроксимація обвідної матиме вигляд

$$U_k(t) = (X_{1k} + jY_{1k}) \cdot (1 - t/T) + (X_{2k} + jY_{2k}) \cdot (t/T). \quad (8)$$

Вираз (8) можна розділити на дійсну $X_k(t)$ і уявну $Y_k(t)$ частини

$$U_k(t) = X_k(t) + jY_k(t),$$

де

$$X_k(t) = X_{1k} \cdot (1 - t/T) + X_{2k} \cdot (t/T), \quad Y_k(t) = Y_{1k} \cdot (1 - t/T) + Y_{2k} \cdot (t/T). \quad (9)$$

Тоді миттєві значення відповідного сигналу у моменти часу $t_n = T \cdot n / N, n = 0..(N-1)$ згідно з (3) дорівнюють

$$u_k(t_n) = [X_{1k} \cdot (1 - n/N) + X_{2k} \cdot (n/N)] \cdot \sin((2\pi kn/N) + \\ + [Y_{1k} \cdot (1 - n/N) + Y_{2k} \cdot (n/N)] \cdot \cos((2\pi kn/N)). \quad (10)$$

З виразу (10) видно, що участь у формуванні сигналу приймають три масиви даних – значення ортогональних складових гармоніки X_{mk}, Y_{mk} , константи виду n/N та константи виду $\sin(2\pi n/N)$, до множини яких належать всі значення синусів $\sin(2\pi nk/N)$ і косинусів $\cos(2\pi nk/N)$.

Таким чином, маючи масив ортогональних складових для кожного інтервалу часу довжиною не менше періоду, можна розрахувати миттєві значення вихідних сигналів ЦАП за формулою (10). Причому формулу (10) можна застосувати тільки у разі зміни значень параметрів сигналу (амплітуди і/або фази). Якщо параметри не змінюються, тобто $X_{1k} = X_{2k}, Y_{1k} = Y_{2k}$, то формула (10) вироджується в формулу (3).

Для прикладу на рис. 2 та рис. 3 наведено графік одного з вихідних сигналів (задається тільки перша гармоніка). На рис. 2 – без апроксимації обвідної (ступінчата апроксимація), а на рис. 3 – з апроксимацією обвідної сплайном першого порядку (лінійна апроксимація). На обох графіках

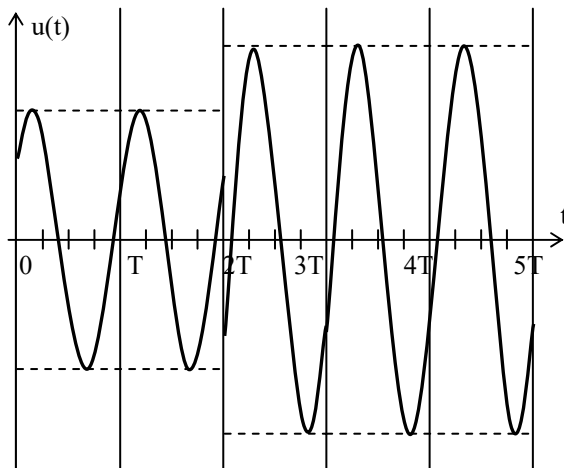


Рис. 2

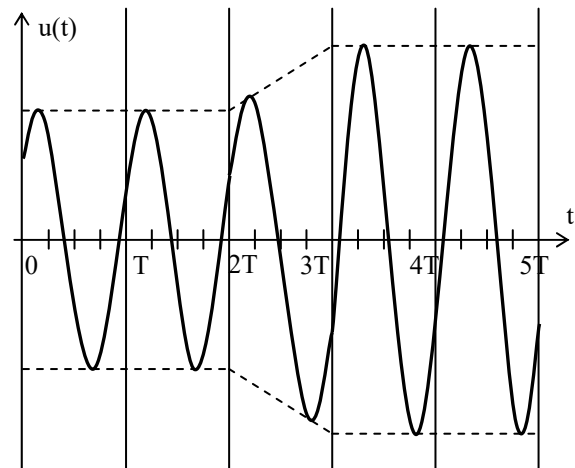


Рис. 3

параметри X_1, Y_1 відповідають амплітуді 100 V та КЗФ + 30°, а параметри X_2, Y_2 – амплітуді 150 V та КЗФ -30°.

У разі якщо формуються сигнали тільки першої гармоніки, то можна ще більше спростити обчислення миттєвих значень сигналів, створивши масиви добутків "трикутної" функції та функцій синусів і косинусів. При цьому, з огляду на непарність і парність функцій синуса та косинуса, достатньо розрахувати масиви констант тільки для одного періоду для $n = 0 \dots (N - 1)$

$$MS[n] = -MS[-n] = \sin(2\pi n / N) \cdot (1 - n / N), \quad MC[n] = MC[-n] = \cos(2\pi n / N) \cdot (1 - n / N), \quad (11)$$

де у квадратних дужках тут і далі наведено індекси елементів масивів.

Константи з масивів $MS[n]$ і $MC[n]$ відповідають вибіркам функцій $\sin(2\pi t / T) \cdot S(t)$ і $\cos(2\pi t / T) \cdot S(t)$ та показані на рис. 4. В цьому разі миттєві значення сигналу $u(t_n)$ у інтервалі $[0, T]$ визначаються виразом

$$u(t_n) = X_1 \cdot MS[n] - X_2 \cdot MS[N - n] + Y_1 \cdot MC[n] + Y_2 \cdot MC[N - n]. \quad (12)$$

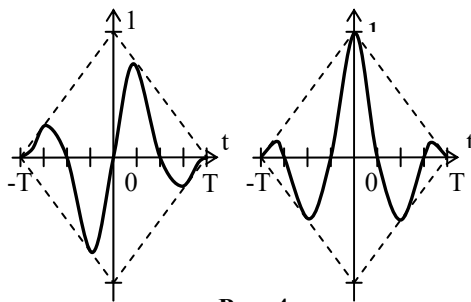


Рис. 4

Застосування формул (10) або (12) під час розрахунку миттєвих значень сигналів не вимагає складних алгоритмів або обчислення тригонометричних функцій. В сучасних МК більшість інструкцій, у тому числі і множення, виконуються за один такт, тому самі обчислення миттєвих значень можуть здійснюватися в процедурі обробки переривання таймера, що задає крок дискретизації вихідних сигналів ЦАП [9]. Обчислення ортогональних складових гармонік X_k, Y_k виконується в основному тілі програми для кожного наступного періоду або задається у вигляді масивів деяких констант, що

відображають бажану форму обвідної. В кінці періоду складові X_{1k}, Y_{1k} заміщуються складовими X_{2k}, Y_{2k} , а в X_{2k}, Y_{2k} заносяться знову розраховані значення X_k, Y_k .

З практичної точки зору лінійну апроксимацію переходу від сигналів з параметрами $Prms(t_1)$ у момент часу t_1 до сигналів з параметрами $Prms(t_2)$ у момент часу t_2 можна здійснити наступним чином.

Із даних параметрів $Prms(t_1)$ розраховують по формулам (3) масив миттєвих значення сигналів $V_1[ch, n]$, де ch – номер каналу, n – номер вибірки, та послідовно видають їх на ЦАП. Потім із даних параметрів $Prms(t_2)$ розраховують масив миттєвих значення сигналів $V_2[ch, n]$. Коли виникає потреба перейти від сигналів з параметрами $Prms(t_1)$ до сигналів з параметрами $Prms(t_2)$ розраховується допоміжний масив миттєвих значень $V_3[ch, n]$, елементи якого дорівнюють

$$V_3[ch, n] = V_1[ch, n] \cdot (1 - n / N) + V_2[ch, n] \cdot n / N. \quad (13)$$

Далі на один період основної гармоніки перемикаємось на видачу в ЦАП миттєвих значень сигналів із масиву $V_3[ch, n]$, а на наступному періоді в ЦАП видаємо миттєві значення сигналів з масиву $V_2[ch, n]$.

Використання принципу завдання миттєвих значень сигналів із згладженими обвідними за допомогою базисних сплайнів першого порядку є оптимальним з точки зору мінімізації *апаратних витрат* і обчислювальних можливостей мікропроцесора для його реалізації з одного боку та досягненням задовільних результатів з усунення розривних функцій на виходах цифро-аналогових генераторів з іншого боку.

У середовищі *C Builder* було розроблено комп'ютерну модель багатофазного генератора, за допомогою якої проведено дослідження принципів ступінчатої та лінійної апроксимації обвідної сигналів. На рис. 5 наведено скріншот з програми, зроблені під час моделювання для деяких варіантів сигналів, параметри яких вказано в таблиці. Для спрощення показано графіки сигналів тільки в одному каналі для трьох суміжних періодів. Індекси напруги та КЗФ відповідають номеру гармоніки, що задається. Для кожного набору параметрів $Prms(t_1)$ і $Prms(t_2)$ показані два графіка сигналу – ліворуч для ступінчатої, а праворуч для лінійної апроксимації обвідної. Вертикальні лінії на графіках відповідають межах періодів. Для графіків із ступінчатою апроксимацією обвідної перший період відповідає параметрам $Prms(t_1)$, а другий і третій – $Prms(t_2)$.

Параметри $Prms(t_1)$	Параметри $Prms(t_2)$	Ступінчата апроксимація	Лінійна апроксимація
$U_1 = 220V, \varphi_1 = +30^\circ$	$U_1 = 180V, \varphi_1 = -30^\circ$	Рис. 5, а	Рис. 5, б
$U_1 = 180V, \varphi_1 = -30^\circ$	$U_1 = 220V, \varphi_1 = +30^\circ$	Рис. 5, в	Рис. 5, г
$U_1 = 220V, \varphi_1 = +30^\circ$ $U_5 = 50V, \varphi_5 = +60^\circ$	$U_1 = 180V, \varphi_1 = -30^\circ$ $U_3 = 40V, \varphi_3 = -20^\circ$	Рис. 5, д	Рис. 5, є
$U_1 = 180V, \varphi_1 = -30^\circ$ $U_3 = 40V, \varphi_3 = -20^\circ$	$U_1 = 220V, \varphi_1 = +30^\circ$ $U_5 = 50V, \varphi_5 = +60^\circ$	Рис. 5, ж	Рис. 5, з
$U_1 = 220V, \varphi_1 = 180^\circ$	$U_1 = 220V, \varphi_1 = 0^\circ$	Рис. 5, і	Рис. 5, к
$U_1 = 220V, \varphi_1 = +90^\circ$	$U_1 = 220V, \varphi_1 = -90^\circ$	Рис. 5, л	Рис. 5, м

Для лінійної апроксимації обвідної перший період відповідає параметрам $Prms(t_1)$, третій – $Prms(t_2)$, а другий – переходу від параметрів $Prms(t_1)$ до параметрів $Prms(t_2)$, причому миттєві значення сигналів розраховані згідно формули (13).

Як видно з наведених графіків не всі переходи з одного до другого стану забезпечують прийнятні форми кривої. Зокрема у разі перемикання фаз на 180° з'являються хибні переходи через нуль (рис. 5, к, м). Щоб позбутися цього явища в деяких випадках перемикання з одного до іншого стану треба виконувати за два періоди, тобто спочатку змінити фазу на 90° , а потім ще на 90° .

У даній роботі апроксимація обвідних гармонік досліджувалася при завданні їхніх значень на кожному періоді основної гармоніки. Але ніщо не забороняє задавати додаткові значення в середині періоду основної гармоніки або збільшувати інтервал дискретизації обвідної до декількох періодів.

Висновки. Запропонований принцип апроксимації обвідних гармонік надав змогу здійснити відтворення сигналу без розриву його миттєвих значень, що сприятливо позначається на працездатності досліджуваного обладнання. Результати досліджень за допомогою створеної комп'ютерної моделі генератора підтверджують ефективність запропонованого принципу, що витікає з порівняння часових діаграм вихідних сигналів генератора із запровадженням апроксимації обвідних і без неї (рис. 5). Теоретичні результати буде використано під час створення та експериментального дослідження фізичної моделі генератора з нерозривними вихідними сигналами для подальшого впровадження у серійне виробництво.

Роботу виконано за держбюджетною темою «Розвиток теоретичних основ прецизійного вимірювання режимних параметрів електричних мереж і створення нових методів відтворення електричних величин» (шифр «Юнітер-7»), КПКВК 6541030.

1. EN 61000-4-30:2009. Електромагнітна сумісність (EMC). Частина 4-30. Методики випробування та вимірювання. Вимірювання показників якості електричної енергії. URL: <http://www.loe.ant.lviv.ua/home/dokumenty/gost-dstu?tmpl=%2Fsystem%2Fapp%2Ftemplates%2Fprint%2F&showPrintDialog=1> (дата доступу 02.09.2021)

2. Всё о синтезаторах DDS. URL: <https://kit.e.ru/powersource/vsyo-o-sintezatorah-dds/> (дата доступу 12.09.2021)

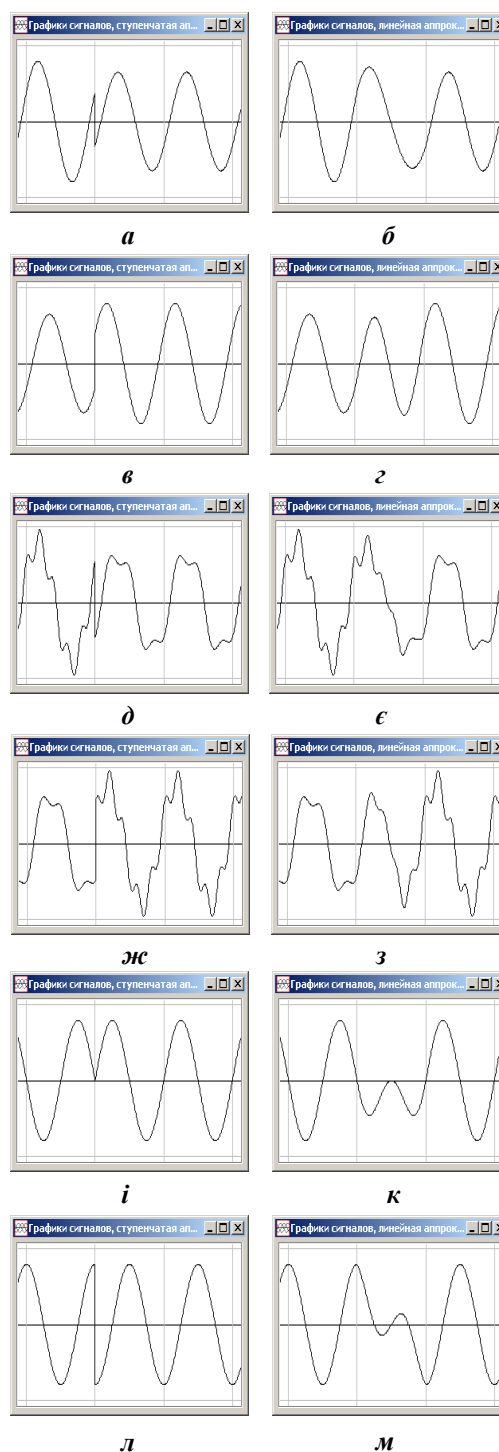


Рис. 5

3. Дедюхин А.А. Исследование сигналов с применением спектрального анализа цифровых осциллографов. Эквивалентная дискретизация цифровых осциллографов LeCroy URL: https://prist.ru/library/stati/issledovanie_signalov_s_primeneniem_spektralnogo_analiza_cifrovyyh_oscillografov_ekvivalentnaya_diskr/ (дата доступа 2.10.2021)
4. Akagi H. New trends in active filters for improving power quality. Proceedings of International Conference on Power Electronics, Drives and Energy Systems for Industrial Growth. 1996. Vol. 1. Pp. 417–425. DOI: <https://doi.org/10.1109/PEDES.1996.539652>
5. Михотин В.Д., Чувькин Б.В. Использование сплайнов для восстановления дискретизированных сигналов. *Измерения, контроль, автоматизация*. 1982. № 3 (43). С. 17–24.
6. Таранов С.Г., Борщева Н.О., Васильев Э.П., Карасинский О.Л., Тульчинский Д.Ю. Применение сплайн интерполяторов в самопишущих приборах с преобразованием масштаба времени. *Электронное моделирование*. 1988. № 3. С.72–77.
7. Lagrange polynomial. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Lagrange_polynomial (дата доступа 09.12.2021)
8. Newton polynomial. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Newton_polynomial (дата доступа 09.12.2021)
9. Карасинский О.Л., Тесик Ю.Ф. Многофазный генератор для моделирования параметров трехфазной сети. *Праці Ін-ту електродинаміки НАНУ. Електротехніка*. 2001. Вип. 7. С. 98–104.
10. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 350 с.
11. Корнейчук Н.П. Сплайны в теории приближения. М.: Наука, 1984. 352 с.

APPROXIMATION ENVELOPES OF QUASI-SINUSOIDAL DIGITAL-ANALOG SIGNALS

O.L. Karasinskiy, Yu.F. Tesik, R.M. Moroz
Institute of Electrodynamics National Academy of Sciences of Ukraine,
pr. Peremohy, 56, Kyiv, 03057, Ukraine.
E-mail: luckyposhta@gmail.com

The principle of setting the instantaneous values of signals with smoothed envelopes using first-order basis splines, which is optimal from the point of view of equipment costs and the computing power of a microprocessor is proposed. A computer model of a multiphase generator has been developed with the help of which the principles of stepwise and linear approximation of the signal envelope have been investigated. References 11, figures 5, table 1.

Key words: digital-to-analog converter, envelope of sinusoidal signal, linear approximation, first order basis spline.

1. EN 61000-4-30:2009. Electromagnetic compatibility (EMC). Part 4-30. Test and measurement methods. Measurement of electricity quality indicators. URL: <http://www.loe.ant.lviv.ua/home/dokumenty/gost-dstu?tmpl=%2Fsystem%2Fapp%2Ftemplates%2Fprint%2F&showPrintDialog=1> (accessed 02.09.2021) (Ukr)
2. All about synthesizers DDS. URL: <https://kit-e.ru/powersource/vsyo-o-sintezatorah-dds/> (accessed 12.09.2021) (Rus)
3. Dedyukhin A.A. Signal research using spectral analysis of digital oscilloscopes. Equivalent sampling of digital oscilloscopes LeCroy. URL: https://prist.ru/library/stati/issledovanie_signalov_s_primeneniem_spektralnogo_analiza_cifrovyyh_oscillografov_ekvivalentnaya_diskr/ (accessed 02.10.2021) (Rus)
4. Akagi H. New trends in active filters for improving power quality. Proceedings of International Conference on Power Electronics, Drives and Energy Systems for Industrial Growth. 1996. Vol. 1. Pp. 417–425. DOI: <https://doi.org/10.1109/PEDES.1996.539652>
5. Mikhotin V.D., Chuvykin B.V. Using splines for restore discretized signals. *Izmereniia, kontrol, avtomatizatsiia*. 1982. No 3 (43). Pp.17–24. (Rus)
6. Taranov S. G., Borshcheva N. O., Vasiliev E. P., Karasinsky O. L., Tulchinsky D. Yu. Application of spline interpolators in recorders with time scale transformation. *Elektronnoe modelirovanie*. 1988. No 3. Pp.72–77. (Rus)
7. Lagrange polynomial. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Lagrange_polynomial (accessed 09.12.2021)
8. Newton polynomial. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Newton_polynomial (accessed 09.12.2021)
9. Karasinsky O.L., Tesik Iu.F. Multiphase generator for simulating the parameters of a three-phase network. *Pratsi Instytutu Elektrodynamiky Natsionalnoi Akademii Nauk Ukrainy. Elektrotehnika*. 2001. No 7. Pp. 98–104. (Rus)
10. Zavyalov Yu.S., Kvasov B.I., Miroshnichenko V.L. Spline-function methods. Moskva: Nauka, 1980. 350 p. (Rus)
11. Korneichuk N.P. Splines in approximation theory. Moskva: Nauka, 1984. 352 p. (Rus)

Надійшла 29.12.2021
Остаточний варіант 28.02.2022