

## ТРИВИМІРНА МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ТРИФАЗНОГО ТЕПЛОГЕНЕРАТОРА ІНДУКЦІЙНОГО ТИПУ З ВИКОРИСТАННЯМ МЕТОДУ ВТОРИННИХ ДЖЕРЕЛ

А.В. Жильцов<sup>1\*</sup>, докт. техн. наук, А.О. Березюк<sup>2\*\*</sup>, канд. техн. наук, Т.В. Виштак<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Інститут електродинаміки НАН України,  
пр. Перемоги, 56, Київ, 03057, Україна.

E-mail: [azhilt@gmail.com](mailto:azhilt@gmail.com)

<sup>2</sup>Національний університет біоресурсів і природокористування України,  
вул. Героїв Оборони, 15, Київ, 03041, Україна.

*Розроблено тривимірну математичну модель трифазного теплогенератора індукційного типу із загрузкою у вигляді пучка феромагнітних провідних труб з використанням методу вторинних джерел. Враховано симетрію магнітної системи теплогенератора, що надало змогу суттєво скоротити область пошуку невідомих густин вторинних джерел електромагнітного поля. Бібл. 6, рис. 3.*

**Ключові слова:** теплогенератор, індукційний нагрів, моделювання, метод вторинних джерел.

Застосування в технологіях сушіння матеріалів природного та штучного походження теплогенераторів індукційного типу обумовлено можливістю безконтактного впливу на теплоносії, що має переваги на відміну від традиційних теплогенераторів, де сушильним агентом є нагріте повітря продуктами згоряння мінерального палива, що призводить до забруднення продукції канцерогенами, погіршення екології, створює небезпеку виникнення пожежі за рахунок можливих відкладень пилу та сміття на камерах згорання палива, яке може спалахнути.

Незважаючи на досить широке промислове впровадження вказаних технологій [1], питання створення нових та удосконалення відомих систем індукційного нагріву для технологій сушіння матеріалів природного та штучного походження залишаються актуальними, а методи їхнього проектування вимагають подальшого розвитку та узагальнення. Вагомого значення набуває пошук загальних підходів до аналізу та розробки математичних моделей електромагнітних процесів та процесів тепломасопереносу у розглянутому класі електротехнічних пристроїв на основі єдиної теоретичної бази.

Математичне моделювання впливу технологічних процесів і конструктивних параметрів на ефективність сушіння вимагає розв'язання в загальному випадку тривимірних крайових задач для системи рівнянь Максвелла в необмеженій області, що містить геометрично складні феромагнітні та провідні тіла, рівняння тепломасопереносу. Незважаючи на досягнуті результати в області моделювання електромагнітних процесів та процесів тепломасопереносу [2–4], розробка ефективних методів і засобів математичного та комп'ютерного моделювання систем індукційного нагріву для сушіння матеріалів природного та штучного походження є актуальною науково-прикладною задачею.

В роботі [5] проведено дослідження чисельно-аналітичних математичних моделей для розрахунку електромагнітних та теплових полів електричних нагрівачів індукційного типу, а також розроблено аналітичний метод розрахунку енергетичних характеристик циліндричного індуктора із завантаженням у вигляді пучка труб чи стержнів. Встановлено взаємозв'язки між процесами, що відбуваються під час сушіння та режимами роботи теплогенератора. Проведені дослідження виявили можливості підвищення енергоефективності процесу сушіння матеріалів природного та штучного походження за рахунок інтенсифікації режимів сушіння, а також вдосконалення математичних моделей з використанням методу редукції крайових задач для рівнянь електромагнітного поля та рівнянь тепломасопереносу до систем інтегрально-диференціальних рівнянь для розрахунку характеристик електромагнітних і теплових полів в теплогенераторі індукційного типу з урахуванням тривимірності складної геометрії та нелінійних властивостей масивних феромагнітних елементів.

**Мета роботи:** розробка з використанням методу вторинних джерел математичної моделі для аналізу тривимірного магнітного поля у трифазному теплогенераторі індукційного типу з урахуванням симетрії його геометрії.

**Крайова задача та інтегральні рівняння.** Розглянемо трифазний теплогенератор індукційного типу (рис. 1).

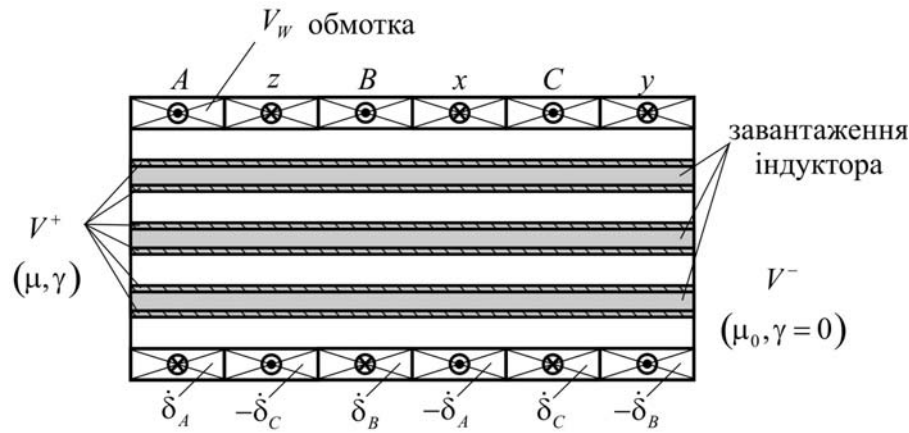
© Жильцов А.В., Березюк А.О., Виштак Т.В., 2022

ORCID ID: \* <https://orcid.org/0000-0002-1688-7879>; \*\* <https://orcid.org/0000-0003-0305-5894>

Задачу будемо розв'язувати у припущенні, що у трифазній обмотці індуктора протікають синусоїдні струми (рис. 1)

$$\delta_A = \delta_{\max} \sin(\omega t), \quad \delta_B = \delta_{\max} \sin(\omega t + 2\pi/3), \quad \delta_C = \delta_{\max} \sin(\omega t - 2\pi/3). \quad (1)$$

Вважаємо, що обмотку кожної фази представлено у вигляді коаксіальних кілець, а завантаження індуктору – у вигляді



провідних феромагнітних труб (рис. 1).

Розглянемо задачу розрахунку електромагнітного поля у теплогенераторі індукційного типу за припущення постійної магнітної проникності та питомої провідності феромагнітних труб в квазістаціонарному наближенні.

Задачу аналізу електромагнітного поля в теплогенераторі індукційного типу можна сформулювати

Рис. 1

в такий спосіб [6]: знайти комплексну амплітуду густини вихрових струмів в області  $V^+$  (рис. 1) за умови, що вектори  $\dot{\vec{H}}$  та  $\dot{\vec{E}}$  задовольняють рівнянням:

– в області  $V_W$ , що займають котушки зі густиною струму  $\dot{\delta}_W(Q)$ ,

$$\text{rot} \dot{\vec{H}} = \dot{\delta}_W, \quad \text{div} \dot{\vec{B}} = 0; \quad (2)$$

– в області  $V^-$  зовнішній по відношенню до магнітної системи теплогенератора індукційного типу

$$\text{rot} \dot{\vec{H}} = 0, \quad \text{div} \dot{\vec{B}} = 0, \quad \text{rot} \dot{\vec{E}} = -j\omega \dot{\vec{B}}, \quad \text{div} \dot{\vec{E}} = 0; \quad (3)$$

– в області  $V^+$ , що займають феромагнітні труби,

$$\text{rot} \dot{\vec{H}} = \dot{\delta}, \quad \text{div} \dot{\vec{B}} = 0, \quad \text{rot} \dot{\vec{E}} = -j\omega \dot{\vec{B}}, \quad \text{div} \dot{\vec{E}} = 0, \quad \dot{\delta} = \gamma \dot{\vec{E}}; \quad (4)$$

– крайові умови на поверхні  $S$  феромагнітного провідника

$$\vec{n}_Q \times (\dot{\vec{E}}^+ - \dot{\vec{E}}^-) = 0; \quad \vec{n}_Q \times (\dot{\vec{H}}^+ - \dot{\vec{H}}^-) = 0; \quad \oint_S \dot{\vec{E}}^- \cdot d\vec{S} = 0, \quad (5)$$

де  $\vec{n}_Q$  – зовнішня по відношенню до феромагнітних провідних труб нормаль у точці  $Q$  їхньої границі;  $\dot{\vec{E}}^+$ ,  $\dot{\vec{E}}^-$  – граничні значення напруженості електричного поля в точці  $Q$  у разі прагнення до неї відповідно з внутрішньої та зовнішньої сторони масивного феромагнітного провідника;  $\dot{\vec{H}}^+$ ,  $\dot{\vec{H}}^-$  – те саме для напруженості магнітного поля.

Система рівнянь (2) – (4) спільно з крайовими умовами (5) є повною, тобто крайова задача (2) – (5) може мати тільки єдиний розв'язок.

Введенням електродинамічних потенціалів  $\dot{\vec{A}}$  та  $\dot{\phi}$

$$\dot{\vec{B}} = \text{rot} \dot{\vec{A}}, \quad \text{div} \dot{\vec{A}} = 0, \quad \dot{\vec{E}} + j\omega \dot{\vec{A}} = -\text{grad} \dot{\phi}, \quad (6)$$

крайова задача (2) – (5) для векторів  $\dot{\vec{E}}$  та  $\dot{\vec{H}}$  перетворюється до крайової задачі [6]

$$\Delta \dot{\vec{A}} = -\mu_0 \dot{\delta}_W \text{ в області } V_W; \quad \Delta \dot{\vec{A}} = 0 \text{ в області } V^-; \quad \Delta \dot{\vec{A}} = -\mu_0 \dot{\delta} \text{ в області } V^+; \quad (7)$$

$$\dot{\delta} = -j\omega \gamma \dot{\vec{A}} - \gamma \text{grad} \dot{\phi} \text{ в області } V^+; \quad (8)$$

$$\Delta \dot{\phi} = 0 \text{ в областях } V_W, V^-, V^+; \quad (9)$$

$$\dot{\vec{A}}^- = \dot{\vec{A}}^+, \quad \frac{1}{\mu_0} \vec{n}_Q \times \text{rot} \dot{\vec{A}}^- = \frac{1}{\mu} \vec{n}_Q \times \text{rot} \dot{\vec{A}}^+, \quad \dot{\phi}^+ = \dot{\phi}^-, \quad \frac{\partial \dot{\phi}^+}{\partial n_Q} = -j\omega (\vec{n}_Q \cdot \dot{\vec{A}}^+), \quad \oint_S \frac{\partial \dot{\phi}^-}{\partial n_Q} dS_Q = 0 \text{ – на границі } S. \quad (10)$$

Остання задача в [6] зводиться до системи інтегральних рівнянь

$$\dot{\delta}(Q) + \frac{j\omega\mu\gamma}{4\pi} \int_{V^+} \frac{\dot{\delta}(M)}{r_{MQ}} dV_M + \frac{j\omega\mu_0\gamma}{4\pi} \oint_S \frac{\dot{i}(M)}{r_{MQ}} dS_M + \frac{\gamma}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\dot{\sigma}(M) \vec{r}_{MQ}}{r_{MQ}^3} dS_M = -\frac{j\omega\mu_0\gamma}{4\pi} \sum_{k=1}^{N_w} \int_{V_{wk}} \frac{\dot{\delta}_w(M)}{r_{MQ}} dV_M, \quad Q \in V^+, \quad (11)$$

$$\dot{i}(Q) + \frac{\lambda}{2\pi} \oint_S \frac{\dot{i}(M) \vec{n}_Q \vec{r}_{MQ}}{r_{MQ}^3} dS_M + \frac{\lambda \mu}{2\pi\mu_0} \int_{V^+} \frac{\dot{\delta}(M) \vec{n}_Q \vec{r}_{MQ}}{r_{MQ}^3} dV_M = -\frac{\lambda}{2\pi} \sum_{k=1}^{N_w} \int_{V_{wk}} \frac{\dot{\delta}_w(M) \vec{n}_Q \vec{r}_{MQ}}{r_{MQ}^3} dV_M, \quad Q \in S, \quad (12)$$

$$\dot{\sigma}(Q) - \frac{1}{2\pi} \oint_S \frac{\dot{\sigma}(M) \left[ \frac{\vec{n}_Q \vec{r}_{MQ}}{r_{MQ}^3} - \frac{2\pi}{S} \right]}{dS_M} + \frac{j\omega\epsilon_0\mu}{2\pi} \int_{V^+} \frac{\vec{n}_Q \dot{\delta}(M)}{r_{MQ}} dV_M + \frac{j\omega\epsilon_0\mu_0}{2\pi} \int_S \frac{\vec{n}_Q \dot{i}(M)}{r_{MQ}} dS_M = -\frac{j\omega\epsilon_0\mu_0}{2\pi} \sum_{k=1}^{N_w} \int_{V_{wk}} \frac{\vec{n}_Q \dot{\delta}_w(M)}{r_{MQ}} dV_M, \quad Q \in S, \quad (13)$$

де  $\dot{\delta}(Q)$  – комплексна амплітуда густини вихрових струмів у точці  $Q$  феромагнітних провідних труб  $V^+$ ;  $\dot{\delta}(M)$  – те саме у точці  $M$ ;  $\dot{i}(Q)$  – комплексна амплітуда поверхневої густини простого шару струмів у точці  $Q$  на границі  $S$  феромагнітних провідних труб;  $\dot{i}(M)$  –  $\dot{\sigma}(Q)$  – комплексна амплітуда густини простого шару електричних зарядів у точці  $Q$  на границі  $S$  феромагнітних провідних труб;  $\dot{\sigma}(M)$  – те саме у точці  $M$ ;  $j = \sqrt{-1}$ ;  $\omega = 2\pi f$ ,  $f$  – частота електричних струмів в обмотках індуктора;  $\mu$ ,  $\gamma$  – абсолютна магнітна проникність, питома електрична провідність феромагнітних провідних труб;  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м,  $\epsilon_0 \approx 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м – магнітна та діелектрична постійні;  $\vec{r}_{MQ}$  – радіус-вектор, що спрямований з точці інтегрування  $M$  у точку спостереження  $Q$ ;  $\dot{\delta}_w(M)$  – комплексна амплітуда густини струмів у обмотках індуктора  $V_{wk}$ ,  $k=1,2,\dots,N_w$ ,  $N_w$  – число обмоток індуктора;  $\vec{n}_Q$  – зовнішня нормаль к границі  $S$  феромагнітних провідних труб;  $\lambda = (\mu - \mu_0) / (\mu + \mu_0)$  – параметр інтегрального рівняння (12).

**Апроксимація системи інтегральних рівнянь (11) – (13) системою лінійних алгебраїчних рівнянь з урахуванням симетрії магнітної системи теплогенератора.** На рис. 2 наведено переріз магнітної системи теплогенератора індукційного типу, де зображено положення феромагнітних провідних труб і переріз однієї з обмоток індуктора. Нехай  $R_1$ ,  $R_2$  – внутрішній та зовнішній радіуси кожної феромагнітної провідної труби,  $h$  – їхня довжина, відповідно і довжина індуктора. Навантаження з  $N_r$  шарів феромагнітних труб формується таким чином: кожен  $k$ -тий шар труб  $V_k^{m_k}$ ,  $k=1,2,\dots,N_r$ ,  $m_k=1,2,\dots,6k$ , розташований таким чином, що положення кожної з них задається положенням їхніх геометричних центрів  $O_k^{m_k}$  із координатами  $(r_k, \alpha_k^{m_k}, z_1)$  в глобальній системі циліндричних координат  $O r \alpha z$  (рис. 3, вісь  $z$  спрямована з площини рисунка до нас). Тут  $\alpha_k^{m_k} = \alpha_k^1 + (m_k - 1)\pi/3k$ ,  $m_k=1,2,\dots,6k$ ,  $(r_k, \alpha_k^1, z_1)$  – координати геометричного центру першої феромагнітної провідної труби у  $k$ -му шарі. Для випадку, що зображено на рис. 2,  $\alpha_k^1 = \pi/3$ ,  $k=1,2,\dots,N_r$ . В подальшому із кожною феромагнітною провідною трубою зв'яжемо локальну систему циліндричних координат  $O_k^{m_k} r_k^{m_k} \alpha_k^{m_k} z_k^{m_k}$  (рис. 3). Через таке формування геометрії навантаження є можливість зменшити пошук невідомих комплексних амплітуд густин вихрових струмів, струмів намагнічування та електричних зарядів під час розв'язання системи інтегральних рівнянь (11) – (13), що буде показано далі.

Розбиваємо кожну  $(k, m_k)$ -ту феромагнітну провідну трубу  $V_k^{m_k}$   $R_1 < r_k^{m_k} < R_2$ ,  $-\pi < \alpha_k^{m_k} < \pi$ ,  $-h/2 < z_k^{m_k} < h/2$  на  $NV_k^{m_k}$  ( $NV_k^{m_k}$  обираємо кратним 2) елементарних об'ємів  $\Delta V_k^{m_k l}$  (рис. 3),  $k=1,2,\dots,N_r$ ;  $m_k$  – номер феромагнітної труби в шарі,  $m_k=1,2,\dots,6k$ ,  $l=1,2,\dots,NV_k^{m_k}$ . У кожному згаданому елементарному об'ємі  $\Delta V_k^{m_k l}$  будемо вважати, що протікає свій вихровий струм з комплексною амплітудою густини  $\dot{\delta}_k^{m_k l}$ . Аналогічно розбиваємо поверхню  $S_k^{m_k}$  кожної  $(k, m_k)$ -тої феромагнітної

провідної труби на  $NS_k^{m_k}$  елементарних площадок  $\Delta S_k^{m_k p}$ ,  $p=1,2,\dots,NS_k^{m_k}$ , на кожній з яких вважаємо, що протікає свій поверхневий струм намагнічування з амплітудною комплексною густиною  $\dot{i}_k^{m_k p}$ , а також є своя комплексна амплітуда густини простого шару електричних зарядів  $\dot{\sigma}_k^{m_k p}$ .

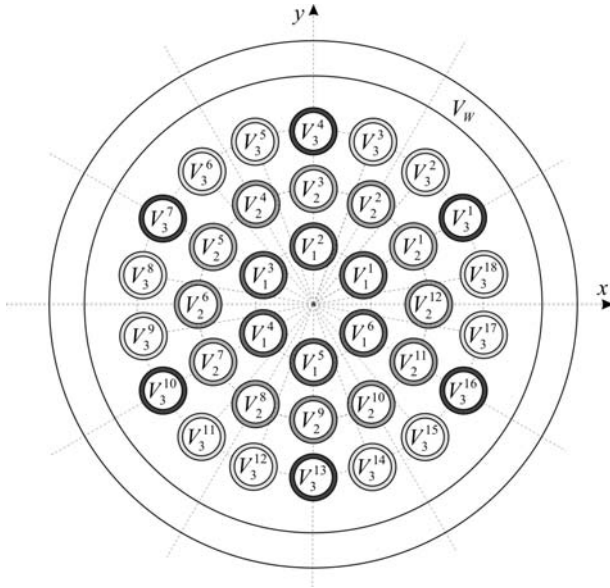


Рис. 2

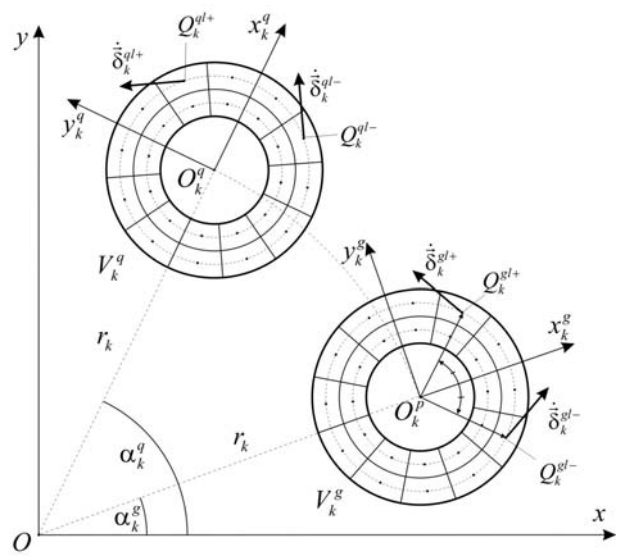


Рис. 3

Враховуючи прийняті припущення, систему інтегральних рівнянь (11) – (13) апроксимуємо системою алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_k^{m_k v} + \frac{j\omega\mu\gamma}{4\pi} \sum_{k=1}^{N_r} \sum_{m_k=1}^{6k} \sum_{l=1}^{NS_k^{m_k}} \dot{\delta}_k^{m_k l} \int_{\Delta S_k^{m_k l}} \frac{1}{r_{MQ}^{m_k l}} dV_M + \frac{j\omega\mu_0\gamma}{4\pi} \sum_{k=1}^{N_r} \sum_{m_k=1}^{6k} \sum_{l=1}^{NS_k^{m_k}} \dot{i}_k^{m_k l} \int_{\Delta S_k^{m_k l}} \frac{1}{r_{MQ}^{m_k l}} dS_M + \\ + \frac{\gamma}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^{N_r} \sum_{m_k=1}^{6k} \sum_{l=1}^{NS_k^{m_k}} \dot{\sigma}_k^{m_k l} \int_{\Delta S_k^{m_k l}} \frac{\vec{r}_{MQ}^{m_k l}}{r_{MQ}^{m_k l}} dS_M = -\frac{j\omega\mu_0\gamma}{4\pi} \sum_{k=1}^{N_r} \int_{V_{Wk}} \frac{\dot{\delta}_W(M)}{r_{MQ}} dV_M, \\ v=1,2,\dots,NV_k^{m_k}, m_k=1,2,\dots,6k, k=1,2,\dots,N_r, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \dot{i}_k^{m_k v} + \frac{\lambda}{2\pi} \sum_{k=1}^{N_r} \sum_{m_k=1}^{6k} \sum_{l=1}^{NS_k^{m_k}} \dot{i}_k^{m_k l} \int_{\Delta S_k^{m_k l}} \frac{\vec{n}_O \vec{r}_{MQ}^{m_k l}}{r_{MQ}^{m_k l}} dS_M + \frac{\lambda}{2\pi\mu} \sum_{k=1}^{N_r} \sum_{m_k=1}^{6k} \sum_{l=1}^{NV_k^{m_k}} \dot{\delta}_k^{m_k l} \int_{\Delta V_k^{m_k l}} \frac{\vec{n}_O \vec{r}_{MQ}^{m_k l}}{r_{MQ}^{m_k l}} dV_M = \\ = -\frac{\lambda}{2\pi} \sum_{k=1}^{N_r} \int_{V_{Wk}} \dot{\delta}_W(M) \frac{\vec{n}_O \vec{r}_{MQ}^{m_k l}}{r_{MQ}^{m_k l}} dS_M, v=1,2,\dots,NS_k^{m_k}, m_k=1,2,\dots,6k, k=1,2,\dots,N_r, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_k^{m_k v} - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{N_r} \sum_{m_k=1}^{6k} \sum_{l=1}^{NS_k^{m_k}} \dot{\sigma}_k^{m_k l} \int_{\Delta S_k^{m_k l}} \left[ \frac{\vec{n}_k^{m_k v} \vec{r}_{MQ}^{m_k l}}{r_{MQ}^{m_k l}} - \frac{2\pi}{S} \right] dS_M + \frac{j\omega\epsilon_0\mu}{2\pi} \sum_{k=1}^{N_r} \sum_{m_k=1}^{6k} \sum_{l=1}^{NV_k^{m_k}} \dot{\delta}_k^{m_k l} \vec{n}_k^{m_k v} \int_{\Delta V_k^{m_k l}} \frac{1}{r_{MQ}^{m_k l}} dV_M + \\ + \frac{j\omega\epsilon_0\mu_0}{2\pi} \sum_{k=1}^{N_r} \sum_{m_k=1}^{6k} \sum_{l=1}^{NS_k^{m_k}} \dot{i}_k^{m_k l} \vec{n}_k^{m_k v} \int_{\Delta S_k^{m_k l}} \frac{1}{r_{MQ}^{m_k l}} dS_M = -\frac{j\omega\epsilon_0\mu_0}{2\pi} \sum_{k=1}^{N_r} \int_{V_{Wk}} \vec{n}_O \dot{\delta}_W(M) dV_M, \\ v=1,2,\dots,NS_k^{m_k}, m_k=1,2,\dots,6k, k=1,2,\dots,N_r. \end{aligned} \quad (16)$$

Враховуючи симетрію конкретної магнітної системи (рис. 2), наступні феромагнітні провідні труби будуть мати однаковий розподіл густини вихрових струмів, струмів намагнічування та густини електричних зарядів на поверхні.

Якщо  $k=1$ , то в об'ємах  $V_1^{m_1}$ ,  $m_1=1,2,\dots,6k - \dot{\delta}_1^{lv}$ ,  $\dot{i}_1^{l}$ ,  $\dot{\sigma}_1^{l}$ ,  $v=1,2,\dots,NV_1^1$ ,  $l=1,2,\dots,NS_1^1$ , крім того існує симетрія розподілу джерел електромагнітного поля у рамках однієї труби (у локальних системах координат), тобто

$$\dot{\delta}(r_1^{m_l}, \alpha_1^{m_l}, z_1^{m_l}) = \dot{\delta}(r_1^{m_l}, -\alpha_1^{m_l}, z_1^{m_l}), \dot{i}(r_1^{m_l}, \alpha_1^{m_l}, z_1^{m_l}) = \dot{i}(r_1^{m_l}, -\alpha_1^{m_l}, z_1^{m_l}), \dot{\sigma}(r_1^{m_l}, \alpha_1^{m_l}, z_1^{m_l}) = \dot{\sigma}(r_1^{m_l}, -\alpha_1^{m_l}, z_1^{m_l}). \quad (17)$$

У такому випадку суми, що входять в систему алгебраїчних рівнянь, можемо записати на прикладі другої складової рівняння (14) у вигляді

$$\sum_{m_1=1}^6 \sum_{l=1}^{NV_1^{m_1}} \dot{\delta}_k^{m_1 l} \int_{\Delta V_1^{m_1 l}} \frac{1}{r_{MQ}} dV_M = \sum_{l=1}^{NV_1^{m_1}/2} \dot{\delta}_1^{l} \sum_{m_1=1}^6 \left( \int_{\Delta V_1^{m_1 l+}} \frac{1}{r_{MQ}} dV_M + \int_{\Delta V_1^{m_1 l-}} \frac{1}{r_{MQ}} dV_M \right),$$

де  $\Delta V_k^{m_k l+}$ ,  $\Delta V_k^{m_k l-}$  – елементарні об'єми з координатами точки  $Q_1^{m_k l+}(r_1^{m_k l}, \alpha_1^{m_k l}, z_1^{m_k l})$ ,  $Q_k^{m_k l-}(r_1^{m_k l}, -\alpha_1^{m_k l}, z_1^{m_k l})$  його центру (рис. 3). Інші суми – аналогічно.

Якщо  $k=2$ , то в об'ємах  $V_2^{m_2}$ ,  $m_2=1,3,\dots,11$ ,  $-\dot{\delta}_2^{1v}$ ,  $\dot{i}_2^{1l}$ ,  $\dot{\sigma}_2^{1l}$ ,  $v=1,2,\dots,NV_2^1$ ,  $l=1,2,\dots,NS_2^1$ ; в об'ємах  $V_2^{m_2}$ ,  $m_2=2,4,\dots,12$ ,  $-\dot{\delta}_2^{2v}$ ,  $\dot{i}_2^{2l}$ ,  $\dot{\sigma}_2^{2l}$ ,  $v=1,2,\dots,NS_2^1$ ,  $l=1,2,\dots,NS_2^1$ , також як і для попереднього шару труб має місце симетрія, аналогічна (17). У такому випадку суми, що входять у систему алгебраїчних рівнянь (14) – (16), можемо записати на прикладі другої складової рівняння (14) у вигляді

$$\sum_{m_2=1}^{12} \sum_{l=1}^{NV_2^{m_2}} \dot{\delta}_2^{m_2 l} \int_{\Delta V_2^{m_2 l}} \frac{1}{r_{MQ}} dV_M = \sum_{l=1}^{NV_2^{m_2}/2} \dot{\delta}_2^{l} \sum_{m_2=1,3,\dots}^{11} \left( \int_{\Delta V_2^{m_2 l+}} \frac{1}{r_{MQ}} dV_M + \int_{\Delta V_2^{m_2 l-}} \frac{1}{r_{MQ}} dV_M \right) + \sum_{l=1}^{NV_2^{m_2}/2} \dot{\delta}_2^{2l} \sum_{m_2=2,4,\dots}^{12} \left( \int_{\Delta V_2^{m_2 l+}} \frac{1}{r_{MQ}} dV_M + \int_{\Delta V_2^{m_2 l-}} \frac{1}{r_{MQ}} dV_M \right)$$

інші суми – аналогічно.

Якщо  $k=3$ , то в об'ємах  $V_3^{m_3}$ ,  $m_3=1,4,7,\dots,16$ ,  $-\dot{\delta}_3^{1v}$ ,  $\dot{i}_3^{1l}$ ,  $\dot{\sigma}_3^{1l}$ ,  $v=1,2,\dots,NV_3^1$ ,  $l=1,2,\dots,NS_3^1$ ; в об'ємах  $V_3^{m_3}$ ,  $m_3=2,5,8,\dots,17$ ,  $-\dot{\delta}_3^{2v}$ ,  $\dot{i}_3^{2l}$ ,  $\dot{\sigma}_3^{2l}$ ,  $v=1,2,\dots,NV_3^2$ ,  $l=1,2,\dots,NS_3^2$ ; в об'ємах  $V_3^{m_3}$ ,  $m_3=3,6,9,\dots,18$ ,  $-\dot{\delta}_3^{3v}$ ,  $\dot{i}_3^{3l}$ ,  $\dot{\sigma}_3^{3l}$ ,  $v=1,2,\dots,NV_3^3$ ,  $l=1,2,\dots,NS_3^3$ . Крім того для другої та третьої груп труб має місце симетрія (у локальних системах координат)

$$\dot{\delta}_3^{2v}(r_3^{gl}, \alpha_3^{gl}, z_3^{gl}) = \dot{\delta}_3^{3v}(r_3^{gl}, -\alpha_3^{gl}, z_3^{gl}), \dot{i}_3^{2v}(r_3^{gl}, \alpha_3^{gl}, z_3^{gl}) = \dot{i}_3^{3v}(r_3^{gl}, -\alpha_3^{gl}, z_3^{gl}), \\ \dot{\sigma}_3^{2v}(r_3^{gl}, \alpha_3^{gl}, z_3^{gl}) = \dot{\sigma}_3^{3v}(r_3^{gl}, -\alpha_3^{gl}, z_3^{gl}), \quad g=2,5,8,\dots,17, \quad q=3,6,9,\dots,18,$$

а для першої групи труб має місце симетрія, аналогічна (17), і у такому випадку суми, що входять в систему алгебраїчних рівнянь, можемо записати на прикладі другої складової рівняння (14) у вигляді

$$\sum_{m_3=1}^{18} \sum_{l=1}^{NV_3^{m_3}} \dot{\delta}_3^{m_3 l} \int_{\Delta V_3^{m_3 l}} \frac{1}{r_{MQ}} dV_M = \sum_{l=1}^{NV_3^{m_3}/2} \dot{\delta}_3^{l} \sum_{m_3=1,4,7,\dots}^{16} \left( \int_{\Delta V_3^{m_3 l+}} \frac{1}{r_{MQ}} dV_M + \int_{\Delta V_3^{m_3 l-}} \frac{1}{r_{MQ}} dV_M \right) + \sum_{l=1}^{NV_3^{m_3}} \dot{\delta}_3^{2l} \left( \sum_{g=2,5,8,\dots}^{17} \int_{\Delta V_3^{g l}} \frac{1}{r_{MQ}} dV_M + \sum_{q=3,6,\dots}^{18} \int_{\Delta V_3^{q(NV_3^{m_3}-l)}} \frac{1}{r_{MQ}} dV_M \right)$$

інші суми – аналогічно.

Виконаємо оцінку на скільки врахування зазначеної симетрії магнітної системи теплогенератора індукційного типу дає змогу зменшити кількість шуканих невідомих. Якщо кожна труба розбивається на однакову кількість елементарних об'ємів  $NV$ , а її поверхня на однакову кількість елементарних площадок  $NS$ , то загальна кількість невідомих без урахування симетрії складає: для пошуку розподілу густини вихрових струмів у феромагнітних провідних трубах –  $3NV \cdot N$ ,  $N=36$  – загальна кількість феромагнітних труб у навантажені (рис. 2); для пошуку густини простого шару струмів намагнічування –  $2NS \cdot N$ ; для пошуку простого шару електричних зарядів –  $NS \cdot N$ . Після врахування зазначеної вище симетрії магнітної системи теплогенератора індукційного типу (рис. 2) кількість невідомих складає: для пошуку розподілу густини вихрових струмів  $\dot{\delta}_1^{1v}$ ,  $\dot{\delta}_2^{1v}$ ,  $\dot{\delta}_2^{2v}$ ,  $\dot{\delta}_3^{1v}$ ,  $v=1,2,\dots,NV/2$ ,  $\dot{\delta}_3^{2l}$ ,  $l=1,2,\dots,NV$ , у феромагнітних провідних трубах –  $4 \cdot 3NV/2 + 3NV = 9NV$ ; аналогічно для пошуку густини простого шару струмів намагнічування –  $4 \cdot 2NS/2 + 2NS = 6NS$ ; для пошуку простого шару

електричних зарядів –  $4NS/2+NS=3NS$ . Тобто зменшення кількості шуканих густин вихрових струмів зменшується у  $3NV \cdot 36 / (9NV) = 12$  разів. Аналогічно для інших невідомих.

Таким чином, з використанням методу вторинних джерел розроблено математичну модель трифазного теплогенератора індукційного типу, яка враховує симетрію магнітної системи. Це дає змогу суттєво зменшити область пошуку невідомих. Наприклад, для магнітної системи, що зображено на рис. 2, кількість шуканих невідомих зменшено в 12 разів.

*Роботу виконано за рахунок бюджетної теми «Бар'єр-2», КПКВК 6541030.*

1. Кондратенко І.П., Жильцов А.В., Березюк А.О., Кришук Р.С. Електротехнологічні комплекси для сушіння зерна на базі теплогенераторів індукційного типу. Київ: Компринт, 2018. 386 с.
2. Vencislav C. Valchev, Teodora P. Todorova, Dimitar D. Yudov, Daniela J. Mareva. Design considerations of inductors for induction heating of fluids. XXV International Scientific Conference *Electronics* (ET). Sozopol, Bulgaria, September 12-14, 2016. DOI: <https://doi.org/10.1109/ET.2016.7753519>.
3. Jankowski T.A., Pawley N.H., Gonzales L.M., Ross C.A., Journey J.D. Approximate analytical solution for induction heating of solid cylinders. *Applied Mathematical Modelling*. 2016. Vol. 40. Pp. 2770-2782. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2015.10.006>.
4. Maialen Areitioaurtena, Unai Segurajauregi, Ville Akujärvi, Martin Fisk, Iker Urresti, Eneko Ukar. A semi-analytical coupled simulation approach for induction heating. *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences*. 2021. No 8. Article number: 14. DOI: <https://doi.org/10.1186/s40323-021-00199-0>.
5. Березюк А.О. Електромагнітні і теплові процеси в індукційних установках нагрівання теплоносіїв: дис. ... канд. техн. наук: 05.09.03. Нац. університет біоресурсів і природокористування України. Київ. 2013.
6. Тозони О.В., Маергойз И.Д. Расчет трехмерных электромагнитных полей: монография. К.: Техніка, 1974. 352 с.

### THREE-DIMENSIONAL MATHEMATICAL MODEL OF THREE-PHASE HEAT GENERATOR OF INDUCTION TYPE BASED ON THE METHOD OF SECONDARY SOURCES

A.V. Zhylytsov<sup>1</sup>, A.O. Bereziuk<sup>2</sup>, T.V. Vishtak<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Institute of Electrodynamics National Academy of Sciences of Ukraine, pr. Peremohy, 56, Kyiv, 03057, Ukraine. E-mail: [azhilt@gmail.com](mailto:azhilt@gmail.com)

<sup>2</sup>National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine, Heroiv Oborony Str., 15, Kyiv, 03041, Ukraine.

*A three-dimensional mathematical model of a three-phase induction heat generator with a load in the form of a ferromagnetic conductive tubes beam has been developed on the basis of the secondary method. The magnetic system symmetry of the heat generator is taken into account, which significantly reduced the search area of unknown electromagnetic field secondary sources densities. References 6, figures 3.*

**Key words:** heat generator, induction heating, modeling, secondary source method.

1. Kondratenko I.P., Zhylytsov A.V., Bereziuk A.O., Kryshchuk R.S. Electrotechnological complexes for grain drying on the basis of induction heat generators. Kyiv: Comprint, 2018. 386 p. (Ukr)
2. Vencislav C. Valchev, Teodora P. Todorova, Dimitar D. Yudov and Daniela J. Mareva. Design considerations of inductors for induction heating of fluids. XXV International Scientific Conference *Electronics* (ET). Sozopol, Bulgaria, September 12-14, 2016. DOI: <https://doi.org/10.1109/ET.2016.7753519>.
3. Jankowski T.A., Pawley N.H., Gonzales L.M., Ross C.A., Journey J.D. Approximate analytical solution for induction heating of solid cylinders. *Applied Mathematical Modelling*. 2016. Vol. 40. Pp. 2770-2782. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2015.10.006>.
4. Maialen Areitioaurtena, Unai Segurajauregi, Ville Akujärvi, Martin Fisk, Iker Urresti and Eneko Ukar. A semi-analytical coupled simulation approach for induction heating. *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences*. 2021. No 8. Article number: 14. DOI: <https://doi.org/10.1186/s40323-021-00199-0>.
5. Bereziuk A.O. Electromagnetic and thermal processes in induction installations of heating of heat carriers: diss. ... Cand. tech. sciences: 05.09.03. National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine. Kyiv. 2013. (Ukr)
6. Tozoni O.V., Maergois I.D. Calculation of three-dimensional electromagnetic fields. Kyiv: Tekhnika, 1974. 352 p. (Rus)

Надійшла 10.05.2022  
Остаточний варіант 15.06.2022