

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ МАГНІТОЕЛЕКТРИЧНОЇ МАШИНИ

І.П. Кондратенко*, чл.-кор. НАН України, **Р.С. Кришук**** , канд. техн. наук
Інститут електродинаміки НАН України,
пр. Берестейський, 56, Київ, 03057, Україна.
E-mail: dep7ied@ukr.net; dygogive@gmail.com.

Пропонується математична модель для розрахунку електромагнітних параметрів магнітоелектричних машин аналітичним методом. Постійні магніти абстрагуються у вигляді еквівалентних соленоїдів із постійним струмом у вигляді струмових контурів. Модель відрізняється від відомої наявністю подвійних лінійних струмових контурів статора для аналізу магнітоелектричних машин з двошаровою обмоткою. Також запропонована модель враховує наявність лінійних струмових контурів еквівалентних соленоїдів замість точкових струмових контурів для більш точного розрахунку. Струмові контури статора та ротора задаються на границях повітряного проміжку електричної машини, тобто на гладких безпазових поверхнях магнітопроводів. Вперше такі контури виражені у вигляді добутку трьох змінних: сила струму, коефіцієнт лінійної густини струму та коефіцієнт просторового розподілу. Індуктивність пазів статора та опір обмотки враховано відомими аналітичними виразами класичної теорії електричних машин. Частоту обертання ротора представлено як функція від часу. Для магнітоелектричних машин заданих розмірів і заданої змінної частоти обертання ротора обчислено з використанням математичної моделі розподіл індукції магнітного поля, векторного магнітного потенціалу, струмів, коефіцієнтів просторового розподілу обмотки та напруженості електричного поля постійних магнітів. Бібл. 7, табл. 1, рис. 4.

Ключові слова: магнітоелектрична машина, математична модель, аналітичний метод, електромагнітне поле, постійні магніти.

Вступ. Актуальним питанням сьогодення є ефективне використання відновлюваних джерел електроенергії. Серед таких джерел є енергія сонця, вітру, морських хвиль та інші. Для перетворення енергії вітру та хвиль в електроенергію використовуються електромеханічні перетворювачі, с яких є магнітоелектричні генератори [1].

Задля ефективного використання відновлюваних джерел енергії необхідно виконати моделювання електромагнітного поля та провести розрахунок характеристик магнітоелектричних генераторів. Для цього використовуються різні методи та модельні представлення, наприклад: чисельний метод скінченних елементів [2], який застосовується в багатьох універсальних комп'ютерних програмах для моделювання електромагнітних полів; метод вторинних джерел [3]; метод інтегральних перетворень [4, 5] та ін. Для кожного методу потрібно мати своє модельне представлення електричної машини, яке відрізняється від реальної машини низкою використаних припущень, спрощень, що вносить певні неточності до результатів розрахунків.

Аналітичні методи моделювання електромагнітного поля електричних машин мають низку переваг над чисельними, серед яких висока швидкість розрахунку, універсальність під час реалізації в різних середовищах програмування, висока точність розрахунку. Ці методи складаються з математичних функцій, які описують нелінійні характеристики електричних машин (індукція електромагнітного поля, струм, напруга, момент та ін.) в залежності від певних параметрів (відстань, координата, час, електрична провідність та ін.). Універсальність полягає в можливості розроблення простих програм для розрахунку характеристик конкретних електричних машин, використовуючи систему комп'ютерної алгебри, наприклад, Mathcad, Wolfram Mathematica або мови програмування Fortran, Python та ін. Часто розрахунок ведеться з урахуванням рівнянь із різних дисциплін. Наприклад, для моделювання пристроїв для перетворення енергії хвиль використовуються одночасно

рівняння електромагнітного поля, рівняння рівноваги механічної системи та рівняння електричного кола [1].

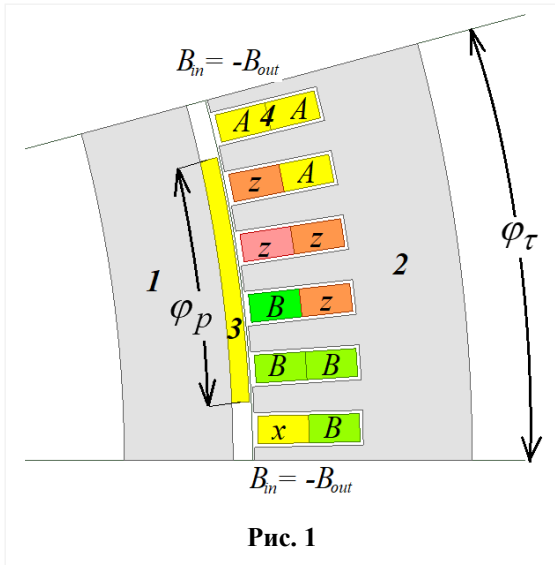


Рис. 1

У цій роботі досліджується магнітоелектрична машина (рис. 1) з радіальним магнітним потоком, у якій магнітопровід ротора 1 має поверхню без пазів з накладними постійними магнітами 3, статор має трифазну обмотку, укладену в пази 4 магнітопроводу 2. В роботі реалізується ідея розроблення математичної моделі магнітоелектричних генераторів та двигунів з подвійними лінійними струмовими контурами обмотки статора для врахування двошарової обмотки з вкороченим кроком, а також ідея використання розподілених лінійних струмових контурів з постійним струмом, якими замінюються постійні магніти на відміну від відомих уявлень [1, 5] таких магнітів у вигляді нескінченно тонких соленоїдів, що розташовуються на бічних поверхнях реальних постійних магнітів.

У роботі досліджено модель магнітоелектричної машини (рис. 2) у циліндричній системі координат ρ, ϕ, z та розроблено аналітичний метод розрахунку компонентів електромагнітного поля. В розробленій математичній моделі [1] для завдання величини намагнічування постійних магнітів використовується дельта-функція Дірака, що в подальшому значно спрощує застосування інтегрального перетворення. Штриховими лініями показано місця розміщення пазів та постійних магнітів, яких немає в моделі. Присутність постійних магнітів на границі $\rho = r_1$ враховано точковими струмовими контурами I_p [1]. На границі $\rho = r_2$ наявність обмотки статора представлено лінійними струмовими контурами j_w статора у вигляді тонких ліній довжиною в ширину пазів.

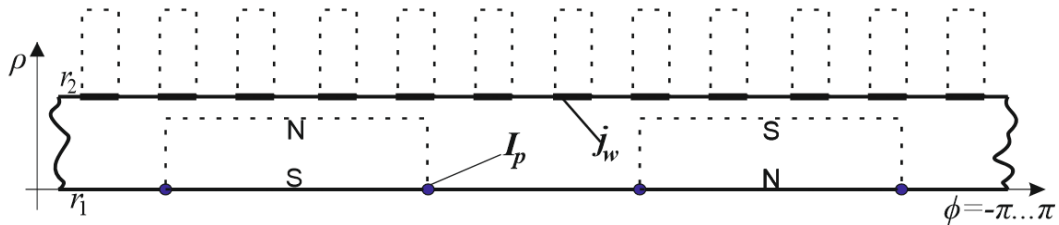


Рис. 2

На рис. 3 пропонується аналогічна до рис. 2 модель, але з лінійними струмовими контурами еквівалентних соленоїдів ротора j_p . Є можливість регулювати ширину контурів j_p задля досягнення більшої точності розрахунку (рис. 2). Струмові контури j_p завжди знаходяться на бокових краях уявних постійних магнітів, позначених штриховими лініями на рис. 3. Використання лінійних струмових контурів j_p замість точкових I_p надасть можливість знизити вплив обмеженої кількості гармонік інтегрального перетворення Фур'є, що застосовується для аналітичного розрахунку рівняння електромагнітного поля магнітоелектричної машини. Для врахування двошарової обмотки з вкороченим кроком на границі $\rho = r_2$ використовуються подвійні лінійні струмові контури

$$j_w = j_{w1} + j_{w2}. \quad (1)$$

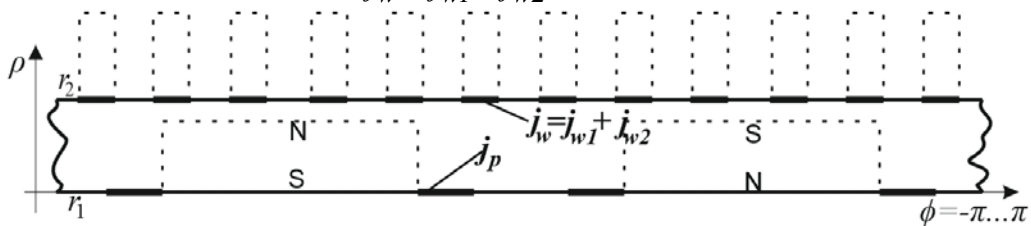


Рис. 3

Метою роботи є розроблення математичної моделі для аналітичного розрахунку електромагнітних параметрів та енергетичних показників магнітоелектричних машин, що має подвійні лінійні струмові контури обмотки статора для врахування двошарової обмотки та лінійні струмові контури еквівалентних соленоїдів для модельного представлення постійних магнітів.

Рівняння електромагнітного поля. Задля розрахунку електромагнітного поля в повітряному проміжку моделі на рис. 3 використовується рівняння [1]

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} = 0, \quad (2)$$

де A_z – векторний магнітний потенціал, z -складова; ρ , ϕ , z – координати циліндричної системи координат.

Рівняння (1) одержано із наступних рівнянь:

$$\text{rot} \mathbf{A} = \mathbf{B}; \quad (3)$$

$$\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} = 0; \quad (4)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}. \quad (5)$$

Тут \mathbf{A} – векторний магнітний потенціал; \mathbf{B} – індукція магнітного поля; \mathbf{H} – напруженість магнітного поля; \mathbf{j} – густина електричного струму, яка рівна нулю, оскільки в повітряному проміжку (рис. 3) струми відсутні; μ – магнітна проникність повітряного проміжку.

Граничні умови. Для моделі на рис. 3 на границях $\rho = r_1$ і $\rho = r_2$ граничні умови [6]

$$\left. \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right|_{r_1} = -\mu j_p \quad \text{і} \quad \left. \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right|_{r_2} = \mu j_w. \quad (6)$$

Струмові контури ротора j_p як функції від часу t та координати ϕ на відміну від [1] пропонується визначати відповідно як добуток сили струму, коефіцієнту лінійної густини струму та коефіцієнту просторового розподілу струму

$$j_p [t, \phi] = i_p k_{jp} k_p [t, \phi], \quad k_{jp} = 1/r_1 \phi_s, \quad (7)$$

де t – час; i_p – струм в струмових контурах ротора; k_{jp} – коефіцієнт густини струму; $k_p [t, \phi]$ – функція коефіцієнту просторового розподілу лінійних струмових контурів j_p ; ϕ_s – кут, що займають лінійні струмові контури j_p по координаті ϕ .

Через використання точкових струмових контурів I_p ротора на рис. 2 вираз (7) буде мати наступний вигляд:

$$j_p [t, \phi] = I_p [t, \phi] = i_p k_{jp} k_{p2} [t, \phi], \quad k_{jp} = 1, \quad (8)$$

де $k_{p2} [t, \phi]$ – функція коефіцієнту просторового розподілу струмових контурів I_p .

Струм у контурах ротора розраховується як [1]

$$i_p = H_c h_p, \quad (9)$$

де H_c – коерцитивна сила постійних магнітів; h_p – висота постійних магнітів по координаті ρ .

Запропоновано функцію коефіцієнта k_p для контурів j_p

$$k_p [t, \phi] = \sum_{p_1=0}^{p-1} \text{rect} \left[\frac{\phi - (T_{p1} + \phi_r [t])}{\phi_s} \right] + \text{rect} \left[\frac{\phi - (T_{p2} + \phi_r [t])}{\phi_s} \right] - \text{rect} \left[\frac{\phi - (T_{p1} + \phi_r [t] + \phi_\tau)}{\phi_s} \right] - \text{rect} \left[\frac{\phi - (T_{p2} + \phi_r [t] + \phi_\tau)}{\phi_s} \right], \quad (10)$$

$$T_{p1} = 2\phi_r p_1, \quad T_{p2} = T_{p1} + \phi_r - \phi_p - \phi_s,$$

де p – кількість пар полюсів; $\text{rect}[\dots]$ – прямокутна функція; ϕ_τ – кут полюсів, рад.; ϕ_r – кут повороту ротора відносно статора; ϕ_p – кут, що займає постійний магніт.

Для випадку точкових струмових контурів I_p (рис. 2) запропоновано наступний вираз для k_{p2} (8) за допомогою дельта-функції Дірака $\delta[\dots]$:

$$k_{p2}[t, \phi] = \sum_{p1=0}^{p-1} \delta[\phi - (T_{p1} + \phi_r[t] - \phi_p/2)] - \delta[\phi - (T_{p1} + \phi_r[t] + \phi_p/2)] - \delta[\phi - (T_{p1} + \phi_r[t] + \phi_\tau - \phi_p/2)] + \delta[\phi - (T_{p1} + \phi_r[t] + \phi_\tau + \phi_p/2)] \quad (11)$$

Лінійні струмові контури трифазної обмотки j_w (1)

$$j_{w1}[t, \phi] = i_A[t] k_j k_{w1}[\phi, \phi_A] + i_B[t] k_j k_{w1}[\phi, \phi_B] + i_C[t] k_j k_{w1}[\phi, \phi_C]; \quad (12)$$

$$j_{w2}[t, \phi] = i_A[t] k_j k_{w2}[\phi, \phi_A] + i_B[t] k_j k_{w2}[\phi, \phi_B] + i_C[t] k_j k_{w2}[\phi, \phi_C];$$

$$k_j = w_c / b_g = w_c / r_2 \phi_g; \quad (13)$$

$$\phi_A = -4\phi_\tau / m, \quad \phi_B = -2\phi_\tau / m, \quad \phi_C = 0,$$

де i_A, i_B, i_C – струм фази обмотки статора; k_j – коефіцієнт густини струму в контурах j_w ; w_c – кількість витків у котушках двошарової обмотки, тобто в контурах j_{w1} та j_{w2} (1); b_g – ширина пазів, що відповідає ширині струмових контурів j_w ; ϕ_g – кут ширини пазів у радіанах; k_{w1} – коефіцієнт просторового розподілу контурів j_{w1} по координаті ϕ ; k_{w2} – коефіцієнт просторового розподілу контурів j_{w2} по координаті ϕ ; ϕ_A, ϕ_B, ϕ_C – кут зміщення відповідної фази по координаті ϕ ; $m = 3$ – кількість фаз.

Коефіцієнт просторового розподілу k_{w1}, k_{w2}

$$k_{w1}[\phi, \phi_{ph}] = \sum_{p1}^{p-1} \sum_{q1}^{q-1} \text{rect} \left[\frac{\phi - T_{qp1}[\phi_{ph}]}{\phi_g} \right] - \text{rect} \left[\frac{\phi - T_{qp1}[\phi_{ph}] + \phi_\tau}{\phi_g} \right]; \quad (14)$$

$$k_{w2}[\phi, \phi_{ph}] = \sum_{p1}^{p-1} \sum_{q1}^{q-1} \text{rect} \left[\frac{\phi - T_{qp2}[\phi_{ph}]}{\phi_g} \right] - \text{rect} \left[\frac{\phi - T_{qp2}[\phi_{ph}] + \phi_\tau}{\phi_g} \right];$$

$$\phi_{ph} = \phi_A \vee \phi_B \vee \phi_C, \quad T_{qp1}[\phi_{ph}] = \phi_{ph} + 2\phi_\tau p1 + q1\phi_z; \quad (15)$$

$$T_{qp2}[\phi_{ph}] = T_{qp1}[\phi_{ph}] + \phi_\tau(1 - \beta); \quad k_w = k_{w1}[\phi, \phi_{ph}] + k_{w2}[\phi, \phi_{ph}]$$

Тут q – кількість пазів на полюс і фазу; ϕ_z – кут зубцевого кроку; β – коефіцієнт вкорочення обмотки – відношення кроку котушок обмотки статора до полюсного кроку; $T_{qp1}[\phi_{ph}]$ – параметр першого шару двошарової обмотки; $T_{qp2}[\phi_{ph}]$ – параметр другого шару двошарової обмотки; k_w – сумарний коефіцієнт розподілу обмотки; \vee – логічний оператор АБО.

Інтегральне перетворення. Задля розв'язання рівняння (2) потрібно позбутися координати ϕ у ньому та у виразах (7)-(15). Для цього використовується інтегральне перетворення Фур'є

$$\hat{f}[\phi] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f[\phi] e^{in\phi} d\phi, \quad (16)$$

де n – параметр перетворення Фур'є. Обернене перетворення записується у вигляді суми

$$f[\phi] = \text{Re} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}[\phi] e^{-in\phi} \right] = \text{Re} \left[\sum_{n=-\infty}^{-1} \hat{f}[\phi] e^{-in\phi} \right] + \text{Re} \left[\hat{f}[\phi] e^{-in\phi} \right] + \text{Re} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}[\phi] e^{-in\phi} \right]. \quad (17)$$

Оскільки в магнітоелектричній машині обмотка замкнена та є симетрія по координаті ϕ , то у такому випадку другим доданком в (17) ($n = 0$) нехтуємо.

Коефіцієнти просторового розподілу струмових контурів (10), (11), (14) після інтегрального перетворення (15) мають відповідно наступний вигляд:

$$\hat{k}_p[t] = \sum_{p1=0}^{p-1} \left(-e^{in\phi_r[t]} \left(e^{inT_{p1}} + e^{inT_{p2}} \right) \left(-1 + e^{in\phi_\tau} \right) \sin[n\phi_s/2] \right) / n\pi; \quad (18)$$

$$\hat{k}_{p2}[t] = \sum_{p_1=0}^{p-1} \left(e^{in\varphi_p[t]} e^{0.5in(2T_{p1}-\varphi_p)} (e^{in\varphi_p} - 1)(e^{in\varphi_p} - 1) \right) / 2\pi; \quad (19)$$

$$\hat{k}_{w1}[\phi_{ph}] = \sum_{q_1=0}^{q-1} \sum_{p_1=0}^{p-1} e^{inT_{qp1}} [\phi_{ph}] \left(1 - e^{in\phi_{p\tau}} \right) \sin \left[\frac{n\phi_g}{2} \right] / n\pi; \quad (20)$$

$$\hat{k}_{w2}[\phi_{ph}] = \sum_{q_1=0}^{q-1} \sum_{p_1=0}^{p-1} e^{inT_{qp2}} [\phi_{ph}] \left(1 - e^{in\phi_{p\tau}} \right) \sin \left[\frac{n\phi_g}{2} \right] / n\pi.$$

Магнітне поле. Інтегральне перетворення (16) дає змогу привести (2) до диференційного рівняння другого порядку [1]

$$\hat{A}_z = C_1 \rho^n + C_2 \rho^{-n}. \quad (21)$$

Тут C_1 і C_2 визначаються граничними умовами (6)

$$\left\{ \begin{array}{l} -\mu_0 \hat{j}_p = C_1 n r_1^{(n-1)} - C_2 n r_1^{-(n-1)}; \\ \mu_0 \hat{j}_w = C_1 n r_2^{(n-1)} - C_2 n r_2^{-(n-1)}. \end{array} \right. \quad (22)$$

Виконавши розв'язання системи (22), маємо коефіцієнти C_1 і C_2

$$C_1[\hat{j}_p, \hat{j}_w] = \frac{\hat{j}_p r_1^{(1+n)} \mu_0 + \hat{j}_w r_2^{(1+n)} \mu_0}{n(r_1^{2n} - r_2^{2n})}, \quad C_2[\hat{j}_p, \hat{j}_w] = \frac{r_1^n r_2^n (\hat{j}_w r_1^n r_2 + \hat{j}_p r_2^n r_1) \mu_0}{n(r_1^{2n} - r_2^{2n})}. \quad (23)$$

Вирази (23) складаються з двох доданків, що мають множники \hat{j}_p та \hat{j}_w , які отримано після застосування до (7), (1) і (12) інтегрального перетворення (16). Тому, підставивши (23) в (21), можна векторний потенціал (21) розділити на дві частини [1]

$$\hat{A}_z[\hat{j}_p, \hat{j}_w] = \hat{A}_{zp}[\hat{j}_p] + \hat{A}_{zw}[\hat{j}_w]. \quad (24)$$

Якщо вважати, що перетворення механічної енергії в електричну здійснюється на границі $\rho = r_2$, то \hat{A}_{zp} та \hat{A}_{zw} мають вигляд

$$\hat{A}_{zp}[\hat{j}_p] = \frac{2\hat{j}_p r_1^{(1+n)} r_2^n \mu_0}{n(r_1^{2n} - r_2^{2n})}, \quad \hat{A}_{zw}[\hat{j}_w] = \frac{\hat{j}_w r_2 (r_1^{2n} + r_2^{2n}) \mu_0}{n(r_1^{2n} - r_2^{2n})}. \quad (25)$$

Виразами (3) та (24) визначається індукція магнітного поля B_ρ на границі $\rho = r_2$

$$\hat{B}_\rho[\hat{j}_p, \hat{j}_w] = \frac{\partial}{r_2 \partial \phi} \hat{A}_z[\hat{j}_p, \hat{j}_w]. \quad (26)$$

Індукована напруга та магнітний момент. За законом Фарадея та з урахуванням калібрування Кулона для векторного магнітного потенціалу маємо

$$\text{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \text{div} \mathbf{A} = 0, \quad \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (27)$$

Тоді розподіл напруженості електричного поля E_z визначається як

$$\hat{E}_{zp}[\hat{j}_p] = -\partial \hat{A}_{zp}[\hat{j}_p] / \partial t = -in \frac{\partial \phi_r[t]}{\partial t} \hat{A}_{zp}[\hat{j}_p] = -in \omega_p[t] \hat{A}_{zp}[\hat{j}_p], \quad (28)$$

$$\hat{E}_{zw}[\hat{j}_w] = -\partial \hat{A}_{zw}[\hat{j}_w] / \partial t, \quad (29)$$

$$\hat{E}_z[\hat{j}_p, \hat{j}_w] = \hat{E}_{zp}[\hat{j}_p] + \hat{E}_{zw}[\hat{j}_w], \quad (30)$$

де $\omega_p[t]$ – кутова частота обертання ротора, рад/с. Напруженість електричного поля має дві складові (30). Складовою E_{zp} визначається далі по тексту електрорушійна сила в контурах j_w , а складовою E_{zw} – індуктивність контурів j_w [5].

Добуток напруженості E_{zp} на коефіцієнт розподілу обмотки k_w певної фази ϕ_{ph} (15) дає можливість отримати нульові значення напруженості E_{zp} на ділянках зубців магнітопроводу статора

вздовж координати ϕ . Тобто цей добуток визначає напруженість $E_{zр}$ лише в струмових контурах j_w певної фази (рис. 3) між зубцями магнітопроводу

$$E_{zр} [j_p] \cdot k_w [\phi, \phi_{ph}] \quad (31)$$

Усереднене значення $E_{zр}$ в струмових контурах j_w для певної фази ϕ_{ph} можна одержати з допомогою (31) за виразом

$$\frac{1}{\phi_{jph}} \int_0^{2\pi} E_{zр} [j_p] k_w [\phi, \phi_{ph}] d\phi = \frac{2\pi}{\phi_{jph}} \operatorname{Re} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{E}_{zр} [j_p] \hat{k}_w^* [\phi_{ph}] \right], \quad \phi_{jph} = 2pq\phi_g, \quad (32)$$

де ϕ_g – кут, що зайнятий одним пазом; ϕ_{jph} – сумарний кут пазів певної фази; «*» – позначення комплексно-спряжених чисел.

Задля знаходження індукованої контурами j_p (рис. 3) або I_p (рис. 2) напруги на фазі обмотки статора вираз (32) множиться на кількість витків у фазі та довжину повітряного проміжку вздовж осі z

$$u_{pph} [\hat{j}_p, \phi_{ph}] = l_d w_{ph} \frac{2\pi}{\phi_{jph}} \operatorname{Re} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{E}_{zр} [\hat{j}_p] \hat{k}_w^* [\phi_{ph}] \right], \quad (33)$$

$$w_{ph} = 2pqw_c, \quad (34)$$

де l_d – довжина повітряного проміжку електричної машини вздовж обертового валу; w_{ph} – кількість витків у фазі обмотки статора.

Магнітний момент на валу ротора для кожної фази ph (фази А, В, С), використавши вирази (28) і (34) та [1], запишеться як

$$M_{Mph} [\hat{j}_p, \phi_{ph}, t] = i_{ph} u_{pph} [\hat{j}_p, \phi_{ph}] / \omega_p [t]. \quad (35)$$

Сумарний магнітний момент усіх фаз на роторі

$$M_M = M_{MA} + M_{MB} + M_{MC}. \quad (36)$$

Індуктивність обмотки статора. Замінивши в (33) напруженість електричного поля (28) на (29), маємо падіння напруги на індуктивному опорі струмових контурів \hat{j}_w

$$u_{Lph} [\hat{j}_w, \phi_{ph}] = l_d w_{ph} \frac{2\pi}{\phi_{jph}} \operatorname{Re} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{E}_{zw} [\hat{j}_w] \hat{k}_w^* [\phi_{ph}] \right]. \quad (37)$$

Падіння напруги (37) можна записати через індуктивність L

$$u_{Lph} [\phi_{ph}] = \frac{\partial i_A [t]}{\partial t} L[\phi_A, \phi_{ph}] + \frac{\partial i_B [t]}{\partial t} L[\phi_B, \phi_{ph}] + \frac{\partial i_C [t]}{\partial t} L[\phi_C, \phi_{ph}]. \quad (38)$$

Із (37) та (38) визначено функцію для розрахунку індуктивності контурів \hat{j}_w

$$L[\phi_{ph1}, \phi_{ph2}] = -l_d w_{ph} \frac{2\pi}{\phi_{jph}} \operatorname{Re} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{A}_{zw} [\hat{k}_j \cdot \hat{k}_w [\phi_{ph1}]] \cdot \hat{k}_w^* [\phi_{ph2}] \right], \quad (39)$$

$$\phi_{ph1} = \phi_A \vee \phi_B \vee \phi_C; \quad \phi_{ph2} = \phi_A \vee \phi_B \vee \phi_C. \quad (40)$$

Оскільки магнітоелектрична машина має симетричні полюси по координаті φ , обмотка для усіх фаз однакова, то можна індуктивність узагальнити для усіх фаз

$$L_{ph} = L_A = L_B = L_C = L[\phi_{ph1}, \phi_{ph2}], \quad \text{якщо } \phi_{ph1} = \phi_{ph2}; \quad (41)$$

$$L_M = L[\phi_{ph1}, \phi_{ph2}], \quad \text{якщо } \phi_{ph1} \neq \phi_{ph2},$$

де L_{ph} – власна індуктивність фази струмових контурів \hat{j}_w ; L_M – індуктивність між фазами струмових контурів \hat{j}_w .

Розрахунок струмів. Приймається умова, що машина працює в режимі генератора, до кожної фази підключено однакове активно-індуктивне навантаження (RL). Для такої схеми складається система рівнянь, що розв'язується аналітично, за другим законом Кірхгофа, де невідомими є струми i_A , i_B , i_C (12) у струмових контурах j_w

$$\begin{cases} u_{pA}[t] + \frac{\partial i_A[t]}{\partial t}(L_{ph} + L_e + L_g + L_{cs}) + L_M \left(\frac{\partial i_B[t]}{\partial t} + \frac{\partial i_C[t]}{\partial t} \right) + i_A[t](r_{cs} + r_w) = u_A[t]; \\ u_{pB}[t] + \frac{\partial i_B[t]}{\partial t}(L_{ph} + L_e + L_g + L_{cs}) + L_M \left(\frac{\partial i_A[t]}{\partial t} + \frac{\partial i_C[t]}{\partial t} \right) + i_B[t](r_{cs} + r_w) = u_B[t]; \\ u_{pC}[t] + \frac{\partial i_C[t]}{\partial t}(L_{ph} + L_e + L_g + L_{cs}) + L_M \left(\frac{\partial i_A[t]}{\partial t} + \frac{\partial i_B[t]}{\partial t} \right) + i_C[t](r_{cs} + r_w) = u_C[t], \end{cases} \quad (42)$$

де u_{pA} , u_{pB} , u_{pC} – напруга в лінійних струмових контурах, індукована еквівалентними соленоїдами (постійними магнітами) за виразом (33); u_A , u_B , u_C – напруга стороннього джерела живлення для випадку, коли магнітоелектрична машина працює в режимі двигуна, наприклад:

$$u_A[t] = I_m \sin[\omega t + 0]; \quad u_B[t] = I_m \sin[\omega t - 2\pi/3]; \quad u_C[t] = I_m \sin[\omega t + 2\pi/3], \quad (43)$$

де $\omega = 2\pi f$ – кутова частота напруги; f – частота напруги джерела живлення; r_{cs} – активний опір споживача (або джерела, якщо машина – двигун) потужності, що підключається до виводів фази обмотки статора; r_w – активний опір провідників фази обмотки статора [7]; L_e – індуктивність лобових частин фази обмотки статора [7]; L_g – індуктивність пазів фази обмотки статора [7]; L_{cs} – індуктивність споживача (або джерела, якщо машина – двигун) потужності.

Також для розрахунку струмів i_A , i_B , i_C зі складними електричними схемами можна скористатися сторонніми програмами для розрахунку електричних схем замість (42), наприклад, Micro-Cap.

Приклад розрахунку генератора. Задля виконання розрахунку генератора складено програму в системі комп'ютерної алгебри з виразами (1), (7), (9), (12), (13), (15), (18), (20), (24)-(26), (28), (32)-(36), (39)-(42). У таблиці представлено параметри, що задано для виконання розрахунку.

Параметр	Значення	Одиниці	Опис
δ	0,005	м	Висота немагнітного проміжку
r_1	0,3143	м	Радіус магнітопроводу ротора
r_2	0,3193	м	Радіус поверхні статора, $r_1 + \delta$
l_d	1,00	м	Довжина повітряного проміжку по z
H_c	890000	А/м	Коерцитивна сила постійних магнітів
$k_{\phi p}$	2/3	1	Відношення ширини магніту до ширини полюсу
h_p	0,004	м	Висота магніту
p	12	1	Кількість пар полюсів
m	3	1	Кількість фаз
q	2	1	Кількість пазів на 1 полюс і на 1 фазу
β	5/6	1	Коефіцієнт вкорочення полюсного кроку
w_c	25	1	Кількість витків у котушках 2-шарової обмотки
b_g	0,008	м	Ширина пазів статора
φ_τ	$\pi/12$	рад	Кут полюсного кроку, π/p
φ_z	$\pi/72$	рад	Кут зубцевого кроку, φ_τ/mq
k_{gt}	0,574196	1	Відношення ширинипазу до зубцевого кроку, $b_g/\varphi_z r_2$
φ_g	0,025054	рад	Кутпазу, $\varphi_z k_{gt}$
φ_p	$\pi/18$	рад	Кут, що займає постійний магніт, $\varphi_\tau k_{\phi p}$
φ_{sm}	$\pi/72$	рад	Максимально можливий кут ширини лінійного струмового контуру j_p (рис. 3), $0,5\varphi_\tau(1 - k_{\phi p})$
φ_s	0,00436332	рад	Заданий кут лінійного струмового контуру j_p , $0,1 \cdot \varphi_{sm}$
r_{cs}	182,0	Ом	Опір споживача потужності на кожній фазі
r_w	18,0	Ом	Опір обмотки фази [7]
L_e	0,008	Гн	Індуктивність лобових частин обмотки на фазу [7]

Продовження таблиці

Параметр	Значення	Одиниці	Опис
L_g	0,142	Гн	Індуктивність пазів обмотки на фазу [7]
L_{CS}	0.0	Гн	Індуктивність споживача потужності на кожній фазі
$v_r [t]$	0...12	об/хв	Частота обертання ротора, $12 \cdot \sin[2\pi(1/6)t]$
$\omega_r [t]$	0...0,4 π	рад/с	Кутова частота обертання ротора, $2\pi(v_r/60)$
n	-10 ³ ...-1, 1...10 ³	1	Параметр перетворення Фур'є (17)

На рис. 4, а показано результати розрахунку струму в фазах обмотки в межах 1/4 періоду коливання швидкості $v_r [t]$ (табл.). Максимальне значення струму становить близько 4,25 А, середнє за період (діюче) значення струму 1,76 А на кожну фазу.

На рис. 4, б представлено такі результати: P_{ls} – втрати в обмотці на опорі r_w сумарно в 3-х фазах; P_{CS} – потужність споживання r_{CS} в 3-х фазах сумарно; P_1 – сумарна трифазна потужність в r_w та r_{CS} ; M_M – магнітний момент на валу ротора (36); v_r – задана швидкість (табл.). Середня за період потужність втрат P_{ls} становить 254 Вт, потужність споживання P_{CS} – 2567 Вт. Коефіцієнт корисної дії становить 91 %.

На рис. 4, в показано параметри електромагнітного поля за $\rho = r_2$ у межах одного полюсного кроку ϕ_T . B_ρ – радіальна складова індукції магнітного поля, що визначена рівняннями (3) і (26); A_z – векторний магнітний потенціал за виразом (24); E_{zp} – напруженість електричного поля еквівалентних соленоїдів (постійних магнітів) (28).

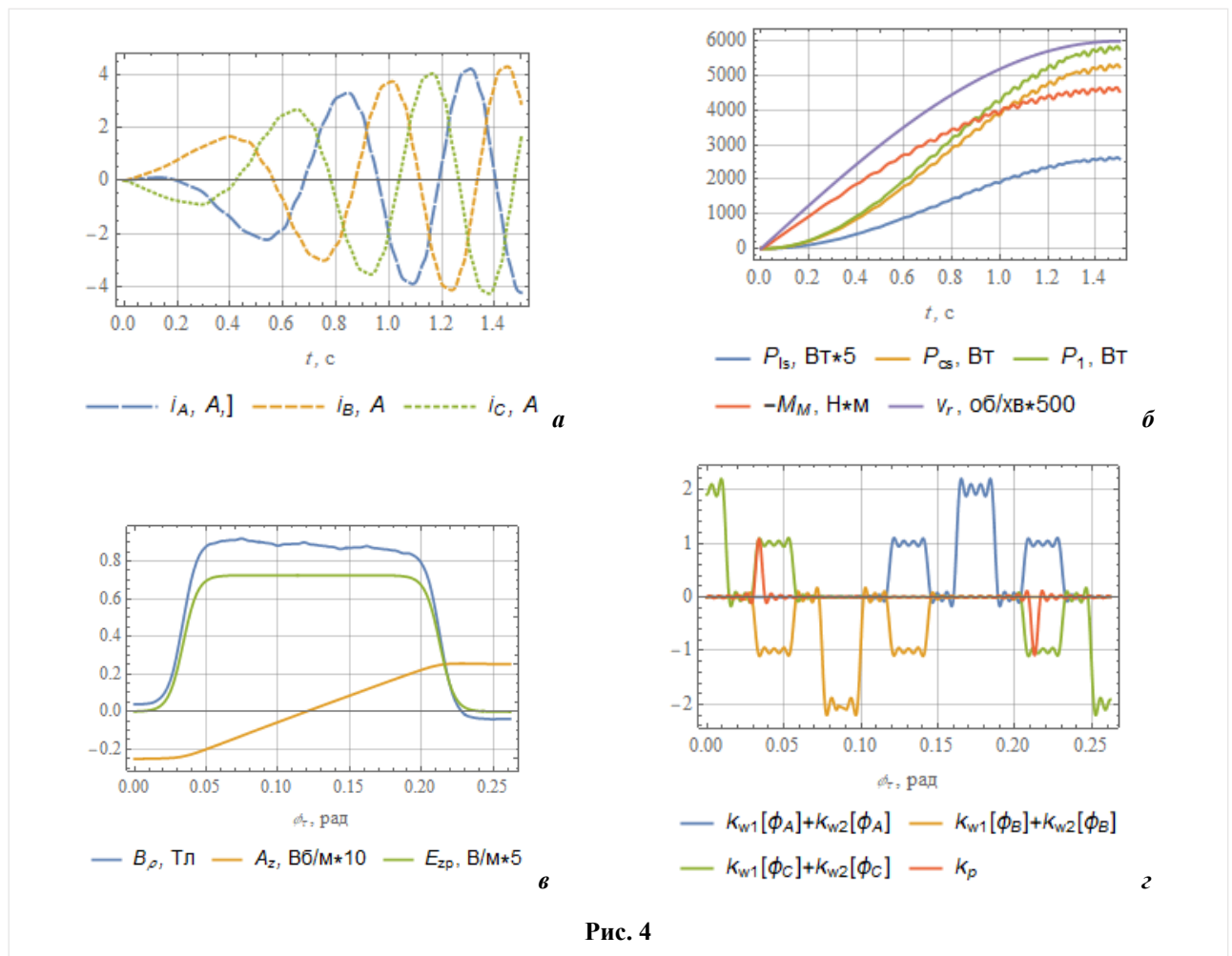


Рис. 4

На рис. 4, з представлено в межах полюсного кроку ϕ_τ розподіл коефіцієнтів просторового розподілу струмових контурів (18) та (20) з використанням оберненого перетворення (17). Коли коефіцієнти однієї фази верхнього k_{w1} та нижнього k_{w2} шару двошарової обмотки співпадають у просторі, то сумарне значення становить 2. Коефіцієнт розподілу лінійних струмових контурів еквівалентних соленоїдів k_p заданий за допомогою прямокутної функції (10). У місцях розміщення лінійних контурів j_p (7) коефіцієнт k_p очікувано приймає значення 1.

Висновки. Розроблено математичну модель для аналітичного розрахунку електромагнітних параметрів та енергетичних показників магнітоелектричних машин. Модель складається з рівняння магнітного поля для немагнітного проміжку електричної машини та граничних умов з лінійними струмовими контурами для врахування зубцево-пазової структури статора з двошаровою обмоткою і системи постійних магнітів ротора. У моделі враховується змінна в часі частота обертання ротора, яка може бути задана довільно.

Математична модель та аналітичний метод розрахунку електромагнітного поля магнітоелектричних генераторів та двигунів дають змогу виконати розрахунок просторового розподілу змінної в часі індукції магнітного поля та векторного магнітного потенціалу в повітряному проміжку, електромагнітного моменту на валу ротора, струмів і напруг в обмотці статора, потужність. Модель може використовуватися для розрахунку індуктивності обмотки магнітоелектричної машини з урахуванням коефіцієнту магнітного зв'язку між фазами, а також для розрахунку індукованої постійними магнітами напруги в обмотці статора з нелінійним механічним навантаженням на вал ротора як в режимі генератора, так і в режимі двигуна.

Робота фінансується державною програмою "Розвиток удосконалених електромеханічних та електромагнітних систем електростанцій та методів їх діагностики" ("Агрегат-3", державний реєстраційний номер 0122U000840).

1. Ращепкін А.П., Кондратенко І.П., Карлов О.М., Кришук Р.С. Магнітоелектричний перетворювач енергії морських хвиль. *Технічна електродинаміка*. 2021. № 4. С. 25-34. DOI: <https://doi.org/10.15407/techned2021.04.025>.
2. COMSOL Multiphysics. Theory for the AC/DC Module. URL: <https://doc.comsol.com> (дата доступу 24.01.2024).
3. Zhiltsov A., Sorokin D. The calculation of the magnetic field in the working area of the linear motor with permanent magnets. 16th International Conference on *Computational Problems of Electrical Engineering (CPEE)*. Lviv, Ukraine, 02-05 September 2015. Pp. 252-254. DOI: <https://doi.org/10.1109/CPEE.2015.7333390>.
4. Ращепкин А.П., Кондратенко И.П. Методологические основы анализа электромагнитных процессов в линейных индукционных машинах. К.: ИЭД НАН України, 2017. 355с.
5. Rasmussen K.F., Davies J.H., Miller T.J.E., McGelp M.I., Oлару M. Analytical and numerical computation of air-gap magnetic fields in brushless motors with surface permanent magnets. *IEEE Transactions on Industry Applications*. 2000. Vol. 36. No 6. Pp. 1547-1554. DOI: <https://doi.org/10.1109/28.887205>.
6. Вольдек А.И. Индукционные магнитогидродинамические машины с жидкометаллическим рабочим телом. Л.: Энергия, 1970. 272 с.
7. Копылов И.П., Горяинов Ф.А., Клоков Б.К., Морозкин В.П., Токарев Б.Ф. Проектирование электрических машин. М.: Энергия, 1980. 496 с.

MATHEMATICAL MODEL OF A MAGNETOELECTRIC MACHINE

I.P. Kondratenko, R.S. Kryshchuk

**Institute of Electrodynamics National Academy of Sciences of Ukraine,
56, Beresteiskyi Ave., Kyiv, 03057, Ukraine.**

E-mail: dep7ied@ukr.net; dygogive@gmail.com.

A mathematical model is proposed for the calculation of electromagnetic parameters of magnetoelectric machines using an analytical method. Permanent magnets are abstracted as equivalent solenoids with constant current represented as current loops. The model differs from known models by the presence of double linear current loops in the stator for the analysis of magnetoelectric machines with a two-layer winding. Additionally, the proposed model considers linear

current loops of equivalent solenoids instead of point current loops for a more accurate calculation. The current loops of the stator and rotor are defined at the boundaries of the air gap of the electric machine, i.e., on the smooth slotless surfaces of the magnetic cores. The current loops are expressed for the first time as a product of three variables: current strength, linear current density coefficient, and spatial distribution coefficient. The inductance of stator slots and the resistance of the winding are taken into account using known analytical expressions from classical electric machine theory. The rotor rotation frequency is presented as a function of time. For magnetoelectric machines of specified dimensions and a given variable rotor rotation frequency, the distribution of magnetic field induction, vector magnetic potential, currents, winding spatial distribution coefficients, and electric field intensity of permanent magnets are calculated using the mathematical model. References 7, table 1, figures 4.

Keywords: magnetoelectric machine, mathematical model, analytical method, electromagnetic field, permanent magnets.

1. Raschepkin A.P., Kondratenko I.P., Karlov O.N., Kryshchuk R.S. Magneto-electric energy converter of sea waves. *Tekhnichna Elektrodynamika*. 2021. No 4. Pp. 25-34. DOI: <https://doi.org/10.15407/techned2021.04.025> (Ukr).
2. COMSOL Multiphysics. Theory for the AC/DC Module. URL: <https://doc.comsol.com> (accessed at 01.24.2024)
3. Zhiltsov A., Sorokin D. The calculation of the magnetic field in the working area of the linear motor with permanent magnets. 16th International Conference on *Computational Problems of Electrical Engineering (CPEE)*. Lviv, Ukraine, 02-05 September 2015. Pp. 252-254. DOI: <https://doi.org/10.1109/CPEE.2015.7333390>.
4. Rashchepkin A.P., Kondratenko I.P. Methodological bases of the analysis of electromagnetic processes in linear induction machines. Kyiv: Instytut elektrodynamiky Natsionalnoi akademii nauk Ukrainy, 2017. 355 p. (Rus)
5. Rasmussen K.F., Davies J.H., Miller T.J.E., McGelp M.I., Olaru M. Analytical and numerical computation of air-gap magnetic fields in brushless motors with surface permanent magnets. *IEEE Transactions on Industry Applications*. 2000. Vol. 36. No 6. Pp. 1547-1554. DOI: <https://doi.org/10.1109/28.887205>.
6. Voldyck A.I. Liquid metal induction magnetohydrodynamic machines. Leningrad: Energiia, 1970. 272 p. (Rus)
7. Kopylov I.P., Goryainov F.A., Klovov B.K., Morozkin V.P., Tokarev B.F. Design of electrical machines. Moskva: Energiia, 1980. 496 p. (Rus)

Надійшла 25.01.2024
Остаточний варіант 24.02.2024