

## ЗАДАЧА ПРОДОВЖЕННЯ ПЛОСКОМЕРИДІАННОГО МАГНІТОСТАТИЧНОГО ПОЛЯ З ПЛОСКОЇ ГРАНИЧНОЇ ПОВЕРХНІ ФЕРОМАГНЕТИКА

В.М. Михайлов\*, докт. техн. наук

Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»,

вул. Кирпичова, 2, Харків, 61002, Україна,

e-mail: [valery.m.mikhailov@gmail.com](mailto:valery.m.mikhailov@gmail.com).

Сформульовано задачу продовження плоскомеридіанного магнітостатичного поля з плоскої граничної поверхні феромагнетика відносно магнітного потоку та скалярного потенціалу. Граничні умови для магнітного потоку не є класичними, оскільки шукана функція на границі невідома, а її нормальна похідна дорівнює нулю. Формулювання для скалярного потенціалу є задачею Коші для рівнянь в часткових похідних еліптичного типу. Аналітичні розв'язки задачі отримано за допомогою методу часткових розв'язків, безперервно залежних від параметра, та інтегрального перетворення Ханкеля. Доведено їхню достовірність. Показано, що подібні властивості мають задачі продовження плоскомеридіанних полів з плоскої границі ідеального провідника для магнітного поля та провідника для постійного у часі електричного поля. Встановлено, що лінії поля, котрі обмежують шуканий профіль, безпосередньо визначаються розв'язком задачі Коші для однієї з двох функцій. Розраховано еквіпотенціальні лінії задля визначення профілю полюсного наконечника електромагніту. Бібл. 7, рис. 2, табл. 1.

**Ключові слова:** магнітостатичне поле, задача продовження поля, метод часткових розв'язків, інтегральне перетворення Ханкеля, полюсний наконечник електромагніту.

**Вступ.** В електромеханіці, технологіях обробки матеріалів, фізичних експериментах та приладобудуванні форму електродів, соленоїдів і полюсних наконечників визначають за допомогою розв'язків задач продовження поля з граничної поверхні [1–4]. У відомих роботах задачу продовження магнітостатичного поля з поверхні феромагнетика досліджено недостатньо [4]. Крім цього, два основних формулювання подібних задач (відносно потоку вектора та скалярного потенціалу) не порівнювалися для різних полів.

**Мета роботи** – формулювання та отримання аналітичних розв'язків задачі продовження плоскомеридіанного магнітостатичного поля з плоскої граничної поверхні феромагнетика та порівняння їх з подібними результатами для інших електричних і магнітних полів.

**Використання магнітного потоку.** Розглянемо плоску границю феромагнетика в циліндричних координатах  $r, \psi, z$  (рис. 1). Замінімо феромагнетик ідеальним феромагнітним півпростором  $z < 0$ .

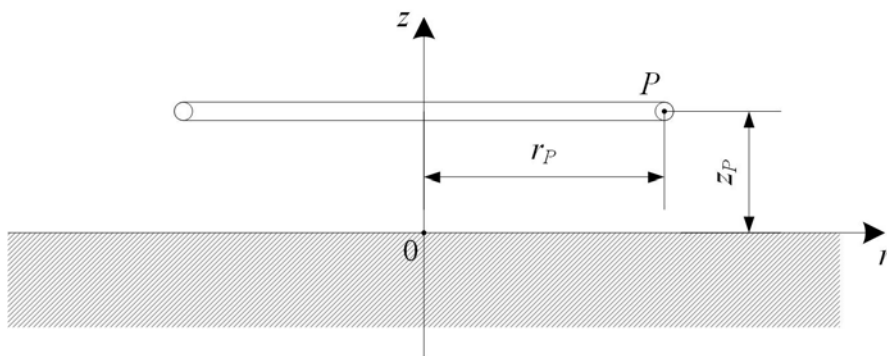


Рис. 1

У верхньому непровідному і немагнітному півпросторі  $z > 0$  необхідно відновити таке плоскомеридіанне магнітостатичне поле, котре на границі  $z=0$  має заданий розподіл нормальної проекції індукції  $\vec{B}$  ( $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ ,  $\vec{A}$  – векторний потенціал). Формулювання цієї задачі відносно магнітного потоку  $\Phi(r, z)$  має такий вигляд

© Михайлов В.М., 2025

\* ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7989-5932>

© Видавець Інститут електродинаміки НАН України, 2025



Це стаття відкритого доступу за ліцензією CC BY-NC-ND 4.0  
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/legalcode.uk>

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0, \quad (1)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_{z=0} = 2\pi r B_z(r, 0), \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad (2), (3)$$

де  $\Phi(r, z) = 2\pi r A_\psi(r, z)$ ,  $A_\psi(r, z)$  – єдина азимутальна проекція  $\vec{A}$ ;  $B_z(r, 0)$  – задана проекція  $\vec{B}$ .

Формулювання (1) – (3) відрізняється від класичного формулювання задачі Коші для рівнянь в часткових похідних еліптичного типу [5] граничними умовами (2), (3). Головні відмінності у тому, що на граничній поверхні шукана функція невідома, а її нормальна похідна дорівнює нулю. Фізичний смисл граничної умови (3) полягає у рівності нулю дотичної проекції  $B_r(r, 0)$ . Подібні властивості має задача продовження потоку  $\Phi_E(r, z)$  напруженості постійного плоскомеридіанного електричного поля з поверхні провідного півпростору (таблиця,  $\varphi(r, z)$  – потенціал електричного поля).

Середовище $z < 0$	Шукана функція	
	$\Phi(r, z)$	$\varphi_m(r, z)$
Ідеальний феромагнетик	Невідома. $\left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right _{z=0} = 0.$	$\varphi_m(r, 0) = 0.$ Задача Коші.
Ідеальний провідник	$\Phi(r, 0) = 0.$ Задача Коші.	Не відома. $\left. \frac{\partial \varphi_m}{\partial z} \right _{z=0} = 0.$
Провідник	$\Phi_E(r, z)$	$\varphi(r, z)$
	Невідома. $\left. \frac{\partial \Phi_E}{\partial z} \right _{z=0} = 0.$	$\varphi(r, 0) = 0.$ Задача Коші.

За припущенням аналітичності невідомої функції  $\Phi(r, 0)$  згідно теореми С. Ковалевської задача (1) – (3) має єдиний розв'язок. Використовуючи метод часткових розв'язків, безперервно залежних від параметра, та інтегральне перетворення Ханкеля [6], отримуємо

$$\Phi(r, z) = 2\pi r \int_0^\infty B_z(\lambda) J_1(\lambda r) \operatorname{ch}(\lambda z) d\lambda, \quad (4)$$

$$\text{де } B_z(\lambda) = \int_0^\infty B_z(r, 0) r J_0(\lambda r) dr, \quad \lambda - \text{параметр.}$$

З розв'язку (4) витікає, що на відміну від задачі продовження магнітного потоку з плоскої поверхні ідеального провідника (таблиця), функція  $\Phi(r, 0)$  не є сталою.

**Використання скалярного потенціалу магнітного поля.** Формулювання задачі, що розглядається, відносно скалярного потенціалу магнітного поля  $\varphi_m(r, z)$  ( $\vec{B} = -\mu_0 \operatorname{grad} \varphi_m$ ,  $\mu_0$  – магнітна стала) має такий вигляд

$$\frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_m}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial z^2} = 0, \quad (5)$$

$$\varphi_m(r, 0) = \text{const}, \quad (6)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi_m}{\partial z} \right|_{z=0} = -\frac{1}{\mu_0} B_z(r, 0). \quad (7)$$

Зауважимо, що (5) – (7) є класичним формулюванням задачі Коші [5]. У граничній умові (6) відображено те, що потенціал  $\varphi_m(r, z)$  усюди, у тому числі й на границі  $z=0$ , визначений з точністю до деякої сталої, котра не впливає на проекції  $\vec{B}$ . Тому прийемо  $\varphi_m(r, 0) = 0$ . З урахуванням цього розв'язок задачі (5) – (7), отриманий тими ж методами, має вигляд

$$\varphi_m(r, z) = -\frac{1}{\mu_0} \int_0^\infty B_z(\lambda) J_0(\lambda r) \operatorname{sh}(\lambda z) d\lambda. \quad (8)$$

Розв'язку (8) відповідають формули для визначення проекцій  $\vec{B}$  у верхньому півпросторі

$$B_r(r, z) = -\int_0^\infty \lambda B_z(\lambda) J_1(\lambda r) \operatorname{sh}(\lambda z) d\lambda, \quad (9)$$

$$B_z(r, z) = \int_0^\infty \lambda B_z(\lambda) J_0(\lambda r) \operatorname{ch}(\lambda z) d\lambda. \quad (10)$$

У формулах (4), (8) – (10)  $J_0(\lambda r)$ ,  $J_1(\lambda r)$  – функції Бесселя першого роду нульового та першого порядку;  $B_z(\lambda)$  – інтегральне перетворення Ханкеля функції  $B_z(r, 0)$  [6].

**Достовірність та використання отриманих розв'язків.** Припустимо, що розв'язок (8) достовірний. Нехай  $P$  – деяка точка з координатами  $r_p, z_p$  у верхньому півпросторі (рис. 1). Тоді магнітний потік крізь поверхню, що обмежена нескінченно тонким кільцем радіуса  $r_p$  на відстані  $z_p$  від границі  $z=0$ , дорівнює

$$\Phi(r_p, z_p) = 2\pi \int_0^{r_p} r B_z(r, z_p) dr. \quad (11)$$

Після підстановки в (11) формули (10) та інтегрування отримуємо розв'язок (4). Крім цього, відповідні (4) формули для визначення проєкцій  $\vec{B}$  співпадають з формулами (9), (10). *Достовірність отриманих розв'язків доведено.*

З наведених у таблиці даних витікає, що для визначення профілю достатньо отримати тільки один з двох розв'язків задачі продовження поля: у випадках магнітостатичного (ідеальний феромагнетик) та постійного у часі електричного (провідник) полів – для потенціалів  $\varphi_m(r, z)$  та  $\varphi(r, z)$ , магнітного поля при різкому поверхневому ефекті (ідеальний провідник) – для магнітного потоку  $\Phi(r, z)$ . Це є розв'язок задачі Коші, за допомогою котрого розраховуються потрібні лінії поля. Для більш детального дослідження корисним може бути другий розв'язок, котрий пов'язаний з першим для магнітостатичного поля умовами спряження

$$\frac{\partial \varphi_m}{\partial z} = -\frac{1}{2\pi\mu_0 r} \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad \frac{\partial \varphi_m}{\partial r} = \frac{1}{2\pi\mu_0 r} \frac{\partial \Phi}{\partial z}. \quad (12), (13)$$

Умови (12) та (13) правильні і для плоскомеридіанних магнітних полів, що продовжуються з циліндричної граничної поверхні та осі  $z$ , оскільки вони не залежать від граничних умов.

**Визначення профілю полюсного наконечника електромагніту.** Нехай на плоскій поверхні феромагнетика зі сторони непровідного та немагнітного середовища треба створити магнітостатичне поле з заданим розподілом індукції

$$B_z(r, 0) = B_0 \exp(-a^2 r^2), \quad (14)$$

де  $B_0, a$  – параметри.

Для розрахунків координат екіпотенціальних ліній було використано формулу (8) та інтегральне перетворення Ханкеля для розподілу (14) [6]. Застосовано такі безрозмірні (з зірочками) та базисні величини:  $B_z^* = B_z/B_b$ ,  $\varphi_m^* = \varphi_m/\varphi_{mb}$ ,  $r^* = r/R$ ,  $z^* = z/R$ ,  $a^* = aR$ ,  $R$  – базисна довжина,  $\varphi_{mb} = \mu_0 B_b/R$ ,  $B_b = B_0$ .

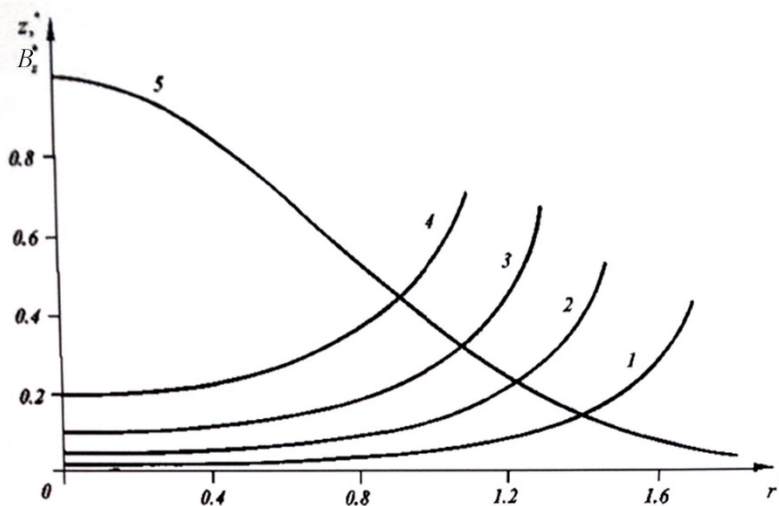


Рис. 1

На рис. 2 показано екіпотенціальні лінії 1–4 магнітостатичного поля над поверхнею феромагнетика (для кривої 1  $\varphi_m^* = -0,02$ , 2 –  $(-0,05)$ , 3 –  $(-0,1)$ , 4 –  $(-0,2)$ ) та залежність  $B_z^*(r^*, 0)$  (крива 5,  $a^* = 1$ ). Будь-яка з ліній 1–4 може бути контуром основної частини профілю полюсного наконечника з феромагнетика, що забезпечує розподіл (14).

**Висновки.** 1. Два різних формулювання (за допомогою скалярного потенціалу та потоку вектора поля) задач продовження плоскомеридіанних електричних і магнітних полів з плоскої граничної поверхні та осі мають наступні загальні властивості. У тих випадках, коли в од-

ному з формулювань на границі шукана функція невідома, її нормальна похідна дорівнює нулю. При цьому друге формулювання є задачею Коші для рівняння еліптичного типу.

2. Задача продовження магнітостатичного поля з плоскої поверхні феромагнетика аналогічна задачі продовження постійного у часі електричного поля з плоскої поверхні провідника, а її формулювання відносно скалярного потенціалу є задачею Коші.

1. Belyy I.V., Fertik S.M., Khimenko L.T. Electromagnetic metal forming handbook. Ohio State University, 1996. 168 p.
2. Shneerson G.A., Dolotenko S.I., Krivosheev S.I. Strong and superstrong pulsed magnetic field generation. Berlin-Boston: De Gruyter, 2014. 429 p. DOI: <https://doi.org/10.1515/9783110252576>.
3. Якимов О.М. Математичне моделювання та оптимальний синтез аксіально-симетричних джерел магнітного поля з ферромагнітними елементами: автореф. дис. ... канд. техн. наук: 01.05.02. Вінницький національний технічний університет. Вінниця. 2013. 21 с.
4. Михайлов В.М. Функції Гріна плоскомеридіанних електричних та магнітних полів над плоскою граничною поверхнею. *Технічна електродинаміка*. 2018. № 4. С. 5–9. DOI: <https://doi.org/10.15407/techned2018.04.005>.
5. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. 4. М.-Л.: ГИТТЛ, 1951. 804 с.
6. Лебедев Н.Н., Скальская И.П., Уфлянд Я.С. Сборник задач по математической физике. М.: ГИТТЛ, 1955. 420 с.
7. Михайлов В.М. Розрахунок профілів соленоїдів для отримання сильних імпульсних магнітних полів із заданим розподілом на осі. *Технічна електродинаміка*. 2020. № 4. С. 5–10. DOI: <https://doi.org/10.15407/techned2020.04.005>.

### PROBLEM OF AXISYMMETRIC STEADY MAGNETIC FIELD CONTINUATION FROM FLAT FERROMAGNETIC BOUNDARY

V.M. Mikhailov

National Technical University “Kharkiv Polytechnic Institute”,  
2, Kyrpychova Str., Kharkiv, 61002, Ukraine,  
e-mail: [valery.m.mikhailov@gmail.com](mailto:valery.m.mikhailov@gmail.com).

*The problem of axisymmetric steady magnetic field continuation from flat boundary surface of ferromagnetic is formulated for magnetic flux and scalar potential. Boundary conditions for magnetic flux are not classical because on boundary magnetic flux is unknown and its normal derivative equal zero. The formulation for scalar potential is Cauchy's problem for elliptical partial differential equation. Analytical solutions of the problem are obtained by method of partial solutions, which depend on parameter continuously, and Hankel's integral transformation. It is shown that there are similar properties in problems of axisymmetric fields continuation from flat boundaries of ideal conductor for magnetic field and conductor for steady electric field. It is fixed that field lines, which bound unknown profile, are determined directly by solution of Cauchy's problem for one from two functions. Equipotential lines are calculated to determine of electromagnetic pole profile. References 7, figures 2, table 1.*

**Keywords:** steady magnetic field, problem of field continuation, method of partial solutions, Hankel's integral transformation, electromagnet pole profile.

1. Belyy I.V., Fertik S.M., Khimenko L.T. Electromagnetic metal forming handbook. Ohio State University, 1996. 168 p.
2. Shneerson G.A., Dolotenko S.I., Krivosheev S.I. Strong and superstrong pulsed magnetic field generation. Berlin–Boston: De Gruyter, 2014. 429 p. DOI: <https://doi.org/10.1515/9783110252576>.
3. Yakimov O.M. Mathematical modeling and optimal synthesis axially-symmetrical magnetic field sources with ferromagnetic elements: author's abstract of Cand. tech. sci. diss.: 01.05.02. Vinnytsia National Technical University. Vinnytsia. 2013. 21 p. (Ukr)
4. Mikhailov V.M. Green's functions of axisymmetric electric and magnetic fields above flat boundary surface. *Tekhnichna Elektrodynamika*. 2018. No 4. Pp. 5–9. DOI: <https://doi.org/10.15407/techned2018.04.005>. (Ukr)
5. Smirnov V.I. The course of higher mathematics. Vol. 4. Moskva-Leningrad: GITTL, 1951. 804 p. (Rus)
6. Lebedev N.N., Skalskaia I.P., Ufliand Ya.S. Compilation of mathematical physics problem. Moskva: GITTL, 1955. 420 p. (Rus)
7. Mikhailov V.M. Calculation of profiles of solenoids for generation of high pulse magnetic fields with given distribution on axis. *Tekhnichna Elektrodynamika*. 2020. No 4. Pp. 5–10. DOI: <https://doi.org/10.15407/techned2020.04.005>. (Ukr)

Надійшла 04.04.2024  
Остаточний варіант 12.05.2024