

ДОСЛІДЖЕННЯ ПЕРЕТВОРЮВАЧА КУКА З МАГНІТОПОВ'ЯЗАНИМИ ІНДУКТОРАМИ МЕТОДОМ УСЕРЕДНЕННЯ

Ю.В. Руденко*, докт. техн. наук
Інститут електродинаміки НАН України,
пр. Берестейський, 56, Київ, 03057, Україна.
E-mail: rudenko@ied.org.ua.

Досліджено електромагнітні процеси у перетворювачі за топологією Кука, що містить в собі індуктори з магнітопов'язаними обвитками. З використанням метода усереднення на основі теорем Лагранжа розроблено математичну модель перетворювача та отримано аналітичні вирази для його розрахунку. Отримані співвідношення завдяки відсутності громіздких проміжних математичних перетворень спрощують розрахунок середніх та пульсаційних значень струмів та напруг у реактивних елементах перетворювача з магнітопов'язаними індукторами. Розраховано графічні залежності амплітуди пульсацій струмів вхідного, вихідного індукторів та вихідної напруги перетворювача. Підтверджено, що за допомогою змінення пропорції між відношенням кількості витків індукторів та коефіцієнтом магнітного зв'язку між ними можна реалізовувати заданий рівень вказаних пульсацій. Отримано аналітичні умови, за яких досягаються мінімальні значення пульсацій струмів вхідного, вихідного індукторів та вихідної напруги даного перетворювача. Бібл. 14, рис. 7, табл. 1.

Ключові слова: перетворювачі постійної напруги, перетворювач Кука, магнітопов'язаний індуктор, метод усереднення в просторі станів, теореми Лагранжа.

Перетворювачі постійної напруги мають широке використання в різних галузях електротехніки та енергетики. Одними із широкоживаних вузлів в перетворювальних пристроях є магнітопов'язані індуктори (МІ) як особлива форма багатообвиткових електромагнітних структур (трансформаторів). У високочастотних напівпровідникових перетворювачах вони використовуються в багатьох застосуваннях, таких як перетворювачі з кількома виходами та перехресним регулюванням, багатофазні регулятори, перетворювачі із зменшеним рівнем пульсацій та інші [1]. Крім того, МІ – це потужний засіб зменшення габаритів перетворювача. Як показано у багатьох роботах, починаючи із ранніх [2, 3] і продовжуючи сучасними [4–9], застосування МІ замість декількох окремих індукторів у перетворювачах має істотні переваги. При тих самих пульсаціях струму та втратах енергії в обвитках індукторів вдається значно скоротити об'єм магнітного матеріалу та більш раціонально використати конструкцію. Причому, головною перевагою використання МІ у перетворювачі є можливість отримання майже нульових пульсацій струму за кінцевих розмірах реактивних елементів [2, 3]. Одним з типів перетворювачів, в якому можуть використовуватися магнітопов'язані індуктори, є перетворювач Кука. Аналізу процесів у перетворювальних пристроях та зокрема у перетворювачах Кука з МІ присвячено багато робіт [1–10]. Тим не менше, розрахунок процесів у цих роботах вимагає застосування складних та трудомістких проміжних перетворень. Відомі в згаданих та інших роботах методи зводяться у висновок до так званих числових та матричних методів, за допомогою яких жодним чином неможливо без додаткового розрахунку та обробки великих масивів інформації визначити поведінку характеристик перетворювача в діапазонах комутації та в інших діапазонах

©Руденко Ю.В., 2025

* ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1852-215X>

© Видавець Інститут електродинаміки НАН України, 2025



Це стаття відкритого доступу за ліцензією CC BY-NC-ND 4.0
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/legalcode.uk>

змінення внутрішніх параметрів – наприклад, визначати екстремуми характеристик та інш. Спростити розрахунок процесів в таких перетворювачах та удосконалити аналіз їх властивостей дозволяє метод усереднення в просторі станів на основі теорем Лагранжа [11–4], який дає змогу отримати аналітичні розрахункові моделі та співвідношення. Аналітичні моделі дають можливість не тільки широкого узагальнення властивостей та характеристик процесів. Головне – вони дають можливість застосування методів математичного аналізу цих характеристик (визначення тенденцій змінення, екстремумів та інш) та одночасно забезпечують простоту використання без застосування громіздких проміжних обчислень, включаючи використання комп’ютерних засобів. Тому **метою** даної роботи є розробка математичної моделі та аналітичних співвідношень для розрахунку процесів у перетворювачі Кука з магнітопов’язаними індукторами за допомогою метода усереднення на основі теорем Лагранжа.

Розглянемо структуру зазначеного перетворювача, схема якого зображена на рис.1. На схемі позначено силові перемикаючі елементи $VT1$, $VD1$, магнітопов’язані індуктори з індуктивностями $L1$, $L2$ з певним співвідношенням між кількістю витків в індукторах та коефіцієнтом магнітного зв’язку між ними, що обумовлює величину взаємної індуктивності M , накопичувальний конденсатор $C1$, вихідний конденсатор $C2$, навантаження з опором R_n . Напрямки струмів вхідного $L1$ та вихідного $L2$ індукторів позначено відповідно i_1 та i_2 .

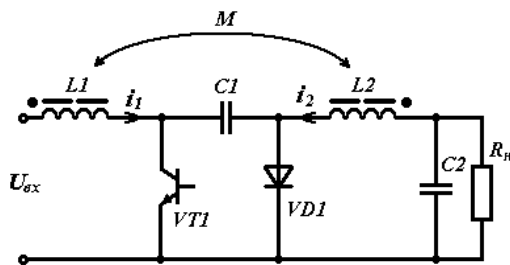


Рис. 1

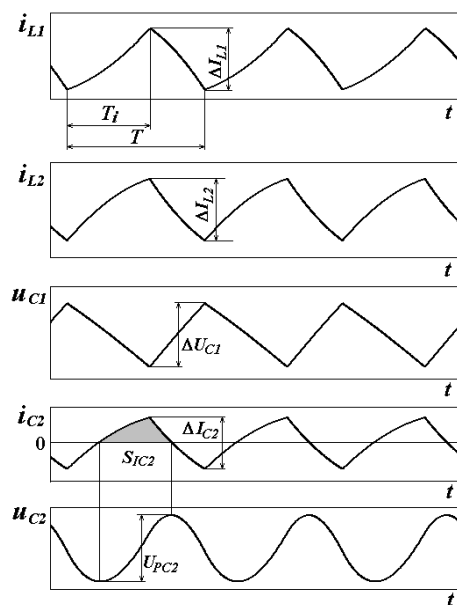


Рис. 2

Область фігури з цією площею S_{C2} позначена на рис. 2 сірим кольором.

Еквівалентні схеми заміщення перетворювача на інтервалах комутації зображено на рис. 3. На рис. 3, а представлено схему заміщення за відкритим транзисторі та закритим діоді, на рис. 3, б – схему заміщення за відкритим діоді та закритим транзисторі. У відповідності до схем заміщення перетворювача згідно рис. 3 запишемо диференціальні рівняння для кожного інтервалу комутації.

Аналізуючи процеси у перетворювачі, будемо розглядати режим безперервної передачі енергії в реактивних елементах. Прийемо наступні припущення: силові перемикаючі елементи (транзистор і діод) є ідеальними ключами, час їхнього перемикання (комутація) дорівнює нулю. Опори перемикаючих елементів у відкритому стані, а також активні опори обвитків індукторів дорівнюють нулю.

Часові діаграми, що описують процеси в перетворювачі в режимі безперервної передачі енергії в реактивних елементах, зображено на рис. 2.

Періодичний усталений процес з періодом комутації T включає в собі два інтервали стану перетворювача. Перший інтервал – відкритого стану транзистора $VT1$ і закритого стану діода $VD1$, що відповідає тривалості імпульсу керування транзистором T_i . Другий інтервал – закритий стан транзистора $VT1$ і відкритий стан діода $VD1$ з тривалістю $(T - T_i)$. На рис. 2 також позначено: i_{L1} – діаграма струму вхідного індуктора, i_{L2} – діаграма струму вихідного індуктора, u_{C1} – діаграма напруги накопичувального конденсатора $C1$, i_{C2} – діаграма струму вихідного конденсатора $C2$, u_{C2} – діаграма напруги конденсатора $C2$ (яка дорівнює вихідній напрузі перетворювача), ΔI_1 , ΔI_2 – прирости струмів i_1 , i_2 на інтервалах, ΔU_{C1} – приріст напруги u_{C1} на накопичувальному конденсаторі $C1$. В усталеному режимі величина приросту струму вихідного конденсатора i_{C2} визначається приростом струму i_{L2} , тобто $\Delta I_{C2} = \Delta I_{L2}$. Інтеграл струму i_{C2} , визначений на інтервалах його позитивних або негативних значень, дорівнює ампер-секундній площі S_{C2} та пропорційний пульсації вихідної напруги із загальною величиною U_{PC2} .

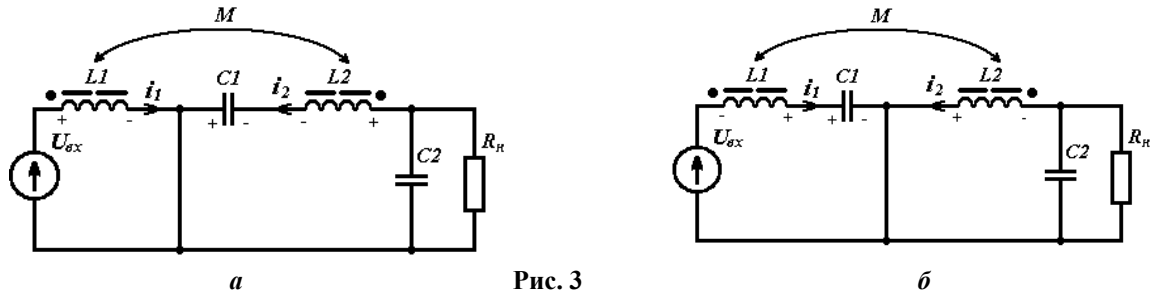


Рис. 3

На першому інтервалі (відкритого транзистора та закритого діода, рис. 3, а) маємо

$$\begin{cases} L1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = U_{ex} \\ C1 \frac{du_{C1}}{dt} = i_2 \\ u_{C1} - \left(L2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \right) = u_{C2} \end{cases} \quad (1)$$

На другому інтервалі (закритого транзистора та відкритого діода, рис. 3, б)

$$\begin{cases} - \left(L1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \right) + u_{C1} = U_{ex} \\ C1 \frac{du_{C1}}{dt} = i_1 \\ L2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = u_{C2} \end{cases} \quad (2)$$

Перейдемо до системи алгебраїчних рівнянь з усередненими змінними відносно струмів i_1 , i_2 , напруги u_{C1} , u_{C2} з урахуванням знаку приросту функцій змінних станів на інтервалах комутації перетворювача. Використовуючи метод усереднення в просторі станів на основі теорем Лагранжа [13] до виразів (1), (2), запишемо

$$\begin{cases} L1 \frac{\Delta I1}{T_i} + L1 \frac{K_{3\phi}}{K_{TP}} \cdot \frac{\Delta I2}{T_i} = U_{ex} \\ C1 \frac{\Delta U_{C1}}{T_i} = I_{ncp} \\ U_{C1} - \frac{L1}{K_{TP}^2} \cdot \frac{\Delta I2}{T_i} - L1 \frac{K_{3\phi}}{K_{TP}} \cdot \frac{\Delta I1}{T_i} = U_{C2} \\ -L1 \frac{\Delta I1}{T - T_i} - L1 \frac{K_{3\phi}}{K_{TP}} \cdot \frac{\Delta I2}{T - T_i} + U_{C1} = U_{ex} \\ C1 \frac{\Delta U_{C1}}{T - T_i} = I_{lcp} \\ \frac{L1}{K_{TP}^2} \cdot \frac{\Delta I2}{T - T_i} + L1 \frac{K_{3\phi}}{K_{TP}} \cdot \frac{\Delta I1}{T - T_i} = U_{C2}, \end{cases} \quad (3)$$

де $\Delta I1$, $\Delta I2$, ΔU_{C1} – прирости відповідних функцій змінних станів на інтервалах комутації перетворювача, що дорівнюють пульсаціям цих функцій, U_{C1} , U_{C2} – середні значення напруги на конденсаторі C1 та C2 за період комутації, I_{lcp} – середнє значення струму індуктора L1, I_{ncp} – середнє значення струму навантаження, що дорівнює середньому струму I_{2cp} індуктора L2 за період комутації, $K_{TP} = \sqrt{L1/L2} = w1/w2$ – коефіцієнт, що визначає співвідношення числа витків $w1$, $w2$ між обвитками

індукторів $L1$ та $L2$ відповідно (або коефіцієнт трансформації, що відображає масштабуючу характеристику параметрів магнітопов'язаних обвитків), $K_{36} = M/\sqrt{L1L2}$ – коефіцієнт магнітного зв'язку між цими обвитками, звідки випливає $M = L1K_{36}/K_{TP}$.

Система з шістьох алгебраїчних рівнянь (3) за інших заданих параметрів має шість невідомих незалежних змінних $\Delta I_1, \Delta I_2, \Delta U_{c1}, I_{lcp}, I_{ncp}, U_{c1}$ з урахуванням, що $U_{c2} = I_{ncp}R_n$. Тому ця система алгебраїчних рівнянь є повною та має єдиний розв'язок.

Перетворимо систему (3) в рівняння з відносними змінними. Для цього перепишемо всі члени системи відносно величини вихідної напруги U_{c2} або відносно величини вихідного струму I_{ncp} . Введемо також наступні позначення: $\gamma = T_i/T$ – відносна тривалість інтервалу відкритого стану транзистора, $\tau_1^* = L1/R_n T$ – відносна постійна часу контуру з елементами $L1$ і R_n , $\tau_c^* = C1R_n/T$ – відносна постійна часу контуру з елементами $C1$ і R_n . Позначимо також відносні змінні: $\Delta I_1^* = \Delta I_1/I_{ncp}$, $\Delta I_2^* = \Delta I_2/I_{ncp}$, $\Delta U_{c1}^* = \Delta U_{c1}/U_{c2}$, $I_{lcp}^* = I_{lcp}/I_{ncp}$, $U_{c1}^* = U_{c1}/U_{c2}$, $U_{\Pi}^* = U_{ex}/U_{c2}$. У такому разі система в базисі відносних усереднених змінних матиме вигляд

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_1^* \frac{\Delta I_1^*}{\gamma} + \tau_1^* \frac{K_{36}}{K_{TP}} \cdot \frac{\Delta I_2^*}{\gamma} = U_{\Pi}^* \\ \tau_c^* \frac{\Delta U_{c1}^*}{\gamma} = 1 \\ U_{c1}^* - \frac{\tau_1^*}{K_{TP}^2} \cdot \frac{\Delta I_2^*}{\gamma} - \tau_1^* \cdot \frac{K_{36}}{K_{TP}} \cdot \frac{\Delta I_1^*}{\gamma} = 1 \\ -\tau_1^* \cdot \frac{\Delta I_1^*}{1-\gamma} - \tau_1^* \cdot \frac{K_{36}}{K_{TP}} \cdot \frac{\Delta I_2^*}{1-\gamma} + U_{c1}^* = U_{\Pi}^* \\ \tau_c^* \frac{\Delta U_{c1}^*}{1-\gamma} = I_{lcp}^* \\ \frac{\tau_1^*}{K_{TP}^2} \cdot \frac{\Delta I_2^*}{1-\gamma} + \tau_1^* \cdot \frac{K_{36}}{K_{TP}} \cdot \frac{\Delta I_1^*}{1-\gamma} = 1 \end{array} \right. \quad (4)$$

Для подальшого аналізу процесів у перетворювачі необхідним є розв'язання отриманої системи алгебраїчних рівнянь (4) відносно незалежних змінних. Розв'язком цієї системи є наступні вирази:

$$\Delta I_1^* = \frac{\Delta I_1}{I_{ncp}} = \frac{1-\gamma}{\tau_1^*} \cdot \frac{1-K_{TP}K_{36}}{1-K_{36}^2}; \quad (5)$$

$$\Delta I_2^* = \frac{\Delta I_2}{I_{ncp}} = \frac{1-\gamma}{\tau_1^*} \cdot \frac{K_{TP}(K_{TP}-K_{36})}{1-K_{36}^2}; \quad (6)$$

$$\Delta U_{c1}^* = \frac{\Delta U_{c1}}{U_{c2}} = \frac{\gamma}{\tau_c^*}; \quad (7)$$

$$U_{c1}^* = \frac{U_{c1}}{U_{c2}} = \frac{1}{\gamma}; \quad (8)$$

$$I_{lcp}^* = \frac{I_{lcp}}{I_{ncp}} = \frac{\gamma}{1-\gamma}; \quad (9)$$

$$U_{\Pi}^* = \frac{U_{ex}}{U_{c2}} = \frac{1-\gamma}{\gamma}. \quad (10)$$

Задля повноти аналізу властивостей перетворювача, що розглядається, доцільним є отримання виразу для розрахунку пульсації вихідної напруги, яка дорівнює напрузі на конденсаторі $C2$. Слід зазначити, що функція напруги вихідного конденсатора u_{c2} у зазначеному перетворювачі має

кусково-параболічний характер на інтервалах комутації (рис. 2). Причому, прирости цієї функції на інтервалах комутації, як невідомі параметри для розв'язання методом усереднення, не відповідають величині пульсації U_{pC2} – різниці між максимальним та мінімальним її значенням та є значно меншими за пульсацію. В той же час найбільший практичний інтерес являє собою саме визначення величини найбільшого розмаху вихідної напруги, тобто її пульсації U_{pC2} , задля розрахунку якої метод усереднення на основі теорем Лагранжа є недоступним. Але задля визначення цієї величини можна використати відомі з теорії електротехніки закономірності, що характеризують процеси заряду-розряду конденсатора $C2$ на інтервалах комутації. Характер періодичного змінення величини заряду ΔQ конденсатора у разі змінення напруги на ньому в межах розмаху пульсації U_{pC2} визначається величиною ємності конденсатора $C2$: $\Delta Q/U_{pC2} = C2$. В свою чергу, величина струму заряду i_{C2} визначає швидкість змінення заряду конденсатора: $i_{C2} = dQ/dt$. Із даного виразу випливає, що сумарний заряд (розряд) конденсатора або його змінення ΔQ в усталеному режимі визначається інтегралом функції струму i_{C2} в межах позитивних (негативних) його значень за проміжок часу $T/2$

$$\Delta Q = \int_{T/2} i_{C2} dt.$$

Причому, цей визначений на проміжку $T/2$ інтеграл дорівнює ампер-секундній площі фігури S_{IC2} , обмеженої функцією струму i_{C2} в межах названого інтервалу. Як вказано вище, на рис. 2 область фігури S_{IC2} виділена сірим кольором.

Таким чином, з урахуванням наведених вище міркувань можна перейти до визначення пульсації напруги U_{pC2} на конденсаторі $C2$ (як різниці між максимальним та мінімальним її значенням) в усталеному режимі

$$U_{pC2} = \frac{1}{C} \int_{T/2} i_{C2} dt.$$

З огляду на характер функції i_{C2} (рис. 2), при заміні її задля спрощення функцією трикутної форми та з урахуванням рівності $\Delta I_{C2} = \Delta I_{L2}$ можемо записати формулу для визначення величини площі фігури S_{IC2}

$$S_{IC2} = \frac{T \cdot \Delta I_{L2}}{8}.$$

В такому разі величина пульсації напруги на конденсаторі $C2$ визначається таким чином:

$$U_{pC2} = \frac{T \cdot \Delta I_{L2}}{8C2}.$$

Тому, використовуючи вираз (6), маємо в завершеному вигляді

$$U_{pC2}^* = \frac{U_{pC2}}{U_{C2}} = \frac{(1-\gamma)T^2}{8L1C2} \cdot \frac{K_{TP}(K_{TP} - K_{36})}{1 - K_{36}^2}. \quad (11)$$

Отримані вирази (5) – (11) дають змогу розраховувати середні та пульсаційні складові процесів у перетворювачі, визначати його регульовальні та навантажувальні характеристики, розраховувати параметри струмів та напруг у перемикаючих елементах, а також граничні параметри існування режиму безперервних струмів та напруг в реактивних елементах.

З аналізу даних виразів слідує, що фактор магнітного зв'язку між обвитками індукторів в перетворювачі Кука впливає лише на величину пульсації струмів в цих обвитках та пульсацію вихідної напруги. Інші параметри згідно (7) – (10) не залежать від характеристик магнітного зв'язку між індукторами. Слід додати також з огляду формул (5), (6), (11), що вони мають фізичний зміст лише в разі відсутності ідеального зв'язку між обвитками індукторів перетворювача, тобто має виконуватися нерівність $K_{36} \neq 1$. Крім того, як підтверджується в багатьох дослідженнях [1, 4, 7, 9], під час проектуванні перетворювача з МІ для усунення негативних резонансних явищ небажаним є досягнення достатньо щільного магнітного зв'язку між обвитками індукторів, незважаючи на те, що в певному діапазоні змінення K_{36} таке ущільнення має переваги – зменшення пульсацій струмів вхідного, вихідного індукторів та вихідної напруги. Тобто, небажано, щоб через магнітний зв'язок відбувалася значна передача енергії. Тому в роботі [9] рекомендується під час розробки перетворювача з МІ обмежувати величину комплексного опору Z_{C1} накопичувального конденсатора

$C1$ на частоті f комутації на рівні не більше за одної десятої опору Z_{Ls} індуктивності розсіювання обвитка індуктора та активного опору R_{Ls} обвитка індуктора

$$|Z_{C1}| = \sqrt{(1/2\pi f C1)^2 + R_{C1}^2} \leq |Z_{Ls}|/10 = \sqrt{(2\pi f L_s)^2 + R_{Ls}^2}/10, \quad (12)$$

де R_{C1} – внутрішній активний опір конденсатора, L_s – індуктивність розсіювання обвитка індуктора.

Зважаючи на те, що індуктивність кожного обвитка індуктора визначається відношенням потокозчеплення самоіндукції до струму цього обвитка та використовуючи визначення взаємної індуктивності і індуктивності розсіювання обвитка, запишемо наступний вираз для характеристики індуктивності обвитка індуктора

$$L1 = L_{s1} + K_{TP} M,$$

звідки, з урахуванням формули $M = K_{36} \sqrt{L1 L2}$, випливає

$$L_{s1} = L1(1 - K_{36}) \text{ та } M = L1 K_{36} / K_{TP}.$$

Підставляючи отриману формулу для L_{s1} у співвідношення (12) та нехтуючи активним опором обвитків індуктора та внутрішнім опором конденсатора, запишемо вираз для розрахунку величини мінімальної ємності накопичувального конденсатора $C1$ в залежності від коефіцієнта зв'язку M , що забезпечує відсутність резонансних явищ у перетворювачі на частоті комутації

$$C1 \geq 10/4\pi^2 f^2 L1(1 - K_{36}). \quad (13)$$

З отриманих залежностей для розрахунку пульсацій струмів та напруги (5), (6), (11) видно, що величина цих пульсацій у всьому діапазоні комутації перетворювача, окрім параметру $\tau_1^* = L1/R_n T$, визначається певною пропорцією між коефіцієнтами співвідношення числа витків K_{TP} та магнітного зв'язку K_{36} між обвитками індукторів. Причому, в крайніх випадках, коли $K_{TP} = 1/K_{36} \neq 1$, пульсація струму вхідного індуктора перетворювача дорівнює нулю незалежно від параметрів τ_1^* та γ , пульсація струму вихідного індуктора перетворювача дорівнює

$$\Delta I_2^* = \frac{(1-\gamma)}{\tau_1^*} K_{TP}^2,$$

а пульсація вихідної напруги

$$U_{pC2}^* = \frac{(1-\gamma)T^2}{8L1C2} K_{TP}^2.$$

За значення $K_{TP} = K_{36} \neq 1$ пульсація струму вихідного індуктора так само, як пульсація і вихідної напруги, дорівнює нулю. Пульсація струму вхідного індуктора визначається наступним виразом:

$$\Delta I_1^* = \frac{1-\gamma}{\tau_1^*}.$$

Вся решта комбінацій параметрів K_{TP} та K_{36} , коли за результатами розрахунку згідно (5), (6), (11) пульсації здобувають позитивні значення, має задовольняти наступній нерівності:

$$\frac{1}{K_{36}} \geq K_{TP} \geq K_{36}. \quad (14)$$

Графічна ілюстрація даної умови зображена на рис. 4, а. Область параметрів K_{TP} та K_{36} , яка відповідає виразу (14), є заштрихованою на даному рисунку.

Для аналізу відносного співвідношення пульсацій струмів вхідного та вихідного індукторів перетворювача в залежності від параметрів K_{TP} та K_{36} , достатньо розглянути наступний показник:

$$\Psi = \frac{\Delta I_1^*}{\Delta I_2^*} = \frac{\Delta I_1}{\Delta I_2} = \frac{1 - K_{TP} K_{36}}{K_{TP}(K_{TP} - K_{36})}.$$

На рис. 4, б зображено графічне відображення залежності даного показника Ψ від параметрів K_{TP} та $K_{3\phi}$. За $K_{TP}=1$ пульсації струмів вхідного та вихідного індукторів дорівнюють одна одній. У разі зменшення коефіцієнта трансформації $K_{TP}<1$ пульсації струму вхідного індуктора збільшуються по відношенню до пульсацій струму вихідного індуктора у всьому діапазоні параметрів коефіцієнта зв'язку. І навпаки, у разі збільшення коефіцієнта трансформації $K_{TP}>1$ пульсації струму вхідного обмотки зменшуються по відношенню до пульсацій струму вихідного індуктора у всьому діапазоні параметрів коефіцієнта зв'язку.

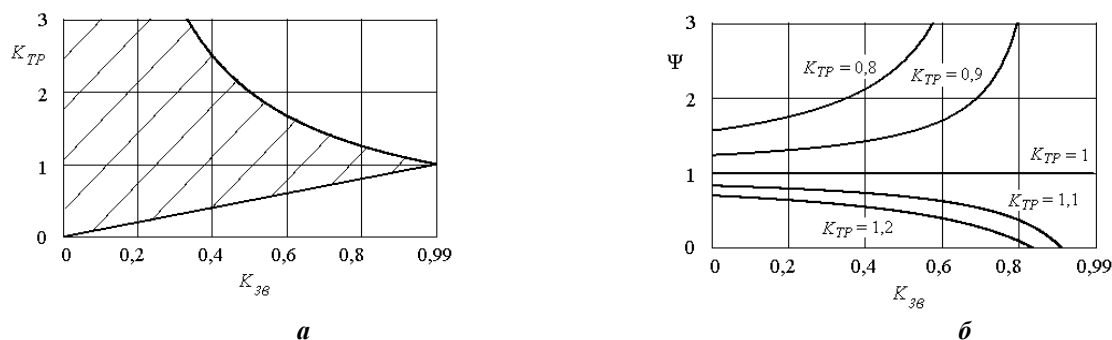


Рис. 4

Ілюстрація зазначених властивостей струмів індукторів (пульсацій струмів вхідного та вихідного індукторів) показана на графіках рис. 5. Графіки пульсацій струму вхідного індуктора ΔI_1^* позначено суцільними лініями, струму вихідного індуктора ΔI_2^* – пунктирними. За значення коефіцієнта трансформації $K_{TP}=1$ пульсації вказаних струмів співпадають між собою. Їхні амплітуди зменшуються від величини $\Delta I_1^* = \Delta I_2^* = (1-\gamma)/\tau_1^*$ за $K_{3\phi}=0$ до величини $\Delta I_1^* = \Delta I_2^* = (1-\gamma)/2\tau_1^*$ за $K_{3\phi} \rightarrow 1$. Збільшення коефіцієнта трансформації в діапазоні $K_{TP}>1$ (рис. 5, а) призводить до зменшення пульсацій струму вхідного індуктора ΔI_1^* та збільшення пульсацій струму вихідного індуктора ΔI_2^* . Причому, якщо за фіксованого коефіцієнта трансформації K_{TP} та збільшенні коефіцієнта зв'язку $K_{3\phi}$ амплітуда пульсацій вхідного індуктора ΔI_1^* монотонно зменшується до нуля, то амплітуда пульсацій вихідного індуктора ΔI_2^* має яскраво виражений мінімум, після якого починається її збільшення до величини $\Delta I_2^* = (1-\gamma)K_{TP}^2/\tau_1^*$. Таке збільшення пульсації вихідного індуктора після свого мінімуму продовжується до моменту, коли пульсація ΔI_1^* стає рівною нулю у разі досягнення рівності $K_{3\phi} = 1/K_{TP}$. На рис. 5, б показано, що в діапазоні значень коефіцієнта трансформації $K_{TP} < 1$ тенденція змінення пульсацій струмів вхідного та вихідного індукторів змінюється на протилежну. Зменшення коефіцієнта трансформації зменшує амплітуду пульсації вихідного індуктора ΔI_2^* , яка приймає нульові значення при досягненні рівності $K_{TP} = K_{3\phi}$, але збільшує пульсацію струму вхідного індуктора ΔI_1^* . В діапазоні значень $K_{TP} < 1$ за фіксованого коефіцієнта трансформації також існує мінімум під час зміни амплітуди пульсації, але вже струму вхідного індуктора ΔI_1^* , після чого його амплітуда зростає до величини $\Delta I_1^* = (1-\gamma)/\tau_1^*$ за $K_{TP} = K_{3\phi}$.

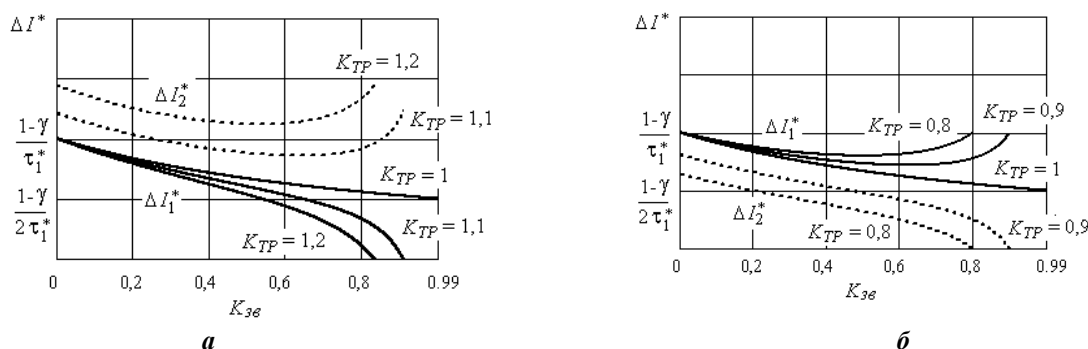


Рис. 5

Наявність точок мінімуму в графіках амплітуд пульсацій ΔI_1^* , ΔI_2^* вказує на можливість визначення координат екстремумів цих функцій, що має сприяти пошуку оптимальних параметрів перетворювача на стадії його проектування. В діапазоні $K_{TP} > 1$ розглянемо функцію ΔI_2^* (рис. 5, а) згідно формули (6). Аналіз знаходження точки екстремуму (мінімуму) цієї функції дає змогу визначити наступні координати цієї точки:

$$K_{зв\min} = K_{TP} - \sqrt{K_{TP}^2 - 1}, \quad (15)$$

$$\Delta I_{2\min}^* = \frac{1-\gamma}{2\tau_1^*} \cdot \frac{K_{TP}}{K_{TP} - \sqrt{K_{TP}^2 - 1}}. \quad (16)$$

В діапазоні значень коефіцієнта трансформації $K_{TP} < 1$ проаналізуємо на екстремум функцію ΔI_1^* (рис. 5, б) згідно формули (5). Аналіз показує наступні координати точки екстремуму (мінімуму):

$$K_{зв\min} = \frac{1 - \sqrt{1 - K_{TP}^2}}{K_{TP}}, \quad (17)$$

$$\Delta I_{1\min}^* = \frac{1-\gamma}{2\tau_1^*} \cdot \frac{K_{TP}^2}{1 - \sqrt{1 - K_{TP}^2}}. \quad (18)$$

З огляду на те, що пульсація вихідної напруги даного перетворювача обумовлюється величиною пульсації струму вихідного індуктора, закономірність змінення цих пульсацій є однаковою з точки зору впливу параметрів K_{TP} та $K_{зв}$, як свідчать формули (6) та (11). Тому можна записати також координати точки екстремуму (мінімуму) для величини пульсації вихідної напруги в діапазоні змінення $K_{TP} > 1$

$$K_{зв\min} = K_{TP} - \sqrt{K_{TP}^2 - 1}, \quad (19)$$

$$U_{pC2\min}^* = \frac{(1-\gamma)T^2}{8LIC2} \cdot \frac{K_{TP}}{K_{TP} - \sqrt{K_{TP}^2 - 1}}. \quad (20)$$

Таким чином, отримані формули (15) – (20) надають можливість розрахувати параметри K_{TP} та $K_{зв}$, які забезпечують мінімальні пульсації струму вихідного індуктора та мінімальні пульсації вихідної напруги перетворювача в діапазоні величин коефіцієнта трансформації $K_{TP} > 1$ та мінімальні пульсації струму вхідного індуктора в діапазоні величин $K_{TP} < 1$.

Отримані аналітичні співвідношення та результати розрахунків підтверджені за допомогою моделювання процесів в пакеті PSim. На рис. 6 зображено схему імітаційної моделі перетворювача в пакеті PSim.

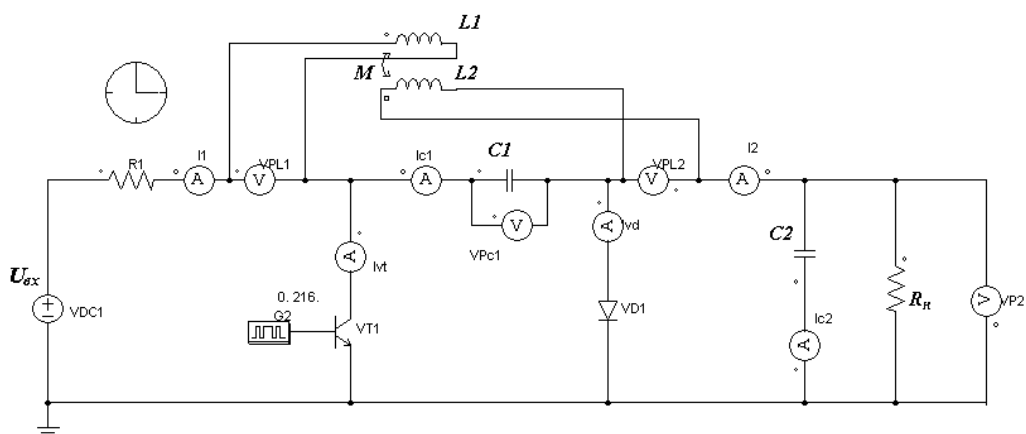


Рис. 6

Параметр	Результати згідно АМ	Результати згідно ІМ	Відносна різниця, %
$\Delta I_1, A$	1,615	1,609	0,37
$\Delta I_2, A$	0,907	0,899	0,89
$\Delta U_{c1}, B$	3,857	3,834	0,6
I_{LCP}, A	1,102	1,099	0,27
U_{c1}, B	428,571	428,309	0,06
U_{c2}, B	128,571	128,416	0,12
I_{HCP}, A	2,571	2,568	0,12
U_{PC2}, B	0,057	0,056	1,7

мінімуму пульсації струму вхідного індуктора згідно рис. 5, б за коефіцієнта трансформації $K_{TP} = 0,9$ та розрахованої по формулам (17), (18). Для даної точки мінімуму пульсації струму вхідного індуктора коефіцієнт зв'язку відповідає величині $K_{зв} = 0,63$, величина пульсації $\Delta I_{1\min} = 1,615 A$. Параметри елементів перетворювача у розрахунках відповідають наступним величинам: $U_{ex} = 300 B$, $L1 = 2 мГн$, $L2 = 2,47 мГн$, $M = 1,4 мГн$, $T = 50 мкс$, $T_n = 15 мкс$, $R_H = 50 Ом$, $C1 = 10 мкФ$, $C2 = 100 мкФ$.

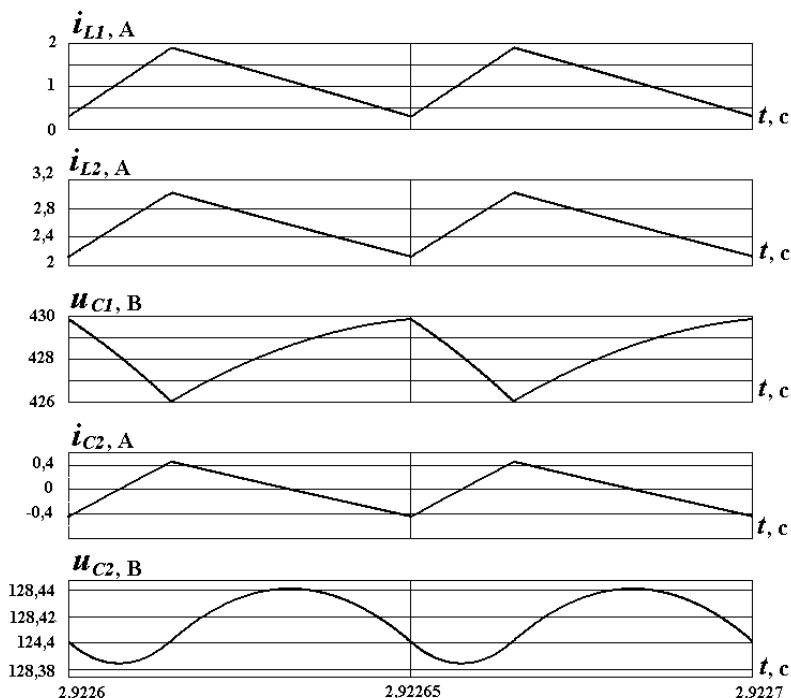


Рис. 7

тичного аналізу для ефективного дослідження його електромагнітних властивостей.

Розроблено прості та зручні аналітичні вирази, які дають можливість розраховувати та реалізовувати заданий рівень пульсацій струму вхідного, вихідного індукторів та вихідної напруги перетворювача за допомогою змінення пропорції між параметрами магнітопов'язаних індукторів: співвідношенням між числом витків обвитків індукторів та коефіцієнтом магнітного зв'язку між ними. Розроблені аналітичні вирази безпосередньо придатні для визначення екстремальних значень вказаних параметрів індукторів перетворювача, що забезпечують мінімальні пульсації струмів індукторів. З огляду на відсутність подібних результатів у відомих сучасних наукових працях отримані аналітичні співвідношення обумовлюють їхню новизну та практичну цінність.

Розроблені аналітична математична модель та розрахункові співвідношення доповнюють інструментарій для аналізу процесів у перетворювачі шляхом усереднення на основі теорем Лагранжа та полегшують розрахунок характеристик в таких пристроях на етапі проектування – середніх та пульсаційних складових процесів у перетворювачі, його регулювальних та навантажувальних характеристик, параметрів струмів та напруг у перемикаючих елементах, граничних параметрів існування режимів безперервних струмів та напруг в реактивних елементах та інших.

Модель містить в собі всі елементи перетворювача Кука, включаючи магнітопов'язані індуктори та вимірювальні пристрої. В основі даного пакета для розрахунку використовуються числові методи розв'язання диференціальних рівнянь, які найбільш достовірно відображають характер процесів. Часовий крок розрахунку процесів в моделі складає 0,1 мкс.

В таблиці наведено результати розрахунку для одного з режимів, досліджених під час виконання роботи, який відповідає точці

В таблиці позначено: АМ – аналітична модель, ІМ – імітаційна модель. Результати, наведені в таблиці свідчать, що відносна різниця в розрахунках не перевищує 2%, що підтверджує адекватність розробленої аналітичної моделі перетворювача. На рис. 7 наведено результати розрахунків з допомогою імітаційної моделі, представлені у вигляді часових діаграм процесів.

Висновки.

Розроблено математичну модель та аналітичні співвідношення для розрахунку перетворювача постійної напруги за топологією Кука, що містить в собі магнітопов'язані індуктори. Продемонстровано можливість методу усереднення на основі теорем Лагранжа в отриманні характеристик даного перетворювача в аналітичному вигляді, що дає змогу застосовувати відомі методи матема-

Роботу виконано за держбюджетною темою "Розвиток теорії та принципів побудови енергоефективних високочастотних напівпровідникових перетворювачів модульної структури для потужних систем живлення електротехнологічного обладнання з нестационарним навантаженням" (Джерело-4), державний реєстраційний номер роботи 0124U00039. КПКВК 6541030.

1. Zhu G., Wang K. Modeling and design considerations of coupled inductor converters. 2010 Twenty-Fifth Annual IEEE *Applied Power Electronics Conference and Exposition (APEC)*, Palm Springs, CA, USA, 2010. Pp. 7–13.
2. Cuk S. A new zero-ripple switching dc-to-dc converter and integrated magnetic. *IEEE Transactions on Magnetics*. 1983. Vol. 19. No 2. Pp. 57–75.
3. Cuk S., Zhang Z. Coupled-inductor analysis and design. 17th Annual IEEE *Power Electronics Specialists Conference*, Vancouver, BC, Canada, June 1986. Pp. 655–665. DOI: <https://doi.org/10.1109/PESC.1986.7415621>.
4. Kang T., Suh Y. Optimized coupling factor design of multiplephase coupled inductor for minimum inductor current ripple operation in EV charger systems. IEEE 3rd International *Future Energy Electronics Conference and ECCE Asia* (IFEEC 2017 - ECCE Asia), Kaohsiung, Taiwan, June 2017. Pp. 1178–1183.
5. Mohammadian L., Babaei E. Investigating the effect of inductor coupling on intrinsic stability of cuk converter. IECON 2016 - 42nd Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society, Florence, Italy, Oct 2016. Pp. 1359–1364.
6. Sanchis-Kilders E., Ferreres A., Gasent-blea J.L., Maset E., Esteve V., Jordan J., Ejea J.B. Stability improvement of isolated multipleoutput dc/dc converter using coupled inductors. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*. August 2016. Vol. 52. No 4. Pp. 1644–1653.
7. Gilabert D., Sanchis-Kilders E., Martinez P.J., Maset E., Ferreres A., Esteve V. Zero Ripple Current with Coupled Inductors in Continuous Conduction Mode under PWM Signals. *IEEE Journal of Emerging and Selected Topics in Power Electronics*. 2020. Vol. 8. No 4. Pp. 4260–4269.
8. Tuztasi F.M., Ali Bekir Yildiz, Kelebek H. Modeling and Analysis of DC-DC CUK Converter with Coupled Inductors. *WSEAS Transactions on Circuits and Systems*. 2022. Vol. 21. Pp. 188-192.
9. Tompsett K. An Improved Topology for Creating Split Rails from a Single Input Voltage. AN-1106 APPLICATION NOTE. Analog Devices. URL: <https://www.analog.com/media/en/technical-documentation/application-notes/an-1106.pdf> (available at 06.05.2024)
10. Жуйков В.Я., Денисюк С.П., Мельничук Г.В. Моделювання систем з перетворювачами електроенергії з циклічно-змінюваними параметрами. Київ: Наш формат, 2018. 165 с.
11. Руденко Ю.В. Способ усреднения модели импульсных преобразователей постоянного напряжения. *Технічна електродинаміка*. 2017. № 3. С. 42–48. DOI: <https://doi.org/10.15407/techned2017.03.042>.
12. Руденко Ю.В. Усреднение модели двухтактного преобразователя постоянного напряжения. *Технічна електродинаміка*. 2018. № 1. С. 37–46. DOI: <https://doi.org/10.15407/techned2018.01.037>.
13. Руденко Ю.В., Щерба А.А. Аналіз багатointервальних процесів у напівпровідникових перетворювачах. Київ: Про Формат, 2020. 352 с.
14. Rudenko Yu. Analysis of DC-DC Converters by Averaging Method based on Lagrange Theorems. IEEE 2nd KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek). Kharkiv, Ukraine, September 12-17, 2021. Pp. 367-370.

INVESTIGATION OF CUK CONVERTER WITH MAGNETICALLY COUPLED INDUCTORS BY THE AVERAGING METHOD

Yu.V. Rudenko

**Institute of Electrodynamics National Academy of Sciences of Ukraine,
Beresteiskyi Ave., 56, Kyiv, 03057, Ukraine.**

E-mail: rudenko@ied.org.ua.

Electromagnetic processes in the converter according to the Cuk topology, which includes inductors with magnetically coupled windings, were studied. Using the averaging method based on Lagrange's theorems, a mathematical model of converter was developed and analytical expressions for its calculation were obtained. Due to the absence of cumbersome intermediate mathematical transformations, the obtained ratios simplify the calculation of average and ripple values of currents and voltages in the reactive elements of converter with magnetically coupled inductors. Graphical dependences of the amplitude of pulsation currents of the input and output inductors and the output voltage of converter were calculated. It has been confirmed that by changing the proportion between the ratio of number of turns of the inductors and the coefficient of magnetic coupling between them, it is possible to realize a given level of the specified ripple. Analytical conditions were obtained under which the minimum values of ripples of the currents of input and output inductors and the output voltage of this converter are achieved. References 14, figures 7, table 1.

Key words: dc converters, Cuk converter, magnetically coupled inductor, averaging method in state space, Lagrange's theorems.

1. Zhu G., Wang K. Modeling and design considerations of coupled inductor converters. 2010 Twenty-Fifth Annual IEEE *Applied Power Electronics Conference and Exposition (APEC)*, Palm Springs, CA, USA, 2010. Pp. 7–13.
2. Cuk S. A new zero-ripple switching dc-to-dc converter and integrated magnetic. *IEEE Transactions on Magnetics*. 1983. Vol. 19. No 2. Pp. 57–75.
3. Cuk S., Zhang Z. Coupled-inductor analysis and design. 17th Annual IEEE *Power Electronics Specialists Conference*, Vancouver, BC, Canada, June 1986. Pp. 655–665. DOI: <https://doi.org/10.1109/PESC.1986.7415621>.
4. Kang T., Suh Y. Optimized coupling factor design of multiplephase coupled inductor for minimum inductor current ripple operation in EV charger systems. IEEE 3rd International *Future Energy Electronics Conference and ECCE Asia* (IFEEC 2017 - ECCE Asia), Kaohsiung, Taiwan, June 2017. Pp. 1178–1183.
5. Mohammadian L., Babaei E. Investigating the effect of inductor coupling on intrinsic stability of cuk converter. IECON 2016 - 42nd Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society, Florence, Italy, Oct 2016. Pp. 1359–1364.
6. Sanchis-Kilders E., Ferreres A., Gasent-blea J.L., Maset E., Esteve V., Jordan J., Ejea J.B. Stability improvement of isolated multipleoutput dc/dc converter using coupled inductors. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*. August 2016. Vol. 52. No 4. Pp. 1644–1653.
7. Gilabert D., Sanchis-Kilders E., Martinez P.J., Maset E., Ferreres A., Esteve V. Zero Ripple Current with Coupled Inductors in Continuous Conduction Mode under PWM Signals. *IEEE Journal of Emerging and Selected Topics in Power Electronics*. 2020. Vol. 8. No 4. Pp. 4260–4269.
8. Tuztasi F.M., Ali Bekir Yildiz, Kelebek H. Modeling and Analysis of DC-DC CUK Converter with Coupled Inductors. *WSEAS Transactions on Circuits and Systems*. 2022. Vol. 21. Pp. 188–192.
9. Tompsett K. An Improved Topology for Creating Split Rails from a Single Input Voltage. AN-1106 APPLICATION NOTE. Analog Devices. URL: <https://www.analog.com/media/en/technical-documentation/application-notes/an-1106.pdf> (available at 06.05.2024).
10. Zhuikov V.Ya., Denisyuk S.P., Melnichuk G.V. Modeling of systems with power converters with cyclically changing parameters. Kyiv: Nash Format, 2018. 165 p. (Ukr)
11. Rudenko Yu.V. Mode of averaging of pulse DC converter model. *Tekhnichna Elektrodynamika*. 2017. No 3. Pp. 42–48. DOI: <https://doi.org/10.15407/techned2017.03.042>. (Rus)
12. Rudenko Yu.V. Averaging of push-pull DC converter model. *Tekhnichna Elektrodynamika*. 2018. No 1. Pp. 37–46. DOI: <https://doi.org/10.15407/techned2018.01.037>. (Rus)
13. Rudenko Yu.V., Shcherba A.A. Analysis of multi-interval processes in semiconductor converters. Kyiv: Pro Format, 2020. 352 p. (Ukr)
14. Rudenko Yu. Analysis of DC-DC Converters by Averaging Method based on Lagrange Theorems. *IEEE 2nd KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek)*. Kharkiv, Ukraine, September 12–17, 2021. Pp. 367–370.

Надійшла 10.05.2024
Остаточний варіант 01.07.2024