

УДК 537.32

Анатичук Л.І.<sup>1,2</sup>, Вихор Л.М.<sup>1</sup>, Коцур М.П.<sup>1</sup>,  
Кобилянський Р.Р.<sup>1,2</sup>, Каденюк Т.Я.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Інститут термоелектрики НАН і МОН України, вул. Науки, 1,  
Чернівці, 58029, Україна;

<sup>2</sup>Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича,  
вул. Коцюбинського 2, Чернівці, 58012, Україна

## ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ ЧАСОВОЮ ЗАЛЕЖНІСТЮ ТЕМПЕРАТУРИ ОХОЛОДЖЕННЯ В ТЕРМОЕЛЕКТРИЧНИХ ПРИСТРОЯХ

---

*Розглянуто фізичну модель термоелемента в нестационарному режимі охолодження, на холодній поверхні якого враховуються об'ємна теплоємність комутаційної та ізоляційної пластин і охолоджувального об'єкта, тепловиділення об'єкта, теплообмін з навколишнім середовищем, виділення тепла Джоуля на контактних опорах між термоелектричним матеріалом і металічною комутацією, а також вплив ефекту Томсона в об'ємі віток термоелемента. Описано метод розрахунку оптимальних залежностей струму живлення термоелемента від часу, які забезпечують задані часові залежності температури охолодження. Приводяться приклади результатів комп'ютерного моделювання оптимальних функцій керування струмом для заданих неперервних, кусково-неперервних та періодичних функцій температури охолодження від часу.*

**Ключові слова:** термоелемент, процес нестационарного термоелектричного охолодження, часові залежності температури, функції керування струмом.

*We consider a physical model of thermoelement in the unsteady-state cooling mode, on the cold surface of which account is taken of the volumetric heat capacity of connecting and insulating plates, heat release of the object, heat exchange with the environment, the Joule heat release on the contact resistances between thermoelectric material and metal interconnects, as well as the influence of the Thomson effect in the bulk of thermoelement legs. A method for calculation of optimal time dependences of thermoelement supply current ensuring the prescribed time dependences of cooling temperature is described. Examples of computer simulation results of optimal current control functions for given continuous, piecewise continuous and periodic functions of cooling temperature versus time are provided.*

**Key words:** thermoelement, unsteady-state thermoelectric cooling process, time dependences of temperature, current control functions.

### Вступ

Термоелектричний спосіб охолодження широко застосовується для забезпечення теплових режимів різноманітних електронних, медичних та вимірювальних пристроїв. В окремих випадках такі пристрої працюють в динамічних режимах, які вимагають змінювати температуру охолодження (нагріву) об'єкта згідно заданого часового закону. Термоелектричний охолоджувач

дозволяє легко реалізувати такі динамічні режими шляхом керування температурою охолодження (нагріву) за рахунок зміни в часі струму живлення термоелементів.

Актуальна задача керування процесом термоелектричного охолодження або нагріву полягає у встановленні оптимальної залежності струму живлення від часу, яка б забезпечувала задану часову залежність температури робочої поверхні термоелементів. Така задача відноситься до задач синтезу керування процесом нестационарного термоелектричного охолодження або нагріву.

Аналіз наукової інформації [1 – 10] показує, що опубліковані результати теоретичних досліджень процесу нестационарного охолодження переважно стосуються визначення поведінки температури в термоелементі за умов його живлення імпульсами струму певної заданої форми. Щодо задач синтезу керування, пов'язаних з пошуком оптимальних часових функцій струму для нестационарних процесів охолодження та нагріву, то сьогодні способи їх розв'язування вивчені недостатньо.

Мета роботи полягала у розробці алгоритму і комп'ютерних засобів для розрахунку оптимальної часової залежності струму живлення термоелектричного перетворювача, якою реалізується зміна за заданим законом температури об'єкта, що охолоджується або нагрівається цим перетворювачем.

Задача синтезу керування температурою охолодження в нестационарному режимі пов'язана з вирішенням двох питань. По-перше необхідно вміти визначати, чи може загалом бути реалізована задана часова залежність температури охолодження, адже можливість досягнення заданої температури за певний час пов'язана з обмеженнями швидкодії термоелектричного охолоджувача. Відповідь на це питання дає розв'язок оптимізаційної задачі про знаходження мінімальної температури охолодження за певний проміжок часу. Комп'ютерні методи розв'язування такої задачі запропоновані в [11, 12]. У цих роботах показано, яка мінімальна температура досягається в режимі нестационарного охолодження за різні проміжки часу за допомогою однокаскадних та двокаскадних термоелектричних охолоджувачів.

Друге питання полягає у знаходженні алгоритму, за яким для заданої часової функції температури охолодження  $T_c(t)$  визначається форма керуючого імпульсу струму  $I(t)$ . Методи розв'язування такої задачі розглядалися в роботах [13, 14]. Результати були отримані для наближених фізичних моделей термоелектричного охолоджувача в нестационарному режимі. Розглядалася лише одна термоелектрична вітка, параметри матеріалу якої, а саме коефіцієнти Зеєбека  $\alpha$ , питомого опору  $\rho$ , теплопровідності  $k$  і об'ємної теплоємності  $c$ , не залежать від температури. У [13] на холодній поверхні вітки враховано лише поглинання тепла Пельтьє, не враховуються теплоємність охолоджувального об'єкта, виділення тепла Джоуля на контактному опорі між термоелектричним матеріалом вітки і металічною комутацією, які суттєво впливають на температуру охолодження в динамічному режимі [15]. У [14] враховано вплив цих факторів, але не враховується потужність активного тепловиділення охолоджувального об'єкта в процесі нестационарного охолодження, що теж важливо в практичному використанні. Тому для знаходження взаємозв'язку між заданою функцією температури  $T_c(t)$  і керуючим струмом  $I(t)$  скористаємося уточненою фізичною моделлю термоелемента.

### **Фізична модель термоелемента в нестационарному режимі та її математичний опис**

Схема термоелемента в нестационарному режимі охолодження показана на рис. 1. Вітки термоелемента висотою  $l$  і перерізом  $s$  виконані з матеріалів  $n$ - і  $p$ -типу провідності. Характеристики матеріалів віток, а саме коефіцієнти термоЕРС  $\alpha_{n,p}(T)$  і питомого опору  $\rho_{n,p}(T)$

залежать від температури, а коефіцієнти теплопровідності  $\kappa_{n,p}$  і теплоємності  $c_{n,p}$  будемо вважати константами внаслідок їх несуттєвої залежності від температури в термоелектричних матеріалах для охолоджувачів. Припускається, що тепловиділяюча поверхня термоелемента підтримується при фіксованій температурі  $T_h$ , бокова поверхня віток є адіабатично ізолюваною. На холодному спаї термоелемента враховуються поглинання тепла Пельтьє, виділення тепла Джоуля на контактах спаю з контактним опором  $r_c$ , сумарна об'ємна теплоємність  $g$  комутаційної та ізоляційної пластин і охолоджувального об'єкта, теплообмін холодної поверхні з оточуючим середовищем, температура якого  $T_a$ , а також активне тепловиділення об'єкта, що охолоджується, потужність якого  $q_0$ .

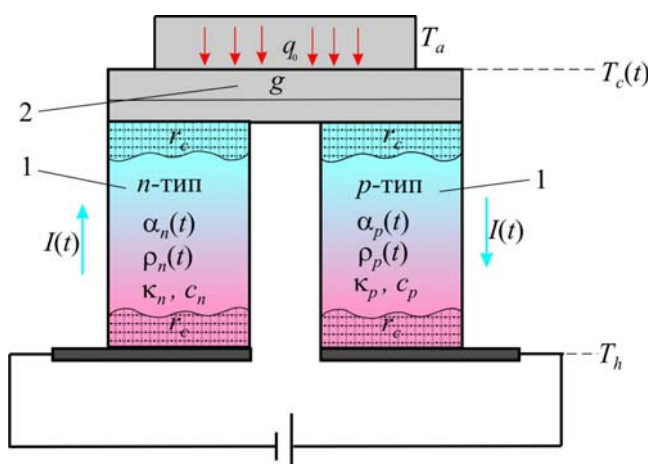


Рис. 1. Схема термоелемента в нестационарному режимі охолодження.

1 – вітки термоелемента, 2 – зосереджена об'ємна теплоємність  $g$  комутаційної та ізоляційної пластин і об'єкта охолодження.

Для такої моделі розподіл температури у вітках термоелемента задається системою одновимірних рівнянь нестационарної теплопровідності у вигляді

$$\begin{cases} c_n \frac{\partial T_n}{\partial t} = \kappa_n \frac{\partial^2 T_n}{\partial x^2} + \rho_n(T) \frac{I^2(t)}{s^2} - T_n \frac{\partial \alpha_n(T)}{\partial T_n} \frac{I(t)}{s} \frac{\partial T_n}{\partial x} \\ c_p \frac{\partial T_p}{\partial t} = \kappa_p \frac{\partial^2 T_p}{\partial x^2} + \rho_p(T) \frac{I^2(t)}{s^2} - T_p \frac{\partial \alpha_p(T)}{\partial T_p} \frac{I(t)}{s} \frac{\partial T_p}{\partial x} \end{cases}, \quad (1)$$

де  $x \in [0, l]$ ,  $t \in [0, t_{\max}]$ .  $I(t)$  – струм у вітках термоелемента, який є функцією часу. У рівняннях (1) враховано вплив ефекту Томсона, який виникає в об'ємі віток термоелемента внаслідок залежності коефіцієнтів термоЕРС  $\alpha_{n,p}(T)$  від температури.

Крайові умови для цих рівнянь мають вигляд

$$\begin{aligned} & \left[ \kappa_n s \frac{\partial T_n}{\partial x} + \kappa_p s \frac{\partial T_p}{\partial x} \right]_{x=0} - [\alpha_p(T_c(t)) + |\alpha_n(T_c(t))|] I(t) T_c(t) - \\ & - g \frac{\partial T_c(t)}{\partial t} - 2sH(T_c(t) - T_a) + 2 \frac{r_c}{s} I^2 + q_0 = 0 \\ & T_n(0, t) = T_p(0, t) \equiv T_c(t) \\ & T_n(l, t) = T_p(l, t) \equiv T_h \end{aligned} \quad (2)$$

де  $T_c(t)$  – температура холодної поверхні термоелемента є заданою функцією часу,  $H$  – коефіцієнт конвективного теплообміну у навколишньому середовищі.

Початковий розподіл температури у вітках відповідає стаціонарному розподілу при початковому значенні струму  $I_0$  і задається у вигляді функції

$$T_{n,p}(x, 0) = C_0 I_0^2 x^2 + C_1 x + C_2. \quad (3)$$

де  $C_0$ ,  $C_1$  і  $C_2$  – константи, які визначаються розв'язками стаціонарної задачі теплопровідності у вітках термоелемента при постійному струмі  $I_0$ .

За умов  $I_0=0$  А,  $T_h = T_a$  початкові умови крайової задачі (1) – (2) будуть мати простий вигляд

$$T_n(x, 0) = T_p(x, 0) \equiv T_a. \quad (4)$$

Задача полягає в тому, щоб знайти функцію керування струмом  $I(t)$  таку, що забезпечує задану залежність холодної температури від часу  $T_c(t)$ .

### Розв'язок задачі синтезу оптимального керування

Для розв'язування поставленої задачі скористаємося усередненими значеннями параметрів матеріалів віток термоелемента, а саме

$$\alpha = (\bar{\alpha}_p + |\bar{\alpha}_n|) / 2; \quad \rho = (\bar{\rho}_p + \bar{\rho}_n) / 2; \quad \kappa = (\kappa_p + \kappa_n) / 2; \quad c = (c_p + c_n) / 2. \quad (5)$$

Зауважимо, що в першому наближенні вплив ефекту Томсона в рівняннях (1) можна врахувати арифметичним усередненням коефіцієнтів термоЕРС в робочому інтервалі температур [16], а для коефіцієнтів питомого опору доцільно скористатися інтегральним усередненням [16]. Тоді середні значення цих коефіцієнтів в (5) визначаються наступним чином:

$$\bar{\alpha}_{n,p} = (\alpha_{n,p}(T_h) + \alpha_{n,p}(T_c(t))) / 2, \quad (6)$$

$$\bar{\rho}_{n,p} = \frac{1}{(T_h - T_c(t))} \int_{T_c(t)}^{T_h} \rho_{n,p} dT. \quad (7)$$

Такі наближення дозволяють розв'язувати замість задачі (1) – (3) для термоелемента аналогічну початково-крайову задачу нестационарної теплопровідності для одної вітки з усередненими згідно (5) – (7) термоелектричними параметрами  $\alpha$ ,  $\rho$ ,  $\kappa$  і  $c$ .

Застосовуючи метод перетворень Лапласа, як це було запропоновано в [14], отримаємо співвідношення між заданою функцією температури охолодження  $T_c(t)$  і функцією керування струмом  $I(t)$  у вигляді

$$I(t) = \frac{1}{\alpha T_c(t)} \left[ \frac{r_c}{s} I^2(t) + \frac{\kappa \rho}{c s l} \int_0^{at} K(t - \tau) I^2(\tau) d\tau + \Phi(t, T_c(t)) \right], \quad (8)$$

де

$$\Phi(t, T_c(t)) = -g \frac{dT_c(t)}{dt} - Hs T_c(t) - \frac{r_c}{s} I_0^2 + A - \frac{\kappa s}{l} \int_0^{at} \mathcal{Q}_1(t - \tau) \frac{dT_c(\tau)}{d\tau} d\tau - \frac{\kappa \rho}{c s l} I_0^2 \int_0^{at} K(\tau) d\tau,$$

$$A = (\alpha I_0 + Hs) \frac{\frac{\kappa s}{l} T_h + Hs T_a + q_0 + (0.5 + \frac{r_c}{\rho l}) \frac{\rho l}{s} I_0^2}{\alpha I_0 + Hs + \frac{\kappa s}{l}},$$

$$a = \frac{\kappa}{cl^2}, \quad K(t) = \mathcal{G}_1(t) - \mathcal{G}_0(t), \quad \mathcal{G}_1(t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-\pi^2 k^2 at),$$

$$\mathcal{G}_0(t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \exp(-\pi^2 k^2 at).$$

Співвідношення (8) є нелінійним інтегральним рівнянням, яке розв'язується чисельним методом послідовних наближень. Достатньо складний алгоритм розв'язування такого рівняння реалізується за допомогою програмних засобів комп'ютерного моделювання, розроблених в середовищі MathLab.

## Результати комп'ютерного моделювання

Моделювання функцій керування струмом, які забезпечують задані часові залежності температури охолодження, проводилося для термоелементів, вітки яких виконані з матеріалів на основі *Bi-Te* *n*- та *p*-типів провідності із стандартними термоелектричними характеристиками  $\alpha_{n,p}$ ,  $\rho_{n,p}$ ,  $\kappa_{n,p}$ ,  $c_{n,p}$  [17]. Розрахунки виконувались для віток висотою  $l = 0.14$  см, площею перерізу  $s = 0.1 \times 0.1$  см<sup>2</sup>, з величиною контактного опору  $r_c = 5 \cdot 10^{-6}$  Ом·см<sup>2</sup>. Враховувався теплообмін теплопоглинальної поверхні термоелементів з навколишнім середовищем, температура якого  $T_a = 300$  К, коефіцієнт теплообміну  $H = 10^{-3}$  Вт/см<sup>2</sup>К. Сумарна об'ємна теплоємність комутаційної та ізоляційної пластин і об'єкта охолодження дорівнювала  $g = 0.002$  Дж/К. Розглядалися варіанти роботи модулів в режимі без теплового навантаження, тобто значення тепловиділення охолоджуваного об'єкта приймалося рівним  $q_0 = 0$ , і з навантаженням на одну вітку  $q_0 = 0.03$  Вт.

На рис. 2 – 4 показані приклади заданих часових залежностей температури охолодження  $T_c(t)$  і розраховані для них відповідні функції керування струмом живлення термоелемента  $I(t)$ . На рис. 2 наведені залежності  $I(t)$ , які забезпечують неперервне пониження температури до заданої величини за заданий проміжок часу.

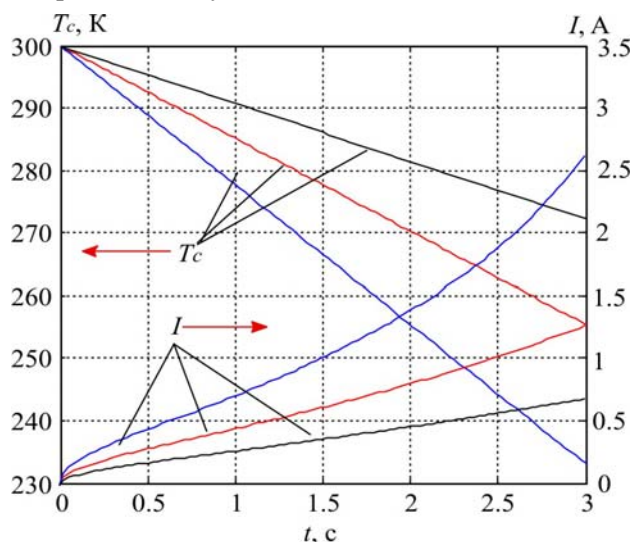


Рис. 2. Задані часові залежності температури охолодження  $T_c(t)$  і відповідні функції керування струмом живлення термоелемента  $I(t)$ .  $q_0 = 0$ .

На рис. 3 показані приклади кусково-лінійних функцій температури від часу  $T_c(t)$  і відповідні їм керування  $I(t)$ . Очевидно, що вибір такого оптимального керування дає можливість зменшити час виходу термоелектричного пристрою в стаціонарний режим.

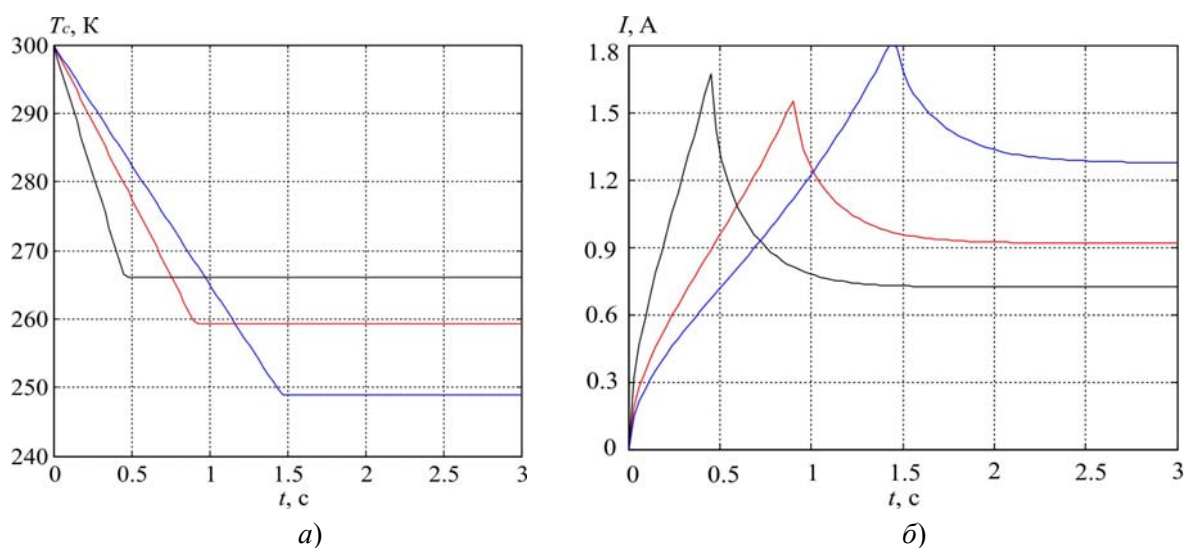


Рис. 3. а) Задані часові залежності температури охолодження  $T_c(t)$  і б) відповідні функції керування струмом живлення термоелемента  $I(t)$ .  $q_0 = 0$ .

На рис. 4 показана періодична зміна температури охолодження, яка забезпечується відповідною періодичною функцією керування струмом живлення термоелементів.

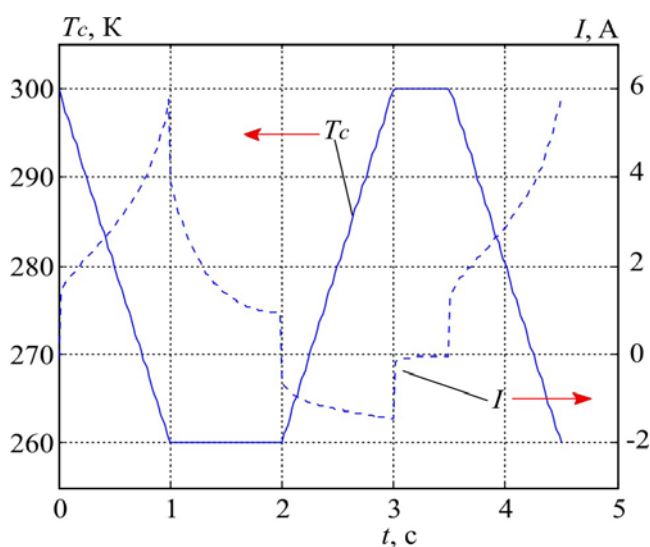


Рис. 4. Задані часові залежності температури охолодження  $T_c(t)$  і відповідні функції керування струмом живлення термоелемента  $I(t)$ .  $q_0 = 0.03$  Вт.

## Висновки

1. Розроблений метод комп'ютерного моделювання дозволяє визначити оптимальні часові функції керування струмом живлення термоелементів, якими забезпечуються задані залежності зміни температури охолодження з часом. Слід зауважити, що практично не існує експериментальних методів, які б дозволяли знаходити аналогічні функції керування струмом термоелементів.
2. Встановлення оптимальних для конкретних цілей часових залежностей струму має важливе практичне значення. Такі функції використовуються для конструювання та автокалібровки спеціальних електронних регуляторів, які необхідні для забезпечення роботи системи

автоматичного керування процесом нестационарного охолодження в термоелектричних пристроях різноманітного призначення.

## Література

1. Snyder G. J., Fleurial J.-P., Caillat T., Yang R. G., Chen G. I. Supercooling of Peltier cooler using a current pulse. *J. Applied Physics*. 2002. V. 92. P. 1564 – 1569.
2. Thonhauser T., Mahan G.D., Zikatanov L., Roe J. Improved supercooling in transient thermoelectrics. *Applied Physics Letters*. 2004. V. 85. N. 15. P. 3247 – 3249.
3. Yang R. G., Chen G.I., Kumar A.R., Snyder G.I., Fleurial J.-P. Transient cooling of thermoelectric coolers and its applications for microdevices. *Energy Conversion and Management*. 2005. V. 46. P. 1407 – 1421.
4. Shen L. M., Chen H.X., Xiao F., Yang Y.X., Wang S.W. The step-change cooling performance of miniature thermoelectric module for pulse laser. *Energy Conversion and Management*. 2014. V. 80. P. 39 – 45.
5. Shen L. M., Xiao F., Chen H.X., Yang Y.X., Wang S.W. Numerical and experimental analysis of transient supercooling effect of voltage pulse on thermoelectric element. *Int. J. of Refrigeration*. 2012. V. 35. P. 1156 – 1165.
6. Ma M.A., Yu J. Numerical study on the temperature overshoot characteristic of a realistic thermoelectric module under a current pulse operation *Int. J. of Heat and Mass Transfer*. 2014. V. 72. P. 234 – 241.
7. Mao J.N., Chen H.X., Jia H., Qian X.L. The transient behavior of Peltier junctions pulsed with supercooling. *J. of Applied Physics*. 2012. V. 112. N. 1. P. 014514-1 – 014514-9.
8. Cheng, C.-H., Huang C.-S., Cheng T.-C A three-dimensional theoretical model for predicting transient thermal behavior of thermoelectric coolers. *Int. J. of Heat and Mass Transfer*. 2010. V. 53. P. 2001 – 2011.
9. Snarskii A.A., Bezsudnow I.V. Rotating thermoelectric device in periodic steady state. *Energy Conversion and Management*. 2015. V. 94. P. 103 – 111.
10. Hao L. V., Wang X.-D., Wang X.-D., Meng J.-H. Optimal pulse current shape for transient supercooling of thermoelectric cooler. *Energy*. 2015. V. 83. P. 788 – 796.
11. Kotsur M. Optimal control of distributed parameter systems with application to transient thermoelectric cooling. *Advances in Electrical and Computer Engineering*. 2015. V. 15. P.117 – 122.
12. Коцур М.П. Математичне моделювання та оптимізація процесу нестационарного термоелектричного охолодження. *Технологічний аудит і резерви виробництва*. 2016. Т. 1. N2(27). С. 29 – 34.
13. Иорданишвили Е.К., Малкович Б.Е. О возможности управления температурой холодного спая термоэлемента. *Вопросы радиоэлектроники. Сер. ТРТО*. 1971. N2. С. 74 – 81.
14. Каганов М.А., Ривкин А.С. Воспроизведение заданного временного хода температуры с помощью полупроводниковых термоэлементов. *Инженерно-физический журнал*. 1973. Т.24. N5. С. 902 – 907.
15. Ривкин А.С. Оптимальное управление нестационарным процессом термоэлектрического охлаждения. *ЖТФ*. 1973. Т. 43. № 7. С. 1563 – 1570.
16. Термоэлектрические охладители / под ред. А. А. Вайнера. Москва. 1983. 176 с.
17. Гольцман Б.М., Кудинов В.А., Смирнов И.А. Полупроводниковые термоэлектрические материалы на основе  $Bi_2Te_3$ . Москва. 1972. 320 с.

Надійшла до редакції 31.10.2016