

К РАСЧЕТУ СВОБОДНОМОЛЕКУЛЯРНЫХ ПОЛЕЙ ТЕЧЕНИЙ

Рассматриваются особенности численного моделирования газодинамических параметров в окрестности тел различной геометрической формы, обтекаемых сверхзвуковым потоком сильно разреженного газа. В качестве тестовой задачи выбрано обтекание диска, расположенного перпендикулярно набегающему потоку. Получены точные аналитические выражения для расчета концентрации молекул на оси симметрии диска, включая донную область.

Features of numerical modeling of gas dynamical parameters are considered in a neighborhood of bodies of the various geometrical forms, which are flowed around by a supersonic stream of strongly rarefied gas. The flow around the disk located perpendicularly to running stream is chosen as a test problem. Exact analytical expressions for calculation of molecules concentration on a disk axis of symmetry including ground area are obtained.

При движении тел в верхних слоях атмосферы возникает ряд задач, для которых необходимо знать те или иные макроскопические параметры потока. Так для космических аппаратов различного назначения весьма актуальной, а порой и определяющей для надежного обеспечения работы научной и служебной аппаратуры, является проблема защиты от вредного воздействия продуктов собственной внешней атмосферы. При этом основным механизмом переноса загрязняющих веществ является бесстолкновительный (свободномолекулярный) перенос.

Надежное знание газодинамических параметров при больших числах Кнудсена ($Kn \rightarrow \infty$) является также залогом успеха при построении численных алгоритмов реализации метода Монте-Карло (метода пробных частиц) для произвольных чисел Kn [1 – 3].

В работе [4] предложен алгоритм расчета газодинамических параметров в окрестности произвольного выпуклого тела, обтекаемого равновесным свободномолекулярным потоком при отсутствии внешних сил.

Для расчета обтекания вогнутых тел и тел сложной геометрической формы в свободномолекулярном и близком к нему режимах обтекания в [5 – 8] предложена процедура метода прямого статистического моделирования, позволяющая учитывать эффекты переотражения частиц от элементов поверхности обтекаемого тела и первых столкновений частиц разных классов.

Целью данной работы является анализ различных подходов к численному определению основных моментов функции распределения в окрестности тел, обтекаемых свободномолекулярным потоком, и их сравнение с аналитическими решениями.

При обтекании выпуклых тел макропараметры течения в точке с радиус-вектором \vec{r} являются моментами функции распределения и могут быть представлены в виде:

$$\langle \mu(\vec{r}) n(\vec{r}) \rangle = \int_{4\pi - \Omega_w} d\Omega_w \int_0^\infty \mu(\vec{r}, \vec{V}) f_\infty V^2 dV + \int_{\Omega_w} d\Omega_w \int_0^\infty \mu(\vec{r}, \vec{V}) f_w V^2 dV, \quad (1)$$

где f_∞ – функция распределения молекул набегающего потока по скоростям:

$$f_\infty = \frac{n_\infty}{(2\pi RT_\infty)^{3/2}} \exp\left[-\frac{(\vec{V} - \vec{u}_\infty)^2}{2RT_\infty}\right]; \quad (2)$$

f_w – функция распределения по скоростям молекул, диффузно отраженных от обтекаемого тела:

$$f_w = \frac{n_w}{(2\pi RT_w)^{3/2}} \exp\left[-\frac{\bar{W}^2}{2RT_w}\right]. \quad (3)$$

Входящая в (3) концентрация отраженных молекул определяется из условия непроницаемости поверхности:

$$n_w \sqrt{\frac{RT_w}{2\pi}} = n_\infty \sqrt{\frac{RT_\infty}{2\pi}} \Psi(S). \quad (4)$$

Здесь и в дальнейшем используются общепринятые выражения (см., например, [9]).

Полагая в (1) $\mu=1$, $\mu = \bar{V}$, $\mu = (\bar{V} - \bar{u}_\infty)^2$, можно получить выражения для определения концентрации, скорости и температуры соответственно. После интегрирования по модулям скоростей \bar{V} и \bar{W} эти выражения принимают вид [4]:

$$\begin{aligned} n(\vec{r}) &= n_\infty \left(1 + \int_{\Omega_w} \chi_1 d\Omega_w \right); \\ \bar{V}(\vec{r}) &= \frac{n_\infty}{n(\vec{r})} \left(\bar{u}_\infty + \int_{\Omega_w} \bar{V}^0 \chi_2 d\Omega_w \right); \quad \bar{V}^0 = \frac{\bar{V}}{|\bar{V}|}; \\ T(\vec{r}) &= \frac{n_\infty}{n(\vec{r})} \left(T_\infty + \frac{u_\infty^2}{3R} + \int_{\Omega_w} \chi_3 d\Omega_w \right) - \frac{V^2(\vec{r})}{3R}. \end{aligned} \quad (5)$$

Аналогично могут быть получены выражения для других моментов функции распределения.

Выражения (5) дают возможность определения газодинамических параметров в любой точке A окрестности обтекаемого тела. Ввиду того, что подынтегральные функции χ_1, χ_2, χ_3 довольно сложны [4], получить аналитические выражения для определения макропараметров потока удастся только в простейших случаях. В общем случае интегралы (5) берутся численно.

Особенности интегрирования по телесному углу Ω_w . Предположим, что поверхность обтекаемого тела представима в виде совокупности элементарных площадок dS . Тогда телесный угол $d\Omega_w$ в (5) можно выразить через площадь dS элемента поверхности (на рис. 1,а в качестве примера взят диск, расположенный перпендикулярно набегающему потоку):

$$d\Omega_w = \frac{dS \cdot \cos(\vec{l}, \vec{n})}{l^2}, \quad (6)$$

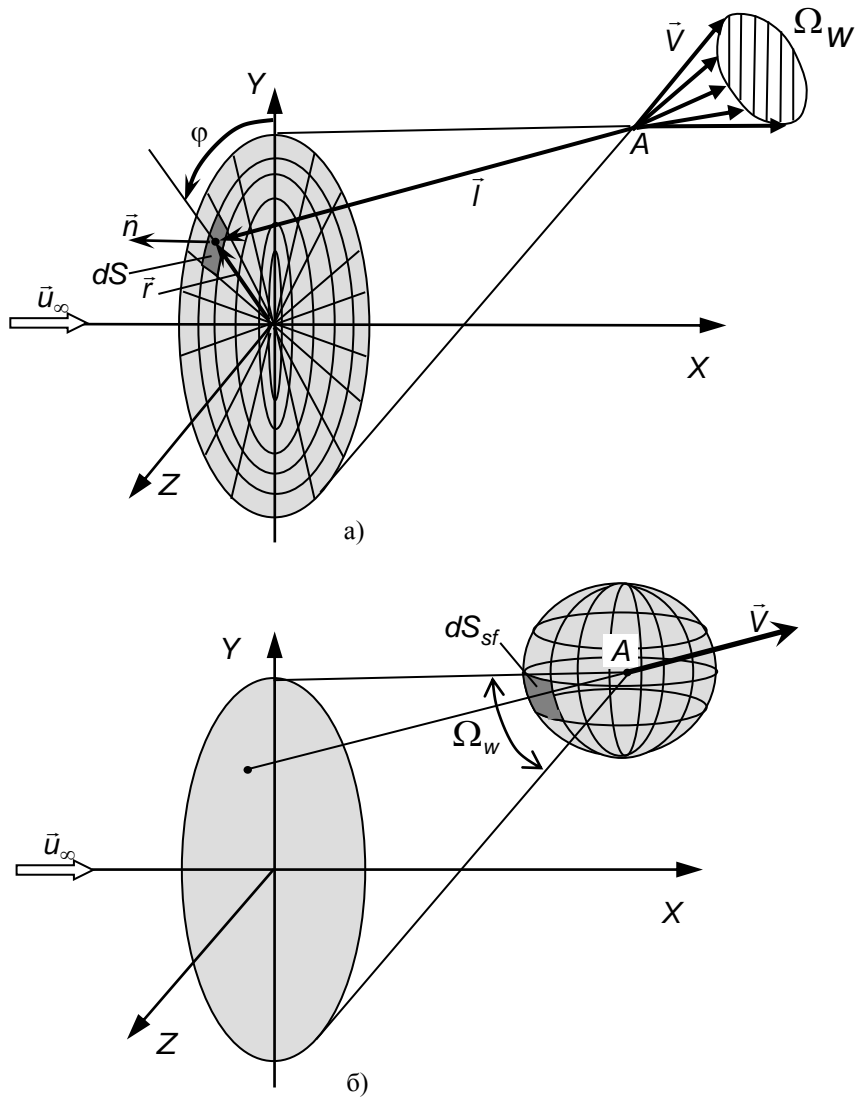


Рис.1

где \vec{l} – радиус-вектор центра площадки dS поверхности тела, построенный из расчетной точки A ; \vec{n} – внешняя нормаль к поверхности тела в центре площадки dS .

В [4] показано, что если таким образом перейти от интегрирования по телесному углу Ω_w к интегрированию по поверхности обтекаемого тела, то область интегрирования по телу определяется условием

$$\vec{l} \cdot \vec{n} > 0$$

и может быть легко определена численно в процессе счета.

Для малых расстояний l расчетной точки от dS телесный угол согласно (6) вырождается, так как $\lim_{l \rightarrow 0} d\Omega_w = \infty$. Поэтому на практике вместо (6) используют следующую составную формулу для телесного угла:

$$d\Omega_w = 2\pi \cdot \frac{\frac{dS_{\perp}}{\pi}}{l^2 + \frac{dS_{\perp}}{\pi} + l \cdot \sqrt{l^2 + \frac{dS_{\perp}}{\pi}}}, \quad (7)$$

где $dS_{\perp} = dS \cdot \cos(\vec{l}, \vec{n})$ – проекция элементарной площадки на направление радиус-вектора \vec{l} . Формула (7) применима для произвольно расположенной точки A расчетного поля и, как будет показано ниже, точность результатов численного интегрирования в (5) зависит только от шага интегрирования по поверхности обтекаемого тела.

Такой подход удобен для расчета газодинамических параметров в окрестности тел сложной геометрической формы, так как при интегрировании по поверхности тела эффекты затенения расчетных точек в поле потока учитываются элементарно.

Считается, что площадка dS вносит свой вклад при определении газодинамических параметров в точке A согласно формулам (5), если луч \vec{l} не пересекает ни одного из элементов поверхности обтекаемого тела.

Впервые аналогичный подход был предложен в [10] для расчета аэродинамических характеристик в свободномолекулярном потоке. В дальнейшем он был адаптирован к расчету газодинамических параметров в поле нерасчетных струй при наличии преград различной формы [11].

Можно предложить другой подход к интегрированию по Ω_w , вводя понятие единичной сферы, расположенной в расчетной точке A физического пространства (рис. 1,б). По определению телесного угла $d\Omega_w = dS_{sf}$, где dS_{sf} – площадь элемента поверхности единичной сферы. Область интегрирования по сфере определяется условием пересечения луча, направленного из расчетной точки A в центр площадки dS_{sf} , с поверхностью обтекаемого тела.

Аналитические выражения для расчета концентрации молекул на оси диска, расположенного перпендикулярно вектору скорости набегающего потока. Выберем в качестве модельной задачи обтекание диска, расположенного нормально набегающему потоку. Сверхзвуковое обтекание плоской пластины (как тела простейшей канонической формы) представляет неизменный интерес в различных исследованиях по динамике разреженных газов, о чем говорят и последние публикации (см. [12–14]). Интерес представляют исследования газодинамических параметров как в возмущенной зоне перед пластиной, так и донной области при различных числах Кнудсена. Кроме того, существует некий пробел для тестирования расчетных алгоритмов в условиях свободномолекулярного обтекания, а в отдельных публикациях по этому вопросу порой содержатся откровенные ошибки (к примеру [9]).

Концентрация падающих молекул в произвольной точке A , расположенной на оси симметрии диска при его свободномолекулярном обтекании, определяется выражением:

$$n_A^{\infty} = \int \int \int_{-\infty}^{\infty} f_{\infty} d\vec{V}, \quad (8)$$

где f_∞ определена формулой (2); $d\vec{V}$ – элементарный объем в пространстве скоростей. Интегрирование ведется по всем возможным значениям и направлениям скорости \vec{V} .

По аналогии с (1) функцию распределения падающих молекул в расчетной точке A можно рассматривать как двухпоточную:

$$f_A^\infty = \begin{cases} f_\infty, & \vec{V} \notin \Omega_w; \\ 0, & \vec{V} \in \Omega_w. \end{cases}$$

Учитывая, что в точку A попадают молекулы набегающего потока, векторы скорости которых лежат внутри телесного угла $4\pi - \Omega_w$ (смотри рис. 2), выражение (8) можно переписать в виде [9]:

$$n_A^\infty = \int_{\vec{V} \in 4\pi} f_\infty d\vec{V} - \int_{\vec{V} \in \Omega_w} f_\infty d\vec{V} = n_\infty - \int_{\vec{V} \in \Omega_w} f_\infty d\vec{V}.$$

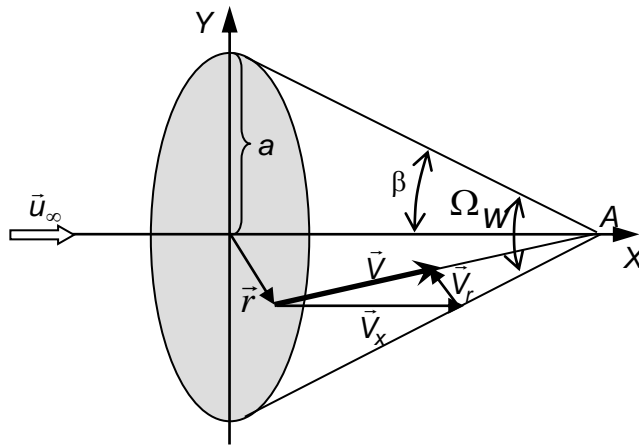


Рис. 2

В сферической системе координат пространства скоростей $d\vec{V} = 2\pi V_r dV_r dV_x$, а

$$n_A^\infty = n_\infty - \frac{n_\infty}{(2\pi RT_\infty)^{3/2}} 2\pi \int_{\vec{V} \in \Omega_w} \exp\left[-\frac{(V_x - u_\infty)^2 + V_r^2}{2RT_\infty}\right] \cdot V_r dV_r dV_x.$$

Когда расчетная точка A находится перед диском радиуса a ($x < 0$), проекция скорости на ось OX и ее радиальной компоненты изменяются в пределах: $-\infty < V_x \leq 0$, $0 < V_r < \frac{aV_x}{x}$. Аналогично в точках за диском (при $x > 0$): $0 \leq V_x < \infty$; $-\frac{aV_x}{x} < V_r < 0$.

С учетом вышесказанного для $x > 0$ (за диском)

$$n_A^\infty = n_\infty - \frac{n_\infty}{(2\pi RT_\infty)^{3/2}} \cdot 2\pi \times \int_0^\infty \exp\left[-\frac{(V_x - u_\infty)^2}{2RT_\infty}\right] \int_{-\frac{aV_x}{x}}^0 \exp\left[-\frac{V_r^2}{2RT_\infty}\right] V_r dV_r \cdot dV_x. \quad (9)$$

Введя замену переменных: $\frac{V_r}{\sqrt{2RT_\infty}} = C_r$; $\frac{V_x}{\sqrt{2RT_\infty}} = C_x$ и обозначив

$$\bar{u}_\infty = \frac{u_\infty}{\sqrt{2RT_\infty}} \quad \bar{x} = \frac{x}{a}; \text{ выражение (9) переписывается в виде:}$$

$$n_A^\infty = n_\infty - \frac{2}{\sqrt{\pi}} n_\infty \int_0^\infty e^{-(C_x - \bar{u}_\infty)^2} \int_{-\frac{C_x}{\bar{x}}}^0 e^{-C_r^2} dC_r dC_x. \quad (10)$$

Интегрируя по C_r ,

$$n_A^\infty = n_\infty + \frac{1}{\sqrt{\pi}} n_\infty \int_0^\infty e^{-(C_x - \bar{u}_\infty)^2} \left[1 - e^{-\left(\frac{C_x}{\bar{x}}\right)^2}\right] dC_x. \quad (11)$$

Рассмотрим неопределенный интеграл:

$$\begin{aligned} \int e^{-(C_x - \bar{u}_\infty)^2} \left[1 - e^{-\left(\frac{C_x}{\bar{x}}\right)^2}\right] dC_x &= -\frac{1}{2} \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(-C_x + \bar{u}_\infty) + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi} e^{-\bar{u}_\infty^2 \left(1 + \frac{1}{1 + 1/\bar{x}^2}\right)}}{\sqrt{1 + 1/\bar{x}^2}} \operatorname{erf}\left(-\sqrt{1 + 1/\bar{x}^2} C_x + \frac{\bar{u}_\infty}{\sqrt{1 + 1/\bar{x}^2}}\right). \end{aligned} \quad (12)$$

Подставляя в (11) пределы интегрирования по переменной C_x , с учетом (12) получим выражение для концентрации частиц набегающего потока, находящегося на оси симметрии диска в его донной области:

$$n_A^\infty = n_\infty \left[1 + \frac{1}{2} \left\{ -[\operatorname{erf}(\bar{u}_\infty) + 1] + \cos\beta \cdot e^{(-\bar{u}_\infty \sin\beta)^2} [\operatorname{erf}(\bar{u}_\infty \cos\beta + 1)] \right\}\right].$$

После соответствующих преобразований

$$n_A^\infty = \frac{n_\infty}{2} \left[1 - \operatorname{erf}(\bar{u}_\infty) + \cos\beta \cdot e^{(-\bar{u}_\infty \sin\beta)^2} [\operatorname{erf}(\bar{u}_\infty \cos\beta + 1)]\right], \quad (13)$$

$$\text{где } \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1 + 1/\bar{x}^2}}.$$

Для отраженных молекул концентрация в расчетной точке A определяется следующим образом:

$$n_A^w = \int \int \int_0^\infty f_w d\vec{W}. \quad (14)$$

Функция распределения f_w определяется по формуле (3) с учетом (4). Здесь $\psi(S) = \exp(-S_\infty^2) - \sqrt{\pi}(1 - \text{erf}S_\infty)S_\infty$, а температура отраженных T_w молекул полагается равной температуре поверхности тела.

Так как в точку A попадают только те из отраженных молекул, вектора скоростей которых лежат внутри телесного угла Ω_w (рис. 2), функцию распределения отраженных молекул (3) можно представить в виде:

$$f_A^w = \begin{cases} 0, & \vec{W} \notin \Omega_w; \\ f_w, & \vec{W} \in \Omega_w. \end{cases}$$

Тогда в сферической системе координат пространства скоростей выражение (14) с учетом (6) имеет вид:

$$n_A^w = \frac{n_\infty}{(2\pi RT_w)^{3/2}} \sqrt{\frac{T_\infty}{T_w}} \psi(S) \iint_{\vec{W} \in \Omega_w} \exp\left[-\frac{(W_x^2 + W_r^2)}{2RT_w}\right] \cdot W_r dW_r dW_x.$$

Рассмотрим случай $x > 0$. Подставляя верхние и нижние пределы изменения компонент массовой скорости W_x и W_r , получим

$$n_A^w = \frac{n_\infty}{(2\pi RT_w)^{3/2}} \sqrt{\frac{T_\infty}{T_w}} \psi(S) \int_0^\infty \exp\left[-\frac{W_x^2}{2RT_w}\right] \int_{-\frac{aW_x}{x}}^0 \exp\left[-\frac{W_r^2}{2RT_w}\right] W_r dW_r dW_x.$$

После замены переменных (как и в случае расчета параметров набегающего потока) предыдущее выражение представимо в виде:

$$n_A^w = \frac{2}{\sqrt{\pi}} n_\infty \sqrt{\frac{T_\infty}{T_w}} \psi(S) \int_0^\infty e^{-C_x^2} \int_{-\frac{C_x}{x}}^0 C_r e^{-C_r^2} dC_r \cdot dC_x. \quad (15)$$

Выполнив интегрирование аналогично интегрированию в (10), получим

$$n_A^w = \frac{n_\infty}{2} \sqrt{\frac{T_\infty}{T_w}} \psi(S) \cdot (1 - \cos\beta).$$

Рассмотрим случай $x < 0$. Не нарушая общности и проводя те же рассуждения, можно получить аналогичные выражения и для концентрации молекул на оси симметрии диска в наветренной области. Приведем лишь конечные выражения:

$$n_A^\infty = \frac{n_\infty}{2} \left[1 + \text{erf}(\bar{u}_\infty) + \cos\beta \cdot e^{(-\bar{u}_\infty \sin\beta)^2} [1 - \text{erf}(\bar{u}_\infty \cos\beta)] \right]; \quad (16)$$

$$n_A^w = \frac{n_\infty}{2} \sqrt{\frac{T_\infty}{T_w}} \psi(S) \cdot (1 - \cos\beta). \quad (17)$$

Концентрация результирующего потока определяется как суперпозиция концентраций падающего и отраженного потоков:

$$n_A = n_A^\infty + n_A^w.$$

Формулы (13) и (16) для n_A^∞ отличаются от формул (2.267) и (2.268), приведенных в [9], на множитель $e^{(-\bar{u}_\infty \sin \beta)^2}$, что является существенным для определения концентрации частиц в точках, находящихся в непосредственной близости к поверхности диска.

Результаты тестовых расчетов. Приведенные аналитические выражения для расчета результирующей концентрации на оси симметрии диска при его свободномолекулярном обтекании были использованы для тестирования различных подходов к численному интегрированию по телесному углу. Как показали результаты численного интегрирования по поверхности диска с использованием выражения (7) и расчеты по приведенным выше формулам, полученные данные достаточно хорошо согласуются между собой за исключением ближних областей.

Перед диском (непосредственно вблизи его поверхности) и в теневой зоне (на расстояниях, соизмеримых с его радиусом) результаты расчета существенно зависят от размеров элементарных площадок $dS = r \cdot dr \cdot d\varphi$, на которые разбит диск. Расхождения со значениями, полученными по формулам, растут с увеличением dS и достигают максимума при больших числах Маха, что продемонстрировано на рис. 3 для значений концентрации на оси диска в передней (рис. 3,а) и донной области (рис. 3,б) при $M_\infty = 20$. Во всех приведенных ниже расчетах полагалось $T_w = T_\infty = 1000 \text{ K}$. На рис. 3 сплошная кривая соответствует расчетам по формулам (13, 15 – 17), ромбиками обозначены результаты расчетов при $N_r = 5$; $N_\varphi = 4$, треугольниками – при $N_r = 20$; $N_\varphi = 4$, а кружками – при $N_r = 40$; $N_\varphi = 4$. Здесь N_r и N_φ – число разбиений диска по радиальной и угловой координатам r и φ соответственно. Для достижения лучшего согласия результатов на оси диска в его донной области необходимо еще более мелкое разбиение по радиусу (на рис. 3,б крестиками обозначены результаты расчетов при $N_r = 100$ и $N_\varphi = 4$).

Влияние числа разбиений по угловой координате φ существенно при

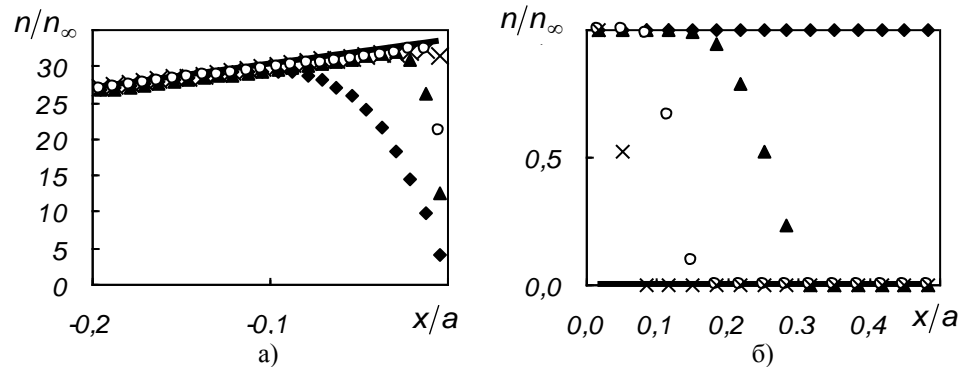


Рис. 3

удалении от оси диска вблизи его поверхности, что хорошо видно на рис. 4 по поведению изолиний относительной концентрации n/n_∞ при числе Маха $M_\infty = 5$ для $N_r = 20$; $N_\varphi = 18$ (рис. 4,а) и $N_r = 20$; $N_\varphi = 60$ (рис. 4,б). Как видно из рисунков, недостаточно мелкий шаг по углу φ приводит к тому, что

изолинии не замыкаются на соответствующие значения концентрации на его поверхности.

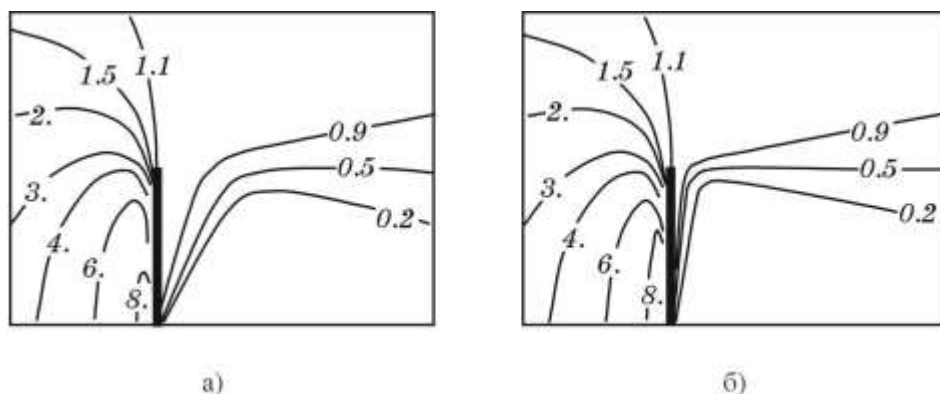


Рис. 4

Таким образом, недостатком интегрирования по обтекаемому телу является то, что для получения достоверных полей газодинамических параметров в непосредственной близости от его поверхности требуется достаточно мелкий шаг интегрирования по обеим переменным. При сложной геометрии обтекаемого тела это обстоятельство становится критичным по отношению к ресурсам ЭВМ.

При интегрировании по поверхности единичной сферы размеры элементарных площадок, на которые она разбита, влияют на точность определения Ω_w во всех расчетных точках поля, но в первую очередь – в точках значительно удаленных от обтекаемого тела. Вблизи тела это влияние менее существенно (в отличие от интегрирования по поверхности тела): $\Omega_w \sim 2\pi$ и значения концентрации n_A в точке A при приближении к диску для $M_\infty = 5$ физически выходят на значения концентрации n_w на его поверхности (рис. 5). На рис. 5,а $N_\theta = 18$; $N_\phi = 36$, а на рис. 5,б $N_\theta = 180$; $N_\phi = 360$. Здесь N_θ и N_ϕ – количество разбиений по полярному углу и по долготе сферической системы координат.

На рис. 4 и рис. 5 расчетные области приведены в калибрах радиуса диска.

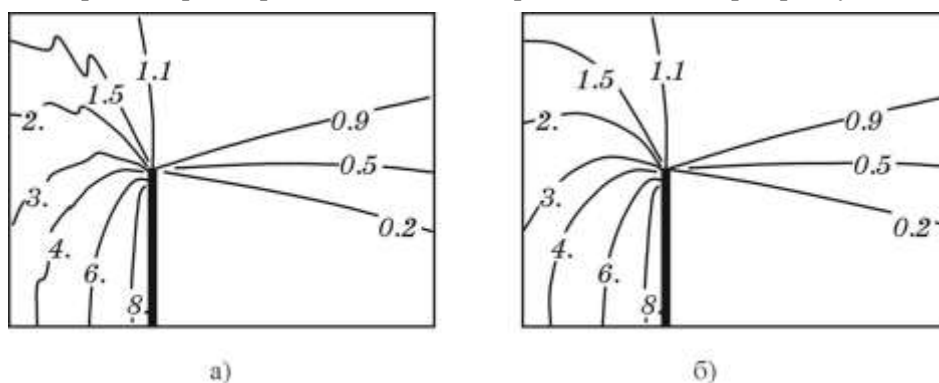


Рис. 5

Из сказанного выше следует, что выбор того или иного способа интегрирования по Ω_w зависит от особенностей решаемой задачи. Так для расчета в

ближнем следе за диском более предпочтительным является интегрирование по единичной сфере.

Приведенные выше результаты акцентируют внимание на особенности интегрирования по телесному углу Ω_w при фиксированном температурном факторе $T_w/T_\infty = 1$. Изменение температуры поверхности приводит лишь к количественным вариациям расчетных параметров.

Таким образом, для определения различных моментов функции распределения после интегрирования по модулю скорости существует два различных подхода к интегрированию по телесному углу Ω_w . Для тестирования расчетных алгоритмов получены аналитические выражения для концентрации частиц на оси симметрии поперечно обтекаемого диска потоком сильно разреженного газа, как в возмущенной области (перед диском), так и в донной области (за диском). Показано, что на малых расстояниях от обтекаемого тела переход к интегрированию по его поверхности приводит к существенным погрешностям в расчете телесного угла Ω_w . Поэтому на таких расстояниях удобнее перейти к интегрированию по поверхности единичной сферы, расположенной в соответствующей точке физического пространства. При этом для сложных тел взаимное затенение элементов конструкции учитывается также, как и в [7, 8].

1. Басс В.П., Печерица Л.Л. Численное моделирование стационарного осесимметричного обтекания затупленного конуса в переходном режиме обтекания // Вісник Дніпропетровського університету.– 2005.– № 10/1.– С.57 – 65.
2. Басс В.П., Печерица Л.Л. Об одном алгоритме реализации Метода Монте-Карло для решения задач динамики разреженного газа // Техническая механика. – 2006.– № 1. – С.67 – 79.
3. Басс В.П., Печерица Л.Л. Гиперзвуковое обтекание теплоизолированного цилиндра разреженным газом // Вісник Дніпропетровського університету.– 2006.– № 2/1.– С.50 – 60.
4. Басс В.П., Бразинский В.И. Расчет газодинамических параметров в окрестности тел, обтекаемых свободномолекулярным потоком // Изв. РАН. Механика жидкости и газа.– 1982.– № 4.– С.177 – 180.
5. Басс В.П. Об одном алгоритме для комплексного исследования аэродинамических характеристик космических аппаратов // Космические исследования на Украине.–1977. – № 11.–С.11 – 17.
6. Басс В.П., Бразинский В.И. Влияние параметров собственной атмосферы на функционирование летательных аппаратов // Наблюдения искусственных небесных тел. – М.: Астрономический совет АН СССР, 1984. – № 81. – С. 87 – 99.
7. Бразинский В.И. Расчет параметров собственной внешней атмосферы в окрестности летательных аппаратов сложной формы // Прикл. вопр. аэродинамики летательных аппаратов. – 1984. – С.50 – 54.
8. Басс В.П., Бразинский В.И. Численные алгоритмы для расчета процессов массопереноса в сильно разреженном газе // Журн. выч.матем. и матем. физики.– 1988.– Т.28, № 7. – С. 1078 – 1093.
9. Кошмаров Ю.А., Рыжов Ю.А. Прикладная динамика разреженного газа.– М.: Машиностроение, 1977.– 184 с.
10. Басс В.П., Ковтуненко В.М., Чепурной В.Н. К определению аэродинамических характеристик тел сложной геометрической формы в свободномолекулярном потоке с учетом затенения // Космические исследования. –1974.– Т. XII, Вып. 1.– С.40 – 44.
11. Печерица Л.Л. Исследование полей течений нерасчетных струй и их взаимодействие с поверхностями космических аппаратов // Техническая механика. – 1997.– Вып. 6. – С.91 – 94.
12. Титарев В.А., Шахов Е.М. Расчет донного вакуума за пластиной, обтекаемой гиперзвуковым потоком разреженного газа // Журн. вычислит. математики и мат. физики.– 2001.– Т.41, № 9.– С.1444 – 1456.
13. Мальцев Р.В., Ребров А.К. Поперечное обтекание полосы сверхзвуковым потоком разреженного газа // Изв. РАН. Механика жидкости и газа.– 2005. – № 1. – С.159 – 167.
14. Титарев В.А., Шахов Е.М. Численный расчет поперечного обтекания холодной пластины гиперзвуковым потоком разреженного газа // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. – 2005. – № 5. – С.139 – 154.

Институт технической механики
НАН Украины и НКА Украины,
Днепропетровск

Получено 10.05.07,
в окончательном варианте 11.03.08