УДК 622.7

ПОЖИДАЕВ В.Ф., ГРАЧЕВ О. В.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГРАНУЛОМЕТРИЧЕСКОГО СОСТАВА И АНАЛИЗ ЕГО УРАВНЕНИЙ

В работе предлагается вывод закона распределения по крупности, основанный на наилучшем согласовании с экспериментальными данными теоретически найденных зависимостей.

У роботі пропонується вивід закону розподілу за великістю, заснований на найкращому узгодженні з експериментальними даними теоретично знайдених залежностей.

This work provides the derivation of the size distribution law, based on the best agreement of the experimental data with the theoretical dependences.

Значительные трудности, а в ряде случаев невозможность определения опытным путем распределения зерен угля и руды, особенно в мелких классах, явились причиной многочисленных исследований. Поискам аналитических выражений способствовала замеченная в случайном процессе измельчения устойчивость распределения зерен статистической совокупности по классам крупности.

Стремление к расширению диапазона применимости уравнения может привести к противоречивым суждениям о степени его пригодности. Нередко причиной этого является применение уравнения к интервалу крупности, не исследованному и не рекомендованному автором.

Многие исследователи неоднократно обращались к фундаментальному результату А. Н. Колмогорова о предельном распределении [1]. Как известно, предельным законом при дроблении независимо от способа измельчения является логарифмически-нормальное распределение. Истинный закон распределения асимптотически приближается к предельному распределению. Было показано [2, 3], что реальная смесь частиц описывается законом распределения, физически обуславливающим свойства, которым обладает только логарифмически нормальный закон.

В то же время логично для конкретных интервалов крупности предложить семейство функций, которые наилучшим образом решают задачу сплайн-интерполяции. Это снимает проблему поиска общего закона, который необходим для решения задач, касающихся всей смеси, или в случае, когда искусственно созданная результирующая смесь не подчиняется закону распределения Вейбулла.

Исчисление средних характеристик смеси зерен всегда наталкивается на одно принципиальное затруднение: неопределенность значения самого термина. Так, для вычисления среднего диаметра смеси зерен в диапазоне крупности (a, b) существует очень большое число формул.

Задача исчисления среднего диаметра становится определенной и вполне разрешимой, если исходить из следующего определения средней величины: Средней аргумента x по рассматриваемому определяющему свойству коллектива S мы назовем то одинаковое для всех членов коллектива значение аргумента $\bar{x}$, которое им можно придать, не изменяя определяющего свойства коллектива. То есть, средняя есть величина $\bar{x}$, характеризующая объективно уравненный коллектив $\bar{x}, \bar{x}, \ldots, \bar{x}$, но при этом имеющий то же, что и он, количественное выражение определяющего свойства.

Таким образом, каждое свойство коллектива зерен отражается своей особой средней. В зависимости от того, какое свойство мы стремимся отобразить в средней, нам приходится вычислять ее то одним, то другим способом. Из этого вытекает, что средний диаметр должен быть заранее рассчитан на отображение какого-либо свойства, которое мы и будем называть “определяющим”.

Для того чтобы определяющее свойство было отображено в среднем диаметре, нужно уметь выразить это свойство в виде функции $f(x)$, зависящей от диаметра частиц данного класса (a,b). Тогда если $\overline{x}$ означает средний размер частиц этого класса, то $\int\limits_a^b f(x)dP(x) = f(z)$. Решая полученное таким образом уравнение относительно z, получим надлежащую для данного конкретного случая формулу вычисления среднего диаметра.

Вопрос о том, какой характер имеет распределение частиц по размерам внутри узкого класса крупности, неотделим от вопроса об эквивалентном диаметре частиц этого класса. Обычно считается, что средний диаметр частиц узкого класса крупности суть среднее арифметическое его граничных диаметров. Это означает не что иное, как допущение того, что внутри этого класса справедливо равномерное распределение частиц по размерам. Не всегда такие предположения могут быть удовлетворительными. Можно достаточно точно решить задачу об отыскании эквивалентных диаметров и плотности распределения частиц узкого класса крупности. Будем считать известными величины a,b,γ, где a и b – граничные диаметры класса крупности (a,b) и γ – выход этого класса.

Пусть $F\left(x\right)$ – кумулятивная характеристика по минусу. Будем ее также называть функцией распределения в весовых долях (сокращенно ф.р. в.д.), которая описывает распределение во всем диапазоне крупности $(0,D)$, где D – крупность максимального куска. Обозначим далее через $\varphi(x)$ и $\Phi(x)$ соответственно истинную плотность и истинную функцию распределения случайной величины x. Между функциями $F(x)$ и $\Phi(x)$ существует взаимно однозначная связь. Если известна $F(x)$, то известной является и $\Phi(x)$ во всем диапазоне крупности $(0,D)$. Нашей задачей является отыскание достаточно простых и точных представлений функций φ и Φ, справедливых только внутри интервала (a,b).

Средний диаметр частиц $z(x)$ в интервале $(a,x)\subseteq(a,b)$ можно определить как математическое ожидание случайной величины x при условии попадания ее в интервал (a,x) $z(x)\int\limits_a^x \varphi(x)dx = \int\limits_a^x x\varphi(x)dx$. Это же уравнение дает нам возможность отыскать плотность распределения $\varphi(x)$, если известна эквивалентная крупность $z(x)$.

Если в качестве определяющих признаков остановиться на наиболее характерных – совокупном объеме и совокупной поверхности частиц, то имеем для этого случая

$$\int_a^x f(x)dx = z(x)\int_a^x \frac{f(x)dx}{x}.$$

Наиболее точное значение z можно получить, если известна $F(x)$. Представляется целесообразным получить хотя и более приближенную, однако удобную для практических применений формулу для вычисления величины z. Разобьем интервал (a,b) на два равновесных подынтервала. По-прежнему считая, что определяющими признаками являются совокупный объем и совокупная поверхность частиц, получим $1/z = \frac{1}{2}\left(1/a + 1/b\right)$. Разбивая на три интервала, найдем аналогично $\frac{1}{Z} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a} + \frac{2}{a+b} + \frac{1}{b}\right)$.

Дробя диапазон (a,b) на k интервалов, т.е. полагая, что в этом диапазоне существует k -компонентная смесь, получим обобщенную формулу для среднего $\frac{1}{Z} = \frac{1}{k}\left[\frac{1}{a} + \sum_{i=1}^{k-2}\frac{k}{(k-i)a+ib} + \frac{1}{b}\right]$.

Устремляя $k \to \infty$, т.е. переходя от дискретного распределения величины x к непрерывному, получим эквивалентный диаметр интервала (a,b) из предела

$$\frac{1}{z} = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\left[\frac{1}{a} + \sum_{i=1}^{k-2}\frac{k}{(k-i)a+ib} + \frac{1}{b}\right] = \frac{\ln\left(b/a\right)}{b-a}.$$

Таким образом, средний диаметр смеси частиц в интервале (a,b) получен в виде $z = \frac{b-a}{\ln b/a}$. Формула проста и удобна для расчетов, поэтому представляет интерес оценить ее точность. Результаты вычислений показывают, что она дает несколько завышенные значения средних диаметров по сравнению с их точными значениями. Однако, относительные погрешности от применения этой формулы более чем в два раза ниже по сравнению с z, рассчитанным по средним арифметическим.

Для восстановления функции распределения частиц по размерам, с учетом сохранения выхода γ класса (a,b), получим для функции $\varphi(x)$ $\varphi = \varphi_1(x) = \frac{\gamma}{\ln b/a}\frac{1}{x}$. Если же принимать средний размер частиц в интервале (a,b) равным $z = \left(a+b\right)/2$, то это эквивалентно условию равномерного распределения в этом интервале $\varphi = \varphi_0(x) = \gamma/\left(b-a\right)$.

Естественным обобщением для приближений функции $\varphi(x)$ на отрезке (a,b) является рассмотрение ее в виде $\varphi = \varphi_\theta(x) = C \cdot x^{-\theta}$. Из условия нормировки и сохранения выхода γ, получим $\varphi_\theta(x) = \frac{\gamma(\theta-1)a^{\theta-1}b^{\theta-1}}{b^{\theta-1} - a^{\theta-1}}x^{-\theta}$. Найдем

z из формулы $z_\theta = \frac{1}{\gamma}\int\limits_a^b x\varphi_\theta(x)dx$. Получим $z_\theta = \frac{(\theta-1)ab\left(b^{\theta-2}-a^{\theta-2}\right)}{(\theta-2)\left(b^{\theta-1}-a^{\theta-1}\right)}$ или, что то же самое, $z_\theta = \frac{\theta-1}{\theta-2}a\frac{t^{\theta-2}-1}{t^{\theta-1}-1}$.

Последние три формулы верны при $\theta \neq 1$ и $\theta \neq 2$. Для $\theta = 2$ $\varphi_2(x) = \frac{ab}{b-a}x^{-2}$, а $z(x)$, соответственно $z_2(x) = \frac{ax}{x-a}\ln\frac{x}{a}$.

Рассмотрим поведение функции $\varphi(x)$ на отрезке (a,b). На концах этого отрезка она принимает значения $\varphi(a) = \frac{\upsilon\alpha^{1-1/\upsilon}}{\Gamma\left(1-1/\upsilon\right)}a^{\upsilon-2}e^{-\alpha a^\upsilon}$, $\varphi(b) = \frac{\upsilon\alpha^{1-1/\upsilon}}{\Gamma\left(1-1/\upsilon\right)}b^{\upsilon-2}e^{-\alpha b^\upsilon}$. Функция $\varphi_\theta(x)$ принимает значения $C_a^{-\theta}$ и $C_b^{-\theta}$. Если потребовать одинакового прироста этих функций на отрезке (a,b), то, приравнивая отношение функций на концах интервала (a,b), получим $(b/a)^{2-\upsilon}\exp\left\{\alpha b^\upsilon - \alpha a^\upsilon\right\} = (b/a)^\theta$. Логарифмируя это равенство, найдем

$$\theta = 2 - \upsilon + \alpha\frac{b^\upsilon - a^\upsilon}{\ln b/a}.$$

Анализ численных алгоритмов, применимых к интервальной интерполяции распределения сыпучей смеси по крупности, приводит к аналитическому представлению семейством гипербол с переменной степенью θ, зависящей от границ интервала. Полученное выражение решает задачу о наилучшем приближении на отрезке плотности распределения $\varphi(x)$ степенными функциями. Степень θ находится в зависимости от границ интервала (a,b) и параметров α и ν. Полученные результаты проверялись на экспериментальных рассевах углей Донецкого бассейна.

1. *Колмогоров А. Н.* О логарифмическом нормальном законе распределения размеров частиц при дроблении / *А. Н. Колмогоров* // ДАН СССР. Новая Серия. – 1941. – Т. 31 – № 2. – С. 99 – 101.
2. *Пожидаев В.Ф.* Статистическое описание распределений смеси зерен / *В. Ф. Пожидаев* // Изв. вузов. Горн. журн. – 1974. – № 8. – С. 150 – 153.
3. *Пожидаев В.Ф.* Особенности поведения кривой гранулометрического состава в области мелких классов / *В. Ф. Пожидаев* // Збагачення корисних копалин : Науково-технічний збірник. – 1999. – № 3 (44). – С. 45 – 52.

Восточноукраинский национальный
университет им. В.Даля,
Луганск

Получено 26.02.09,
в окончательном варианте 11.03.09