

## ПОСТРОЕНИЕ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ УРАВНЕНИЙ ТЕРМОУПРУГОГО ПОВЕДЕНИЯ СЛОЖНО АРМИРОВАННЫХ ПЕНОПЛАСТМАСС

Предложена модель термомеханического поведения пространственно армированной пенопластмассы без привлечения критериев энергетической эквивалентности. Показано, что на основе полученных уравнений можно определить напряженно-деформированные состояния во всех фазах композиции, используя известные осредненные деформации и температуру в композите, что имеет принципиальное значение при расчетах армированной пенопластмассы с использованием структурных теорий прочности. Проведен сравнительный анализ расчетных характеристик с экспериментальными данными и с результатами расчетов по другим методикам.

Запропоновано модель термомеханічного поведіння просторово армованої пінопластмаси без залучення критеріїв енергетичної еквівалентності. Показано, що на основі отриманих рівнянь можна визначити напружено-деформовані стани у всіх фазах композиції, використовуючи відомі осереднені деформації й температуру в композиті, що має принципове значення при розрахунках армованої пінопластмаси з використанням структурних теорій міцності. Проведено порівняльний аналіз розрахункових характеристик з експериментальними даними й з результатами розрахунків по інших методиках.

The model of a thermomechanical behaviour of 3-D reinforced expanded plastics without criteria of the power equivalence is proposed. It is shown that on a basis of the derived equations it is possible to determine the stressed-strained conditions in all composition phases using known mean composite deformations and temperatures. This is important for calculations of reinforced expanded plastics using structural theories of strength. The comparative analysis of estimated characteristics with the experimental data and with other calculated results is conducted.

В самолетостроении и в некоторых других областях техники в последние десятилетия широко применяются слоистые конструкции с наполнителем. В качестве наполнителей используются пенопластические массы – неармированные и армированные пластинками или проволокой, а также разного рода ребристые конструкции (сотовые, складчатые, типа гофра и др.).

Возможности пенопластмасс как легких наполнителей значительно расширяются, если использовать их в виде армированных слоистых структур, представляющих собой пенопласты с прослойками конструкционных материалов (металл, фанера и др.), чаще всего в виде полос [1]. В этом случае при приложении нагрузки вдоль усиливающего материала прочность и жесткость армированного пенопласта значительно выше, чем неармированного с такой же плотностью.

Использование современных пенопластмасс (например вспенивающихся) позволяет создавать такие типы наполнителей, в которых полости в ребристых конструкциях (сотовых, складчатых и др.) заполнены пенопластической массой. Подобные наполнители, благодаря наличию в них пенопластмассы, обладают хорошими вибрационными характеристиками, так как пенопластическая масса работает как демпфер и обеспечивает высокий градиент затухания колебаний. Кроме того, пенопластмасса, заполняющая полости ребристой конструкции, обеспечивает лучшую совместную работу элементов этой конструкции, поддерживает их и препятствует их потере устойчивости при сжатии и сдвиге, что во многом определяет жесткостные и прочностные характеристики наполнителей типа сотовых, складчатых и т.п. [2]. Подобные конструкции наполнителей можно рассматривать как пенопластмассы со сложными (пространственными) структурами армирования.

Целью настоящей работы является построение модели механического поведения пенопластмассы со сложным пространственным армированием,

позволяющей определять эффективные термоупругие характеристики эквивалентного композитного материала.

Пусть имеется упругий слой единичной толщины  $h$ , армированный регулярно в плоскости  $(x_1, x_2)$  объемной решеткой (элементы объемной решетки – ребристой конструкции – представляют собой цилиндрические оболочечные элементы, образующие которых параллельны координате  $x_3$  прямоугольной декартовой системы координат  $x_1, x_2, x_3$ ; координата  $x_3$  направлена по толщине слоя). Выделим из такого композитного материала простейший представительный элемент (ячейку) объемом  $V = a \times b \times h$  (рис. 1) так, чтобы любой другой элемент композита можно было получить параллельным переносом по направлению  $x_1$  на расстояние  $an$ , а по направлению  $x_2$  – на расстояние  $bm$  ( $n, m = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$ ).

На рис. 1 изображена ячейка с достаточно общим типом армирования. Из такой структуры заданием геометрии армирующих элементов можно получить ребристые конструкции всех видов, используемых на сегодняшний день на практике [3] (сотовые, складчатые, типа гофра и др.). Согласно рис. 1, рассматриваемая ячейка усилена четырьмя армирующими элементами, два из которых криволинейные (1 и 2) и два – плоские (3 и 4). (Возможно использование ячеек с более сложным армированием, в рамках настоящего исследования это не принципиально.) С каждым  $k$ -м ( $1 \leq k \leq K = 4$ ) армирующим элементом свяжем свою локальную прямоугольную систему координат  $x^{(k)}, y^{(k)}, z^{(k)} \equiv x_3$  (как показано на рис. 1), которая получается поворотом глобальной системы координат  $x_1, x_2, x_3$  на угол  $\varphi_k(l)$  вокруг вертикальной оси  $x_3$ , причем  $\varphi_3 \equiv \varphi_4 \equiv \pi/2$ , а  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  являются функциями естественной координаты  $l$ , откладываемой вдоль направляющих линий криволинейных элементов 1 и 2 (оси  $x^{(k)}$  являются касательными к направляющим линиям, а оси  $y^{(k)}$  перпендикулярны этим линиям).

Для соблюдения общности все фазы композиции предполагаются ортотропными материалами, причем главные оси анизотропии пенопластмассы совпадают с направлениями  $x_1, x_2, x_3$  глобальной системы координат, а главные направления анизотропии  $k$ -го армирующего элемента – с направлениями  $x^{(k)}, y^{(k)}, z^{(k)}$  локальной системы координат.

Так как при затвердевании вспенивающихся пенопластмасс объем их многократно увеличивается, то при заполнении ими полостей ребристых конструкций в армирующих элементах, в самой затвердевшей пенопластической массе и, как следствие, в композиции в целом могут возникнуть начальные напряжения. (Определение начальных напряженных состояний в пенопласт-

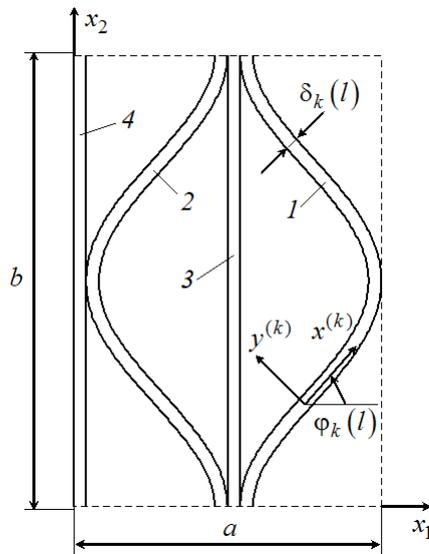


Рис. 1

массе и элементах ребристой конструкции представляет собой самостоятельную задачу, выходящую за рамки настоящего исследования. Далее в данной работе предполагаем, что эти напряжения известны.) Согласно вышеизложенному, определяющие уравнения для эквивалентной композитной среды и фаз композиции в матричной форме имеют вид [4, 5]

$$\begin{aligned}\bar{\sigma} &= \bar{p} + A(\bar{\varepsilon} - \bar{\alpha}T), \\ \bar{\sigma}_k &= \bar{p}_k + A_k(\bar{\varepsilon}_k - \bar{\alpha}_k T_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, K,\end{aligned}\quad (1)$$

где  $T, T_k$  – отклонение температуры композита и  $k$ -й фазы композиции соответственно от температуры  $\theta$  естественного состояния;  $A, \bar{\sigma}, \bar{p}, \bar{\varepsilon}, \bar{\alpha}$  – матрица жесткости и векторы-столбцы напряжений, начальных напряжений, деформаций и коэффициентов линейного теплового расширения рассматриваемого композита, имеющие компоненты

$$\bar{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{Bmatrix}, \quad \bar{p} = \begin{Bmatrix} p_{11} \\ p_{22} \\ p_{33} \\ p_{12} \\ p_{23} \\ p_{31} \end{Bmatrix}, \quad \bar{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \end{Bmatrix}, \quad \bar{\alpha} = \begin{Bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{33} \\ \alpha_{12} \\ \alpha_{23} \\ \alpha_{31} \end{Bmatrix}, \quad A = \begin{Bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{26} \\ A_{31} & A_{32} & \dots & A_{36} \\ A_{41} & A_{42} & \dots & A_{46} \\ A_{51} & A_{52} & \dots & A_{56} \\ A_{61} & A_{62} & \dots & A_{66} \end{Bmatrix}, \quad (2)$$

$$A_{ij} = A_{ji} \quad (i, j = \overline{1, 6});$$

$A_k, \bar{\sigma}_k, \bar{p}_k, \bar{\varepsilon}_k, \bar{\alpha}_k$  – то же для  $k$ -й фазы композиции (индексом «0» помечаются характеристики пенопласта, а индексом « $k$ » ( $1 \leq k \leq K$ ) – характеристики  $k$ -го армирующего элемента);  $K$  – количество армирующих элементов в ячейке. Матрицы  $A_k$  и векторы-столбцы  $\bar{\sigma}_k, \bar{p}_k, \bar{\varepsilon}_k, \bar{\alpha}_k$  имеют структуру, аналогичную (2), но записываются в разных системах координат: для пенопласта ( $k = 0$ ) – в глобальной системе координат  $x_1, x_2, x_3$ , для  $k$ -го армирующего элемента ( $1 \leq k \leq K$ ) – в локальной системе  $x^{(k)}, y^{(k)}, z^{(k)} \equiv x_3$ .

Так как установить фактическое распределение напряжений и деформаций в композите, где основной материал (пенопластмасса) имеет многочисленные более жесткие включения сложной формы, весьма затруднительно [5], то при нахождении практически пригодных зависимостей для определения всех независимых термоупругих постоянных рассматриваемого композита необходимо сделать некоторые допущения в виде исходных предпосылок.

1. Количество представительных элементов как в направлении  $x_1$ , так и в направлении  $x_2$  достаточно велико, что позволяет рассматривать эквивалентный композит как квазиоднородный материал, одна из главных осей анизотропии которого совпадает с направлением  $x_3$ .
2. Между пенопластмассой и каждым армирующим элементом существует полное сцепление.

3. В пределах представительного элемента деформации, напряжения и температуры во всех фазах и в композиции кусочно-постоянны. Эффектами высших порядков, связанными с изменением полей деформаций, напряжений и температур в малых окрестностях границ контакта пенопластмассы и армирующих элементов, пренебрегаем.
4. Осредненные поля напряжений, деформаций и температуры в композиции определяются по правилу простой смеси – пропорционально объемному содержанию каждого составляющего.
5. Все фазовые материалы линейно упруги, ортотропны и однородны; связь между деформациями, напряжениями и температурой в них задается определяющими уравнениями (1).

В силу второго и третьего допущений и условий сопряжения полей напряжений, перемещений и температур на лицевых поверхностях контакта  $k$ -го армирующего элемента с пенопластмассой получим (см. рис. 1)

$$T_0 = T_k \quad (1 \leq k \leq K); \quad (3)$$

$$p_{yy}^{(k)} = p_{0yy}^{(k)}, \quad p_{xy}^{(k)} = p_{0xy}^{(k)}, \quad p_{yz}^{(k)} = p_{0yz}^{(k)} \quad (1 \leq k \leq K); \quad (4)$$

$$\sigma_{yy}^{(k)} = \sigma_{0yy}^{(k)}, \quad \sigma_{xy}^{(k)} = \sigma_{0xy}^{(k)}, \quad \sigma_{yz}^{(k)} = \sigma_{0yz}^{(k)} \quad (1 \leq k \leq K); \quad (5)$$

$$\varepsilon_{xx}^{(k)} = \varepsilon_{0xx}^{(k)}, \quad \varepsilon_{zz}^{(k)} = \varepsilon_{0zz}^{(k)} \equiv \varepsilon_{33}^{(0)}, \quad \varepsilon_{xz}^{(k)} = \varepsilon_{0xz}^{(k)} \quad (1 \leq k \leq K), \quad (6)$$

где  $\varepsilon_{ij}^{(k)}$ ,  $\sigma_{ij}^{(k)}$ ,  $p_{ij}^{(k)}$  ( $i, j = x, y, z$ ) – компоненты тензоров деформаций, напряжений и начальных напряжений в  $k$ -м армирующем элементе в локальной системе координат  $x^{(k)}$ ,  $y^{(k)}$ ,  $z^{(k)} \equiv x_3$ ;  $\varepsilon_{0ij}^{(k)}$ ,  $\sigma_{0ij}^{(k)}$ ,  $p_{0ij}^{(k)}$  ( $i, j = x, y, z$ ) – то же в пенопластмассе в системе координат  $x^{(k)}$ ,  $y^{(k)}$ ,  $z^{(k)}$ . Кроме того, из тех же допущений помимо равенств (3) в пределах представительного элемента с учетом закона теплопроводности Фурье тождественно выполняются и условия сопряжения по тепловым потокам на лицевых поверхностях контакта  $k$ -го армирующего элемента со связующим (пенопластмассой).

Согласно четвертому допущению, осредненные поля температуры, деформаций и напряжений в рассматриваемом композите определяются так:

$$T = V_0 T_0 / V + \sum_k V_k T_k / V; \quad (7)$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{V_0}{V} \bar{\varepsilon}_0 + \frac{h}{V} \sum_k \int_0^{l_k} \bar{\varepsilon}_k \delta_k(l) dl; \quad (8)$$

$$\bar{\sigma} = \frac{V_0}{V} \bar{\sigma}_0 + \frac{h}{V} \sum_k \int_0^{l_k} \bar{\sigma}_k \delta_k(l) dl, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{e}_k^* &= \{e_{11}^{(k)}, e_{22}^{(k)}, e_{33}^{(k)}, e_{12}^{(k)}, e_{23}^{(k)}, e_{31}^{(k)}\}, \quad \bar{s}_k^* = \{s_{11}^{(k)}, s_{22}^{(k)}, s_{33}^{(k)}, s_{12}^{(k)}, s_{23}^{(k)}, s_{31}^{(k)}\}, \\ V_k &= h \int_0^{l_k} \delta_k(l) dl, \quad V = V_0 + \sum_k V_k; \end{aligned} \quad (10)$$

$V_0, V_k$  – объемное содержание пенопластмассы и армирующего элемента  $k$ -го семейства в ячейке;  $\delta_k, l_k$  – толщина и длина (вдоль направляющей)  $k$ -го армирующего элемента, причем толщина  $\delta_k \ll \min(a, b)$  в общем случае может быть переменной (но с малой изменчивостью);  $e_{ij}^{(k)}, s_{ij}^{(k)}$  – компоненты тензоров деформаций и напряжений  $k$ -го армирующего элемента в глобальной системе координат  $x_1, x_2, x_3$ ; суммирование производится от 1 до  $K$ ; «звездочка» означает операцию транспонирования.

Из равенства (7) с учетом (3) и последнего соотношения (10) следует

$$T = T_k \quad (0 \leq k \leq K), \quad (11)$$

т. е. средняя температура композита в пределах ячейки равна температуре каждого фазового материала.

Компоненты вектор-столбцов  $\bar{\sigma}_k, \bar{\varepsilon}_k$  и  $\bar{s}_k, \bar{e}_k$  определяют напряженное и деформированное состояние  $k$ -го армирующего элемента в локальной  $x^{(k)}, y^{(k)}, z^{(k)}$  и глобальной  $x_1, x_2, x_3$  системах координат соответственно, и поэтому связаны матричными равенствами [4, 5]

$$\bar{s}_k = D_k \bar{\sigma}_k; \quad (12)$$

$$\bar{e}_k = D_k \bar{\varepsilon}_k, \quad 1 \leq k \leq K, \quad (13)$$

где  $D_k = (D_{ij}^{(k)})$  – матрица ортогональных преобразований размером  $6 \times 6$  с ненулевыми компонентами

$$\begin{aligned} D_{11}^{(k)} &= D_{22}^{(k)} = \cos^2 \varphi_k, \quad D_{12}^{(k)} = D_{12}^{(k)} = \sin^2 \varphi_k, \quad D_{14}^{(k)} = -D_{24}^{(k)} = -\sin 2\varphi_k, \\ D_{33}^{(k)} &= 1, \quad D_{41}^{(k)} = -D_{42}^{(k)} = 0,5 \sin 2\varphi_k, \quad D_{44}^{(k)} = \cos 2\varphi_k, \quad D_{55}^{(k)} = D_{66}^{(k)} = \cos \varphi_k, \\ D_{56}^{(k)} &= -D_{65}^{(k)} = \sin \varphi_k. \end{aligned} \quad (14)$$

Используя связь (12) и определяющие уравнения (1), из соотношения (9) получим

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= \frac{V_0}{V} \bar{\sigma}_0 + \frac{h}{V} \sum_k \int_0^{l_k} \delta_k(l) D_k \bar{\sigma}_k dl = \frac{V_0}{V} A_0 \bar{\varepsilon}_0 + \frac{h}{V} \sum_k \int_0^{l_k} \delta_k(l) D_k A_k \bar{\varepsilon}_k dl - \\ &- \left[ \frac{V_0}{V} A_0 \bar{\alpha}_0 + \frac{h}{V} \sum_k \int_0^{l_k} \delta_k(l) D_k A_k \bar{\alpha}_k dl \right] T + \frac{V_0}{V} \bar{p}_0 + \frac{h}{V} \sum_k \int_0^{l_k} \delta_k(l) D_k \bar{p}_k dl. \end{aligned} \quad (15)$$

Выразим в (15) деформации  $\bar{\varepsilon}_k$  через  $\bar{\varepsilon}_0$ . Для этого воспользуемся равенствами (5), (6), правые части которых распишем в развернутом виде, исполь-

зую правило преобразования тензоров второго ранга [4, 5] при повороте системы координат на угол  $\varphi_k$  вокруг оси  $x_3 \equiv z^{(k)}$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}^{(k)} &= \sigma_{11}^{(0)} \sin^2 \varphi_k + \sigma_{22}^{(0)} \cos^2 \varphi_k - \sigma_{12}^{(0)} \sin 2\varphi_k, \quad \sigma_{yz}^{(k)} = -\sigma_{13}^{(0)} \sin \varphi_k + \\ &+ \sigma_{23}^{(0)} \cos \varphi_k, \quad \sigma_{xy}^{(k)} = 0,5(\sigma_{22}^{(0)} - \sigma_{11}^{(0)}) \sin 2\varphi_k + \sigma_{12}^{(0)} \cos 2\varphi_k \quad (1 \leq k \leq K); \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^{(k)} &= \varepsilon_{11}^{(0)} \cos^2 \varphi_k + \varepsilon_{22}^{(0)} \sin^2 \varphi_k + \varepsilon_{12}^{(0)} \sin 2\varphi_k, \\ \varepsilon_{zz}^{(k)} &= \varepsilon_{33}^{(0)}, \quad \varepsilon_{xz}^{(k)} = \varepsilon_{13}^{(0)} \cos \varphi_k + \varepsilon_{23}^{(0)} \sin \varphi_k \quad (1 \leq k \leq K), \end{aligned} \quad (17)$$

где  $\varepsilon_{ij}^{(0)}$ ,  $\sigma_{ij}^{(0)}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) – компоненты тензоров деформаций и напряжений в связующем в глобальной системе координат  $x_1, x_2, x_3$ .

Преобразуем равенства (16) с учетом (1), (4), (17), (11):

$$\begin{aligned} &A_{21}^{(k)} (\varepsilon_{xx}^{(k)} - \alpha_x^{(k)} T) + A_{22}^{(k)} (\varepsilon_{yy}^{(k)} - \alpha_y^{(k)} T) + A_{23}^{(k)} (\varepsilon_{33}^{(0)} - \alpha_z^{(k)} T) = \\ &= \left[ A_{11}^{(0)} (\varepsilon_{11}^{(0)} - \alpha_1^{(0)} T) + A_{12}^{(0)} (\varepsilon_{22}^{(0)} - \alpha_2^{(0)} T) + A_{13}^{(0)} (\varepsilon_{33}^{(0)} - \alpha_3^{(0)} T) \right] \sin^2 \varphi_k + \\ &+ \left[ A_{21}^{(0)} (\varepsilon_{11}^{(0)} - \alpha_1^{(0)} T) + A_{22}^{(0)} (\varepsilon_{22}^{(0)} - \alpha_2^{(0)} T) + A_{23}^{(0)} (\varepsilon_{33}^{(0)} - \alpha_3^{(0)} T) \right] \cos^2 \varphi_k - \\ &- 2G_{12}^{(0)} \varepsilon_{12}^{(0)} \sin 2\varphi_k, \\ &2G_{xy}^{(k)} \varepsilon_{xy}^{(k)} = -\sin 2\varphi_k \left[ A_{11}^{(0)} (\varepsilon_{11}^{(0)} - \alpha_1^{(0)} T) + A_{12}^{(0)} (\varepsilon_{22}^{(0)} - \alpha_2^{(0)} T) + \right. \\ &+ \left. A_{13}^{(0)} (\varepsilon_{33}^{(0)} - \alpha_3^{(0)} T) \right] / 2 + \sin 2\varphi_k \left[ A_{21}^{(0)} (\varepsilon_{11}^{(0)} - \alpha_1^{(0)} T) + A_{22}^{(0)} (\varepsilon_{22}^{(0)} - \alpha_2^{(0)} T) + \right. \\ &+ \left. A_{23}^{(0)} (\varepsilon_{33}^{(0)} - \alpha_3^{(0)} T) \right] / 2 + 2G_{12}^{(0)} \varepsilon_{12}^{(0)} \cos 2\varphi_k, \\ &2G_{yz}^{(k)} \varepsilon_{yz}^{(k)} = -2G_{13}^{(0)} \varepsilon_{13}^{(0)} \sin \varphi_k + 2G_{23}^{(0)} \varepsilon_{23}^{(0)} \cos \varphi_k, \end{aligned} \quad (18)$$

где  $A_{ij}^{(k)}$ ,  $A_{ij}^{(0)}$  – компоненты матриц  $A_k$ ,  $A_0$  в (1), причем, согласно пятому допущению:

$$\begin{aligned} &A_{44}^{(k)} = 2G_{xy}^{(k)}, \quad A_{55}^{(k)} = 2G_{yz}^{(k)}, \quad A_{66}^{(k)} = 2G_{xz}^{(k)} \quad (1 \leq k \leq K), \quad A_{44}^{(0)} = 2G_{12}^{(0)}, \\ &A_{55}^{(0)} = 2G_{23}^{(0)}, \quad A_{66}^{(0)} = 2G_{31}^{(0)}, \quad A_{ij}^{(k)} = A_{ij}^{(0)} = 0 \quad \text{при } i = \overline{4, 6}, \quad j = \overline{1, 6}, \quad j \neq i \quad (19) \\ &\text{и при } i = \overline{1, 3}, \quad j = \overline{4, 6}; \end{aligned}$$

$G_{ij}^{(k)}$  ( $i, j = x, y, z$ ),  $G_{ij}^{(0)}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) – модули сдвига материалов  $k$ -го армирующего элемента и пенопластмассы соответственно;  $\alpha_x^{(k)}$ ,  $\alpha_y^{(k)}$ ,  $\alpha_z^{(k)}$  и  $\alpha_1^{(0)}$ ,  $\alpha_2^{(0)}$ ,  $\alpha_3^{(0)}$  – компоненты векторов  $\bar{\alpha}_k$  и  $\bar{\alpha}_0$  в (1), причем

$$\bar{\alpha}_k^* = \{ \alpha_x^{(k)}, \alpha_y^{(k)}, \alpha_z^{(k)}, 0, 0, 0 \}, \quad \bar{\alpha}_0^* = \{ \alpha_1^{(0)}, \alpha_2^{(0)}, \alpha_3^{(0)}, 0, 0, 0 \}. \quad (20)$$

В случае изотропных материалов фаз композита в (18) – (20) имеем

$$\begin{aligned}
A_{ii}^{(k)} &= 2G^{(k)}(1 - \nu^{(k)}) / (1 - 2\nu^{(k)}), \quad A_{ij}^{(k)} = 2G^{(k)}\nu^{(k)} / (1 - 2\nu^{(k)}), \\
A_{il}^{(k)} &= 2G^{(k)} = E^{(k)} / (1 + \nu^{(k)}) \quad (i, j = 1, 2, 3, \quad j \neq i, \quad l = 4, 5, 6, \quad 0 \leq k \leq K), \quad (21) \\
\alpha_x^{(n)} &= \alpha_y^{(n)} = \alpha_z^{(n)} = \alpha^{(n)} \quad (1 \leq n \leq K), \quad \alpha_1^{(0)} = \alpha_2^{(0)} = \alpha_3^{(0)} = \alpha^{(0)},
\end{aligned}$$

остальные компоненты  $A_{ij}^{(k)}$  равны нулю;  $E^{(k)}$ ,  $\nu^{(k)}$ ,  $\alpha^{(k)}$  – модуль упругости, коэффициент Пуассона и коэффициент линейного теплового расширения  $k$ -й фазы композиции.

Из соотношений (17), (18) можно однозначно определить все деформации  $\varepsilon_{ij}^{(k)}$  ( $i, j = x, y, z$ ) в  $k$ -м армирующем элементе через деформации связующего  $\varepsilon_{ij}^{(0)}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ); соответствующее равенство запишем в матричной форме

$$\bar{\varepsilon}_k = B_k \bar{\varepsilon}_0 + \bar{C}_k T, \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned}
\bar{\varepsilon}_k^* &= \{\varepsilon_{xx}^{(k)}, \varepsilon_{yy}^{(k)}, \varepsilon_{zz}^{(k)}, \varepsilon_{xy}^{(k)}, \varepsilon_{yz}^{(k)}, \varepsilon_{zx}^{(k)}\}, \quad \bar{\varepsilon}_0^* = \{\varepsilon_{11}^{(0)}, \varepsilon_{22}^{(0)}, \varepsilon_{33}^{(0)}, \varepsilon_{12}^{(0)}, \varepsilon_{23}^{(0)}, \varepsilon_{31}^{(0)}\}, \\
\bar{C}_k^* &= \{0, C_2^{(k)}, 0, C_4^{(k)}, 0, 0\}, \quad k = 1, 2, 3 \dots K;
\end{aligned} \quad (23)$$

$B_k = (B_{ij}^{(k)})$  – матрица размером  $6 \times 6$  с ненулевыми компонентами

$$\begin{aligned}
B_{11}^{(k)} &= \cos^2 \varphi_k, \quad B_{12}^{(k)} = \sin^2 \varphi_k, \quad B_{14}^{(k)} = \sin 2\varphi_k, \quad B_{21}^{(k)} = [A_{11}^{(0)} \sin^2 \varphi_k + \\
&+ (A_{21}^{(0)} - A_{21}^{(k)}) \cos^2 \varphi_k] / A_{22}^{(k)}, \quad B_{22}^{(k)} = [A_{22}^{(0)} \cos^2 \varphi_k + (A_{21}^{(0)} - A_{21}^{(k)}) \sin^2 \varphi_k] / A_{22}^{(k)}, \\
B_{23}^{(k)} &= [A_{13}^{(0)} \sin^2 \varphi_k + A_{23}^{(0)} \cos^2 \varphi_k - A_{23}^{(k)}] / A_{22}^{(k)}, \quad B_{24}^{(k)} = -\sin 2\varphi_k (2G_{12}^{(0)} + \\
&+ A_{21}^{(k)}) / A_{22}^{(k)}, \quad B_{33}^{(k)} = 1, \quad B_{41}^{(k)} = \sin 2\varphi_k (A_{21}^{(0)} - A_{11}^{(0)}) / (4G_{xy}^{(k)}), \quad B_{42}^{(k)} = \sin 2\varphi_k \times \\
&\times (A_{22}^{(0)} - A_{12}^{(0)}) / (4G_{xy}^{(k)}), \quad B_{43}^{(k)} = \sin 2\varphi_k (A_{23}^{(0)} - A_{13}^{(0)}) / (4G_{xy}^{(k)}), \quad B_{44}^{(k)} = \cos 2\varphi_k \times \\
&\times G_{12}^{(0)} / G_{xy}^{(k)}, \quad B_{55}^{(k)} = \cos \varphi_k G_{23}^{(0)} / G_{yz}^{(k)}, \quad B_{56}^{(k)} = -\sin \varphi_k G_{13}^{(0)} / G_{yz}^{(k)}, \quad B_{65}^{(k)} = \sin \varphi_k, \\
B_{66}^{(k)} &= \cos \varphi_k, \quad C_2^{(k)} = [A_{21}^{(k)} \alpha_x^{(k)} + A_{22}^{(k)} \alpha_y^{(k)} + A_{23}^{(k)} \alpha_z^{(k)} - \sin^2 \varphi_k (A_{11}^{(0)} \alpha_1^{(0)} + \\
&+ A_{12}^{(0)} \alpha_2^{(0)} + A_{13}^{(0)} \alpha_3^{(0)}) - \cos^2 \varphi_k (A_{21}^{(0)} \alpha_1^{(0)} + A_{22}^{(0)} \alpha_2^{(0)} + A_{23}^{(0)} \alpha_3^{(0)})] / A_{22}^{(k)}, \quad C_4^{(k)} = \\
&= -\sin 2\varphi_k [\alpha_1^{(0)} (A_{21}^{(0)} - A_{11}^{(0)}) + \alpha_2^{(0)} (A_{22}^{(0)} - A_{12}^{(0)}) + \alpha_3^{(0)} (A_{23}^{(0)} - A_{13}^{(0)})] / (4G_{xy}^{(k)}).
\end{aligned} \quad (24)$$

Подставим (22) в (15), тогда после элементарных преобразований получим

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} = & \left( \frac{V_0}{V} A_0 + \frac{h}{V} \sum_k \int_0^{l_k} \delta_k(l) D_k A_k B_k dl \right) \bar{\varepsilon}_0 + \frac{V_0}{V} \bar{p}_0 + \frac{h}{V} \sum_k \int_0^{l_k} \delta_k(l) D_k \bar{p}_k dl - \\ & - \left[ \frac{V_0}{V} A_0 \bar{\alpha}_0 + \frac{h}{V} \sum_k \int_0^{l_k} \delta_k(l) D_k A_k (\bar{\alpha}_k - \bar{C}_k) dl \right] T. \end{aligned} \quad (25)$$

Выразим в (25) деформации связующего  $\bar{\varepsilon}_0$  через осредненные деформации  $\bar{\varepsilon}$ . С этой целью подставим соотношения (13) в (8) и учтем равенство (22), после чего будем иметь

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon} = & \frac{V_0}{V} \bar{\varepsilon}_0 + \frac{h}{V} \sum_k \int_0^{l_k} \delta_k(l) D_k \bar{\varepsilon}_k dl = \left( \frac{V_0}{V} I + \frac{h}{V} \sum_k \int_0^{l_k} \delta_k(l) D_k B_k dl \right) \bar{\varepsilon}_0 + \\ & + \left( \frac{h}{V} \sum_k \int_0^{l_k} \delta_k(l) D_k \bar{C}_k dl \right) T, \end{aligned} \quad (26)$$

где  $I$  – единичная матрица размером  $6 \times 6$ . Из соотношения (26) следует

$$\bar{\varepsilon}_0 = E \bar{\varepsilon} - T \bar{G}, \quad (27)$$

где  $E$  – матрица размером  $6 \times 6$ ,  $\bar{G}$  – вектор-столбец вида

$$E = \left( \frac{V_0}{V} I + \frac{h}{V} \sum_k \int_0^{l_k} \delta_k(l) D_k B_k dl \right)^{-1}, \quad \bar{G} = E \left( \frac{h}{V} \sum_k \int_0^{l_k} \delta_k(l) D_k \bar{C}_k dl \right). \quad (28)$$

Подставим (27) в равенство (25), тогда после элементарных преобразований будем иметь

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} = & \left( \frac{V_0}{V} A_0 + \frac{h}{V} \sum_k \int_0^{l_k} \delta_k(l) D_k A_k B_k dl \right) E \bar{\varepsilon} + \left( \frac{V_0}{V} \bar{p}_0 + \frac{h}{V} \sum_k \int_0^{l_k} \delta_k(l) D_k \bar{p}_k dl \right) - \\ & - \left[ \frac{V_0}{V} A_0 (\bar{\alpha}_0 + \bar{G}) + \frac{h}{V} \sum_k \int_0^{l_k} \delta_k(l) D_k A_k (\bar{\alpha}_k - \bar{C}_k + B_k \bar{G}) dl \right] T. \end{aligned} \quad (29)$$

Из сравнения (29) и первого равенства (1) с учетом первого допущения вытекают матричные соотношения

$$A = \left( \frac{V_0}{V} A_0 + \frac{h}{V} \sum_k \int_0^{l_k} \delta_k(l) D_k A_k B_k dl \right) E, \quad \bar{p} = \frac{V_0}{V} \bar{p}_0 + \frac{h}{V} \sum_k \int_0^{l_k} \delta_k(l) D_k \bar{p}_k dl; \quad (30)$$

$$\bar{\alpha} = A^{-1} \left[ \frac{V_0}{V} A_0 (\bar{\alpha}_0 + \bar{G}) + \frac{h}{V} \sum_k \int_0^{l_k} \delta_k(l) D_k A_k (\bar{\alpha}_k - \bar{C}_k + B_k \bar{G}) dl \right], \quad (31)$$

где  $A^{-1}$  – матрица, обратная матрице  $A$  из (30). В (30), (31) нужно учесть выражения для матриц и векторов (14), (24), (28), причем компоненты матриц

$B_k$ ,  $D_k$  и векторов  $\bar{C}_k$  зависят от естественной координаты  $l$  вдоль направляющей линии  $k$ -го армирующего элемента, поэтому в общем случае интегралы в (28) – (31) следует определять численно.

Первое равенство (30) определяет эффективные жесткости композиции; второе соотношение (30) – осредненное начальное напряженное состояние в армированной пенопластмассе. Равенство же (31) задает эффективные коэффициенты линейного теплового расширения рассматриваемого композита.

Таким образом, соотношения (30), (31) определяют все эффективные термоупругие характеристики пенопластмассы, армированной пространственными элементами.

Важной особенностью предложенной модели рассматриваемого композита является возможность определения напряжений  $\bar{\sigma}_k$  и деформаций  $\bar{\varepsilon}_k$  в фазах композиции по известным средним деформациям  $\bar{\varepsilon}$ . Действительно, пусть известны деформации  $\bar{\varepsilon}$  и температура  $T$ , тогда из (11), (22), (27) известны  $T_k$ ,  $\bar{\varepsilon}_k$ , а из второго равенства (1) можно получить  $\bar{\sigma}_k$ . Знание напряжений  $\bar{\sigma}_k$  и деформаций  $\bar{\varepsilon}_k$  ( $0 \leq k \leq K$ ) имеет принципиальное значение при использовании в дальнейшем структурных теорий прочности, и кроме того, для изотропных фазовых материалов позволяет построить структурные формулы для эффективных характеристик композита при нелинейно-упругом деформировании материалов фаз композиции, так как реальные материалы часто имеют нелинейные зависимости  $\sigma \square \varepsilon$  [6]. Для этого можно использовать деформационную теорию пластичности и метод переменных параметров упругости [6], причем на каждой итерации этого метода приближения для эффективных характеристик исследуемого композита можно определить по изложенной выше схеме, заменив лишь  $G^{(k)}$ ,  $v^{(k)}$  в (21) на значения (при  $T = 0$ ,  $\bar{p}_k = 0$ )

$$\tilde{G}^{(k)} = \frac{\sigma_i^{(k)}}{3\varepsilon_i^{(k)}}, \quad \tilde{v}^{(k)} = \frac{1/2 - (1 - 2v^{(k)})\sigma_i^{(k)} / (3E^{(k)}\varepsilon_i^{(k)})}{1 + (1 - 2v^{(k)})\sigma_i^{(k)} / (3E^{(k)}\varepsilon_i^{(k)})}, \quad 0 \leq k \leq K,$$

где  $\sigma_i^{(k)}$ ,  $\varepsilon_i^{(k)}$  – интенсивности напряжений и деформаций в  $k$ -й фазе композиции, известные из решения на предыдущей итерации (на первой итерации все материалы предполагаются линейно-упругими).

Если в рамках построенной модели для изотропного связующего (пенопластмассы) осуществить предельные переходы  $v^{(0)} \rightarrow 0$  и  $E^{(0)} \rightarrow 0$ , то по формулам (30), (31) получим эффективные термоупругие характеристики ребристой конструкции. Ранее, на основе принципиально другого подхода (методами строительной механики), интегральные упругие характеристики таких конструкций были получены, например, в [3] и др. Поэтому представляется целесообразным сравнить эффективные характеристики, например сотового заполнителя, рассчитанные по этим двум методикам и сопоставить их с известными экспериментальными данными [2].

Представительная ячейка сотовой ребристой конструкции изображена на рис. 2. Такая ребристая конструкция характеризуется наличием лишь двух ( $K = 2$ ) криволинейных армирующих элементов постоянной толщины  $\delta_1 = \delta_2 = 0,05$  мм ( $\delta_3 \equiv \delta_4 \equiv 0$ , см. рис. 1), а диаметр соты равен:  $d = 8$  мм [2]. Сотовый заполнитель изготовлен из дуралюмина Д16АТВ с механиче-

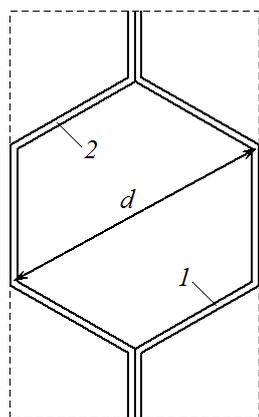


Рис. 2

скими характеристиками [2]:  $E^{(k)} = 67,7$  ГПа ;  $G^{(k)} = 24$  ГПа ;  $k = 1, 2$  (см. (21)).

В табл. 1 приведены расчетные (в расчетах по предложенной модели принималось:  $\nu^{(0)} = 0, E^{(0)} = 10^{-11} E^{(1)}$ ) и экспериментальные значения эффективных упругих технических констант рассматриваемой сотовой конструкции. (В таблицах:  $E_i, G_{ij}, \mu_{ij}$  – модули упругости первого и второго рода и коэффициенты Пуассона соответственно для ортотропного эквивалентного материала.)

Из сравнения чисел, приведенных во втором и третьем столбцах, следует хорошее совпадение расчетных значений модулей упругости первого и второго рода, определенных по обоим обсуждаемым методикам, и их удовлетворительное согласование с экспериментом. (Из табл. 1 видно: экспериментальные данные получаются меньше расчетных. В [2] авторы объясняют это тем, что в расчетах используется идеально правильная форма соты, а в реальности (в эксперименте) наблюдается наличие начальной погиби ребристых элементов соты. Последнее обстоятельство сказывается на понижении жесткости реального сотового заполнителя.)

Таблица 1

Эффективные упругие технические константы сотового заполнителя

Технические константы	Метод расчета		Экспериментальные данные [2]
	Предложенная модель	Метод строительной механики [3, стр. 109]	
$E_1$ , МПа	398,99	410,56 / 407,99*	—
$E_2$ , МПа	717,62	768,61 / 759,64*	—
$E_3$ , МПа	1302,89	—	—
$\mu_{21}$	0,21326	0,34592 / 0,35355*	—
$\mu_{12}$	0,11834	0,18478 / 0,18988*	—
$G_{12}$ , МПа	148,84	—	—
$G_{23}$ , МПа	290,77	263,55	216 – 246
$G_{31}$ , МПа	175,31	173,21	83,5 – 131,0

\*) В числителе: расчет при толщине заполнителя  $h = 8$  мм ; в знаменателе: расчет при  $h = 13$  мм . (Расчетные значения  $E_1, E_2, \mu_{21}, \mu_{12}$ , определенные по методике из [3], зависят от толщины заполнителя. Значения толщины  $h$  заполнителя при этом выбраны такими, какие использовались в [2] при проведении экспериментов.)

Сравнительный анализ результатов, приведенных в табл. 1, позволяет заключить, что предложенный в настоящей работе метод определения эффективных характеристик ребристой конструкции вполне может быть использован при практических расчетах. Достоинство этого метода заключается в том, что он, в отличие от метода, изложенного в [3], позволяет вычислить не толь-

ко упругие, но и термоупругие эффективные характеристики рассматриваемой конструкции (в общем случае, композиции).

Выше уже отмечалось, что на практике давно используются армированные пенопласты, но, как правило, такое армирование является прямолинейным. Сравним эффективные характеристики прямолинейно и пространственно армированных пенопластмасс с одинаковым удельным объемным содержанием армирующих элементов. Случай прямолинейного армирования получается, если в представительной ячейке отсутствуют криволинейные элементы 1 и 2 (см. рис. 1), а в качестве варианта пространственного армирования выберем сотовую ребристую конструкцию (рис. 2) с полостями, заполненными пенопластмассой. Материал, размер соты и толщину ее стенки оставим прежними, а в качестве связующего используем кремнийорганическую пенопластмассу с механическими характеристиками  $\nu^{(0)} = 0,25$ ,  $E^{(0)} = 40$  МПа при  $\rho^{(0)} = 100$  кг/м<sup>3</sup> и  $E^{(0)} = 168,5$  МПа при  $\rho^{(0)} = 200$  кг/м<sup>3</sup> (здесь  $\rho^{(0)}$  – объемная плотность материала связующего, см. табл. 1.21 в [1]). В прямолинейно армированном пенопласте усиливающий элемент (выполненный из сплава Д16АТВ) ориентируем в направлении  $x_2$  (т. е.  $\varphi_1 = \pi/2$ ), а толщину этого элемента зададим соотношением:  $\bar{\delta}_1 = 8\delta_1/3$ , что, согласно рис. 2, обеспечивает такой же удельный расход арматуры, как и в случае пространственного армирования в виде сот (здесь  $\delta_1$  – толщина стенки сотовой ребристой конструкции).

В табл. 2 приведены расчетные значения эффективных упругих технических констант рассматриваемых армированных пенопластмасс. Сопоставление значений, приведенных в третьем и пятом столбцах табл. 2, с соответствующими значениями во втором столбце табл. 1 показывает, что заполнение полостей сотовой ребристой конструкции пенопластмассой приводит к увеличению ее жесткости, причем для некоторых эффективных констант это увеличение может быть значительным (так, при  $\rho^{(0)} = 200$  кг/м<sup>3</sup> величины  $E_1$ ,  $G_{31}$  увеличиваются на 43,5 % и 37,9 % соответственно).

Таблица 2

Эффективные упругие технические константы прямолинейно и пространственно армированной пенопластмассы

Характеристика композиции	$\rho^{(0)} = 100$ кг/м <sup>3</sup>		$\rho^{(0)} = 200$ кг/м <sup>3</sup>	
	Прямолинейное армирование	Пространственное армирование	Прямолинейное армирование	Пространственное армирование
$E_1$ , МПа	47,78	440,50	198,41	572,73
$E_2$ , МПа	1342,4	756,83	1469,01	882,67
$E_3$ , МПа	1342,4	1344,28	1469,01	1474,78
$\mu_{21}$	0,202	0,217	0,206	0,227
$\mu_{12}$	$7,191 \cdot 10^{-3}$	0,127	$2,783 \cdot 10^{-2}$	0,148
$G_{12}$ , МПа	16,0	164,65	67,41	215,42
$G_{23}$ , МПа	477,27	306,39	526,73	356,57
$G_{31}$ , МПа	16,0	191,08	67,41	241,75

Сравнение же значений, приведенных в третьем и пятом столбцах табл. 2, с аналогичными значениями во втором и четвертом столбцах соответственно той же таблицы позволяет сделать вывод о том, что замена прямолинейного армирования пенопластмассы на пространственное приводит к уменьшению эффективных констант  $E_2$ ,  $G_{23}$  в 1,5 – 1,8 раза, но зато увеличивает остальные эффективные жесткости композиции, причем для некоторых характеристик на порядок и более (см., например, значения модулей Юнга и сдвига  $E_1$ ,  $G_{12}$ ,  $G_{31}$ , приведенные во втором и третьем столбцах табл. 2).

Таким образом, пространственное армирование пенопластмасс позволяет значительно повысить ряд жесткостных характеристик такой композиции по сравнению с прямолинейно армированным пенопластом при относительно незначительной потере жесткости в направлении, в котором сориентированы плоские усиливающие элементы в прямолинейно армированном композитном материале.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08-01-90403-Укр\_а) и Президиума СО РАН (Постановление № 10 от 15.01.09, номер проекта 72).

1. Александров А. Я. Конструкции с заполнителями из пенопластов / А. Я. Александров, М. Я. Бородин, В. В. Павлов. – М. : Машиностроение, 1972. – 212 с.
2. Александров А. Я. Расчет трехслойных панелей / А. Я. Александров, Л. Э. Брюккер, Л. М. Куришин, А. П. Прусаков. – М. : Оборонгиз, 1960. – 271 с.
3. Брюккер Л. Э. Испытания трехслойных стержней при нормальных и повышенных температурах / Л. Э. Брюккер, А. С. Ракин // Динамика и прочность авиационных конструкций: Межвуз. сб. научн. трудов. – Новосибирск : Изд-во НГУ, НЭТИ, 1978. – Вып. 4. – С. 73 – 79.
4. Малмейстер А. К. Сопротивление полимерных и композитных материалов. / А. К. Малмейстер, В. П. Тамуж, Г. А. Тетерс. – Рига : Зинатне, 1980. – 572 с.
5. Калинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести / Н. Н. Калинин. – М. : Машиностроение, 1968. – 400 с.
6. Новацкий В. Теория упругости / В. Новацкий. – М. : Мир, 1975. – 872 с.

Институт теоретической и прикладной  
механики им. С.А. Христиановича СО РАН

Получено 18.06.09,  
в окончательном варианте 18.06.09