УДК 629.7.05:621.454-181.4

В.М. АНИЩЕНКО

СУММАРНЫЙ ИМПУЛЬС ТЯГИ БЫСТРОРАСХОДНЫХ ГАЗОРЕАКТИВНЫХ ДВИГАТЕЛЬНЫХ УСТАНОВОК С УЧЕТОМ ДРОССЕЛЬ-ЭФФЕКТА

Представлены аналитические зависимости, позволяющие оценивать суммарный импульс тяги быстрорасходных газореактивных двигательных установок с учетом дроссель-эффекта при течении газа в их магистралях.

Представлено аналітичні залежності, що дозволяють оцінювати сумарний імпульс тяги швидковитратних газореактивних рушійних установок з урахуванням дросель-ефекту при течії газу в їхніх магістралях.

The paper deals with analytical dependences for evaluation of a total thrust pulse in high-flow rate gas-jet propulsion systems taking into consideration the throttle effect when the gas flows through their lines.

Газореактивные двигательные установки (ГРДУ), у которых требуемый суммарный импульс тяги вырабатывается в течение времени, не превышающего нескольких минут, можно отнести к быстрорасходным ГРДУ. В статье [1] представлены принципиальные схемы ГРДУ, наиболее часто реализуемые на практике. Работа быстрорасходных ГРДУ характеризуется интенсивным изменением давления и температуры газа в баллонах.

В статье [1] даны аналитические зависимости для определения суммарного импульса тяги быстрорасходных ГРДУ для адиабатической и политропической моделей истечения газа из баллонов. Было показано, что текущее значение температуры газа в баллоне при адиабатическом процессе истечения связано с количеством израсходованного газа следующей зависимостью:

$$T_г = T_{г.н}\left(1-\frac{m_p}{m_{г.н}}\right)^{\kappa-1}, \tag{1}$$

где $T_г$ и $T_{г.н}$ – текущее и начальное значения температуры газа в баллоне;

$m_{г.н}$ – начальная масса газа в баллоне;

m_p – масса израсходованного газа;

κ – показатель адиабаты.

Если для дозирования расхода газа в ГРДУ установлен жиклер, то при прохождении газа через сужение поперечного сечения происходит его дросселирование. При дросселировании реального газа возможно изменение его температуры, называемое эффектом Джоуля–Томсона. Изменение температуры реального газа при дросселировании пропорционально изменению его давления, т.е.

$$dT = \alpha' dP, \tag{2}$$

где α' – коэффициент пропорциональности, называемый дифференциальным эффектом Джоуля–Томсона.

Отсутствие известных работ, посвященных влиянию дроссель-эффекта реального газа на суммарный импульс тяги ГРДУ, определяет необходимость проведения исследований по оценке этого влияния.

В работе [2] предложена следующая эмпирическая формула для вычисления коэффициента α':

$$\alpha' = a\left(\frac{273}{T}\right)^2. \qquad (3)$$

Здесь коэффициент a зависит от вещества.

Подставляя (3) в (2) и интегрируя, получим следующую формулу для определения температуры газа за жиклером:

$$T_{г.з.ж} = \left[T^{з}_{г.п.ж} - 2{,}25 \cdot 10^5 a\left(P_{п.ж} - P_{з.ж}\right)\right]^{\frac{1}{3}}, \qquad (4)$$

где $T_{г.п.ж}$ и $P_{п.ж}$ – температура и давление газа перед жиклером; $T_{г.з.ж}$ и $P_{з.ж}$ – температура и давление газа за жиклером.

Рассматриваемые варианты ГРДУ имеют высокое начальное давление газа в баллонах (более $2 \cdot 10^7$ Н/м^2), а уровни тяг, реализуемые ГРДУ, обычно невелики и могут быть получены лишь при невысоких давлениях газа перед соплами (около $3 \cdot 10^5$ Н/м^2). Это приводит к большому перепаду давления на жиклере. Поэтому для упрощения расчетов при учете дроссель-эффекта можно предполагать, что $P_{з.ж} = 0$.

Давление газа перед жиклером можно выразить через начальные значения параметров газа в баллоне, используя уравнение адиабаты и считая давление и температуру перед жиклером равными давлению и температуре в баллоне

$$P_{п.ж} = P_{г.н}\left(\frac{T_{г.п.ж}}{T_{г.н}}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}, \qquad (5)$$

где $P_{г.н}$ – начальное давление газа в баллоне.

Подставляя (5) в (4), получим

$$T_{г.з.ж} = \left[T^3_{г.п.ж} - 2{,}25 \cdot 10^5 a P_{г.н}\left(\frac{T_{г.п.ж}}{T_{г.н}}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}\right]^{\frac{1}{3}}. \qquad (6)$$

В статье [1] была рекомендована следующая формула для определения суммарного импульса тяги:

$$I_{\Sigma} = \int_0^{m_p} A T_г^{\frac{1}{2}} dm_p. \qquad (7)$$

Входящие в выражение (7) параметры определяются по формулам

$$A = \frac{\varphi}{\mu}\frac{K_T}{K_p}; \quad K_p = \left[\left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}} \frac{\kappa}{R}\right]^{\frac{1}{2}},$$

где φ – коэффициент потерь тяги в сопле; μ – коэффициент расхода; K_T – коэффициент тяги; R – газовая постоянная.

С учетом (6) уравнение (7) примет следующий вид:

$$I_{\Sigma} = \int_0^{m_p} A\left[T^3_{г.п.ж} - 2{,}25\cdot 10^5 ap_{г.н}\left(\frac{T_{г.п.ж}}{T_{г.н}}\right)^{\frac{к}{к-1}}\right]^{\frac{1}{6}} dm_p\ . \tag{8}$$

В соответствии с (1)

$$T_{г.п.ж} = T_{г.н}(1-\frac{m_p}{m_{г.н}})^{к-1}\ . \tag{9}$$

Введя обозначение $B = 2{,}25\cdot 10^5 a\dfrac{p_{г.н}}{T_{г.н}^{\frac{к}{к-1}}}$ и подставив (9) в (8), получим

$$I_{\Sigma} = \int_0^{m_p} A\left[T_{г.н}\left(1-\frac{m_p}{m_{г.н}}\right)^{3(к-1)} - BT_{г.н}^{\frac{к}{к-1}}\left(1-\frac{m_p}{m_{г.н}}\right)^{к}\right]^{\frac{1}{6}} dm_p\ . \tag{10}$$

После замены переменных $X = 1-\dfrac{m_p}{m_{г.н}}$ и введения обозначений $A' = -Am_{г.н}$, $B' = BT_{г.н}^{\frac{к}{к-1}}$, $B'' = T^3_{г.н}$ выражение (10) примет следующий вид:

$$I_{\Sigma} = \int_{X_0}^{X_p} A'(B')^{\frac{1}{6}} X^{\frac{к}{6}}\left(\frac{B''}{B'}X^{2к-3}-1\right)^{\frac{1}{6}} dx\ . \tag{11}$$

Полученное выражение является интегралом от биномиального дифференциала, который имеет следующий общий вид:

$$\int X^m\left(a+bx^n\right)^p dx\ . \tag{12}$$

Интеграл (12) выражается через элементарные функции только при выполнении одного из следующих условий Чебышева:

– если p – целое число;

– если $\dfrac{m+1}{n}$ – целое число;

– если $\dfrac{m+1}{n}+p$ – целое число.

Для одноатомных и двухатомных газов, для которых показатель адиабаты $к$ равен соответственно $1^2/_3$ и $1^2/_5$, интеграл (11) выражается через элементарные функции в связи с выполнением третьего условия Чебышева.

Для $к = 1^2/_5$ интеграл (11) имеет следующее решение:

$$I_{\Sigma} = \frac{6A'(B')^{\frac{1}{6}}}{2к-3}\left[-\frac{1}{37}\left(Z_p^{37}-Z_0^{37}\right)+\frac{5}{31}\cdot\frac{B'}{B''}\left(Z_p^{31}-Z_0^{31}\right)-\frac{10}{25}\left(\frac{B''}{B'}\right)^2\left(Z_p^{25}-Z_0^{25}\right)+\right.$$

$$+\frac{10}{19}\left(\frac{B''}{B'}\right)\left(Z_p^{19}-Z_0^{19}\right)-\frac{5}{13}\left(\frac{B''}{B'}\right)^4\left(Z_p^{13}-Z_0^{13}\right)+\frac{1}{7}\left(\frac{B''}{B'}\right)^5\left(Z_p^{7}-Z_0^{7}\right)\Bigg], \qquad (13)$$

где $Z_p=\left(\frac{B''}{B'}-X^{3-2\kappa}\right)^{\frac{1}{6}}$; $Z_0=\left(\frac{B''}{B'}-1\right)^{\frac{1}{6}}$.

Для $\kappa = 1^2/_3$ интеграл (11) имеет следующее решение:

$$I_\Sigma=\frac{6A'(B')^{\frac{1}{6}}}{2\kappa-3}\left\{\frac{Z\left(\frac{B''}{B'}-Z^6\right)^{-4}}{24}-\frac{Z\left(\frac{B''}{B'}-Z^6\right)^{-3}}{432\,\frac{B''}{B'}}-\frac{Z\left(\frac{B''}{B'}-Z^6\right)^{-2}}{305\left(\frac{B''}{B'}\right)^2}-\frac{Z\left(\frac{B''}{B'}-Z^6\right)^{-1}}{166\left(\frac{B''}{B'}\right)^3}-\right.$$

$$-\frac{300}{\left(\frac{B''}{B'}\right)^3}\left(-\frac{1}{6\left(\frac{B''}{B'}\right)^{\frac{5}{6}}}\ln\left|\frac{Z-\left(\frac{B''}{B'}\right)^{\frac{1}{6}}}{Z+\left(\frac{B''}{B'}\right)^{\frac{1}{6}}}\right|-\frac{1}{6\left(\frac{B''}{B'}\right)^{\frac{5}{6}}}\left\{\cos\frac{\pi}{3}\ln\left[Z^2-2\left(\frac{B''}{B'}\right)^{\frac{1}{6}}Z\times\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\cos\frac{\pi}{3}+\left(\frac{B''}{B'}\right)^{\frac{1}{3}}\right]+\cos\frac{2\pi}{3}\ln\left[Z^2-2\left(\frac{B''}{B'}\right)^{\frac{1}{6}}Z\cos\frac{2\pi}{3}+\left(\frac{B''}{B'}\right)^{\frac{1}{3}}\right]\right\}+\frac{1}{3\left(\frac{B''}{B'}\right)^{\frac{5}{6}}}\times$$

$$\left.\left.\left.\times\left[\sin\frac{\pi}{3}\operatorname{arctg}\frac{Z-\left(\frac{B''}{B'}\right)^{\frac{1}{6}}\cos\frac{\pi}{3}}{\left(\frac{B''}{B'}\right)^{\frac{1}{6}}\sin\frac{\pi}{3}}+\sin\frac{2\pi}{3}\operatorname{arctg}\frac{Z-\left(\frac{B''}{B'}\right)^{\frac{1}{6}}\cos\frac{2\pi}{3}}{\left(\frac{B''}{B'}\right)^{\frac{1}{6}}\sin\frac{2\pi}{3}}\right]\right)\right\}\right|_{z_o}^{z_p}, \qquad (14)$$

где Z_p и Z_0 – пределы интегрирования.

Чтобы получить I_Σ для случая полной выработки газа из баллона, необходимо в Z_p при подстановке в уравнения (13) и (14) принять $m_p = m_{г.н}$.

Для вывода уравнения, позволяющего определять I_Σ, при любых значениях показателя адиабаты κ можно воспользоваться формулой (11), которая после преобразований примет следующий вид:

$$I_\Sigma=\int_{x_0}^{x_p}A'(B'')^{\frac{1}{6}}X^{\frac{3(\kappa-1)}{6}}\left(1-\frac{B'}{B''}X^{3-2\kappa}\right)^{\frac{1}{6}}dX.$$

После замены переменных $Y=\frac{B''}{B'}X^{3-2\kappa}$, разложения в степенной ряд выражения $(1-Y)^{\frac{1}{6}}$, интегрирования и перехода к переменной m_p получим

$$I_{\Sigma}=\frac{2A'(B'')^{\frac{1}{6}}}{\kappa+1}\left(\frac{B''}{B'}\right)^{\frac{\kappa^2-1}{3-2\kappa}}\left\{\left(1-\frac{m_p}{m_{г.н}}\right)^{\frac{\kappa+1}{2}}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{6}-n+1\right)}{n!}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left(1-\frac{m_p}{m_{г.н}}\right)^{n(3-2\kappa)}\right]-\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{6}-n+1\right)}{n!}\right]\right\}. \qquad (15)$$

В случае полной выработки газа из баллона, когда $m_p=m_{г.н}$, получим

$$I_{\Sigma}=-\frac{2A'(B'')^{\frac{1}{6}}}{\kappa+1}\left(\frac{B''}{B'}\right)^{\frac{\kappa^2-1}{3-2\kappa}}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{6}-n+1\right)}{n!}\right]. \qquad (16)$$

Рассмотрим случай истечения газа из баллона ГРДУ с учетом теплообмена между газом и стенкой баллона и с учетом дроссель-эффекта реального газа при прохождении им дросселирующего элемента.

В статье [1] показано, что текущее значение температуры газа в баллоне при политропическом истечении связано с количеством израсходованного газа следующей зависимостью:

$$T_г=\frac{\left(1-\frac{m_p}{m_{г.н}}\right)^{(\kappa-1)(C+1)}+C}{C+1}T_{г.н}, \qquad (17)$$

где $C=\frac{1{,}01A_0\sqrt{T_г}F}{R\mu K_P f}\left(\frac{T_{г.н}}{p_{г.н}}\right)^{\frac{1}{3}}=\mathrm{const}$; $A_0\sqrt{T_3}=\mathrm{const}$; F – площадь внутренней поверхности баллона; f – площадь отверстия, через которое истекает газ; A_0 – коэффициент, слабо зависящий от температуры.

После преобразования уравнения (6) в предположении, что $T_{г.C.ж}=T_г$, получим

$$T_{г.з.ж}=\left(T_г^3-bT_г^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}\right)^{\frac{1}{3}}. \qquad (18)$$

С учетом (17) уравнение (18) примет следующий вид:

$$T_{г.з.ж} = \left\{ \left[\frac{\left(1 - \frac{m_p}{m_{г.н}}\right)^{(\kappa-1)(C+1)} + C}{C+1} T_{г.н} \right] - \right.$$

$$\left. - B \left[\frac{\left(1 - \frac{m_p}{m_{г.н}}\right)^{(\kappa-1)(C+1)} + C}{C+1} T_{г.н} \right]^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \right\}^{\frac{1}{3}}. \qquad (19)$$

После подстановки (19) в уравнение (7), двух последовательных замен переменных

$$X = \frac{\left(1 - \frac{m_p}{m_{г.н}}\right)^{(\kappa-1)(C+1)} + C}{C+1} T_{г.н} \text{ и } Y = BX^{\frac{\kappa}{\kappa-1} - 3},$$

разложения в степенной ряд выражения $(1 - Y)^{\frac{1}{6}}$ и преобразований получим

$$I_\Sigma = - \frac{Am_{г.н}}{(3 - 2\kappa) T_{г.н} b^{\frac{3(\kappa-1)}{2(3-2\kappa)}}} \cdot \left(\frac{C+1}{b^{\frac{\kappa-1}{3-2\kappa}} T_{г.н}} \right)^{\frac{1}{(\kappa-1)(C+1)} - 1} \times$$

$$\times \int_{Y_0}^{Y_p} \left[Y^{\frac{7\kappa-9}{2(3-2\kappa)}} \left(Y^{\frac{\kappa-1}{3-2\kappa}} - \frac{CB^{\frac{\kappa-1}{3-2\kappa}} T_{г.н}}{C+1} \right)^{\frac{1}{(\kappa-1)(C+1)} - 1} + \right.$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\frac{1}{6}\left(\frac{1}{6} - 1\right) \ldots \left(\frac{1}{6} - n + 1\right)}{n!} \cdot Y^{\frac{7\kappa-9}{2(3-2\kappa)} + n} \times$$

$$\left. \times \left(Y^{\frac{\kappa-1}{3-2\kappa}} - \frac{Cb^{\frac{\kappa-1}{3-2\kappa}} T_{г.н}}{C+1} \right)^{\frac{1}{(\kappa-1)(C+1)} - 1} \right] dY \qquad (20)$$

Для двухатомных газов, у которых $\kappa = 1^2/_5$, полученный интеграл выражается через элементарные функции, если показатель степени $\frac{1}{(\kappa-1)(C+1)}-1$ является целым числом.

Таким образом, округляя до целого числа значение выражения $\frac{1}{(\kappa-1)(C+1)}-1$, можно получить выражение для определения приближенного значения суммарного импульса тяги с учетом теплообмена и дроссель-эффекта.

Рассмотрению подлежат два варианта:

– при $\frac{1}{(\kappa-1)(C+1)}-1=0$;

– при $\frac{1}{(\kappa-1)(C+1)}-1>0$.

Третий вариант, когда $\frac{1}{(\kappa-1)(C+1)}-1=-1$, не рассматривается, так как при этом произведение $(\kappa-1)(C+1)$ должно равняться ∞, что на практике не реализуется.

Интегрируя уравнение (20), при условии, что $\kappa = 1^2/_5$ и $\frac{1}{(\kappa-1)(C+1)}-1=0$, получим

$$I_\Sigma = -\frac{5Am_{г.н}}{b^3 T_{г.н}}\left\{\frac{B^3 T_{г.н}^{\frac{3}{2}}}{3}\left(\left[\frac{\left(1-\frac{m_p}{m_{г.н}}\right)^{\frac{2(C+1)}{5}}+C}{C+1}\right]^{\frac{3}{2}}-1\right)+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \times\right.$$

$$\left.\times\frac{\frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{6}-n+1\right)}{n!}\cdot\frac{b^{3+n}}{3+n}T_{г.н}^{\frac{3+n}{2}}\left(\left[\frac{\left(1-\frac{m_p}{m_{г.н}}\right)^{\frac{2(C+1)}{5}}+C}{C+1}\right]^{\frac{3+n}{2}}-1\right)\right\}. \quad (21)$$

Интегрирование уравнения (20) при условии, что $\kappa = 1^2/_5$ и $\frac{1}{(\kappa-1)(C+1)}-1=a>0$, дает следующий результат:

$$I_{\Sigma}=-\frac{5Am_{г.н}(q+1)^{a}}{b^{3+2a}T_{г.н}{}^{1+a}}\cdot\left\{\sum_{q=0}^{a}\binom{a}{q}\frac{\left(-\frac{CB^{2}T_{г.н}}{q+1}\right)^{a-q}B^{3+2q}T_{г.н}{}^{\frac{3+2q}{2}}}{3+2q}\times\right.$$

$$\times\left(\left[\frac{\left(1-\frac{m_{p}}{m_{г.н}}\right)^{\frac{2(q+1)}{5}}+q}{q+1}\right]^{\frac{3+2q}{2}}-1\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{q=0}^{a}\binom{a}{q}(-1)^{n}\,\frac{\frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{6}-n+1\right)}{n!}\times$$

$$\left.\times\frac{\left(-\frac{Cb^{2}T_{г.н}}{q+1}\right)^{a-q}}{3+n+2q}\quad B^{3+n+2q}T_{г.н}{}^{\frac{3+n+2q}{2}}\cdot\left(\left[\frac{\left(1-\frac{m_{p}}{m_{б.н}}\right)^{\frac{2(q+1)}{5}}+q}{q+1}\right]^{\frac{3+n+2q}{2}}-1\right)\right\}.\quad(22)$$

В случае полной выработки газа из баллона в уравнениях (21) и (22) необходимо принимать $m_{p}=m_{г.н}$.

Ограничиваясь в уравнениях (15), (16), (21), (22) конечным числом членов степенного ряда, можно получить значения располагаемого суммарного импульса тяги ГРДУ с достаточной для практики точностью.

Теоретические исследования показали, что для давления заправки баллонов воздухом или азотом до 26 МПа при температуре от минус 30 до плюс 20°С и времени выработки суммарного импульса тяги до 1000 с дроссель-эффект реального газа приводит к уменьшению суммарного импульса тяги ГРДУ, имеющей дросселирующее устройство, на величину до 12 %.

1. *Анищенко В. М.* Определение располагаемого суммарного импульса тяги быстрорасходных газореативных двигательных установок / *В. М. Анищенко* // Космическая техника. Ракетное вооружение: Науч.-техн. сб. – 2008. – Вып. 1. – Днепропетровск : ГП "КБ "Южное". – С. 146 – 157.
2. *Ястржембский А.С.* Техническая термодинамика / *А.С. Ястржембський.* – М.-Л. : Госэнергоиздат, 1960. – 495 с.

Государственное предприятие
«Конструкторское бюро «Южное»,
Днепропетровск

Получено 02.07.09,
в окончательном варианте 15.02.10