УДК 621. 192:519.2

Е.С. ПЕРЕВЕРЗЕВ

# ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МОДЕЛИ ДОЛГОВЕЧНОСТИ НА ОСНОВЕ ТЕРМОФЛУКТУАЦИОННОЙ ТЕОРИИ ПРОЧНОСТИ

На основе синтеза уравнений гибели и рождения и термофлуктуационной теории прочности получены выражения для определения среднего времени до разрушения, которые используются для оценки вероятностных показателей долговечности элементов конструкций при статическом нагружении.

На основі синтезу рівнянь загибелі й народження та термофлуктуаційної теорії міцності отримані вирази для визначення середнього часу до руйнування, які використовуються для оцінки ймовірнісних показників довговічності елементів конструкцій при статичному навантаженні.

Based on the synthesis of the birth-death equations and the thermofluctuation strength theory, expressions for an average time to failure which are used for estimation of life probability factors of structural elements under static loading are derived.

Результаты многочисленных исследований показывают, что при длительном нагружении разрушение представляет собой случайный процесс накопления повреждений, а время до разрушения – случайную величину. Это обусловлено, прежде всего, неоднородной структурой материала и случайным характером дефектов. Поэтому для наиболее объективного описания процесса накопления повреждений следует использовать аппарат теории случайных процессов вместе с физическими представлениями об элементарных актах разрушения. Разработать такие модели, которые бы адекватно описывали реальный процесс накопления повреждений, на современном этапе пока еще не удается. Но, используя общие физические закономерности об элементарных актах разрушения, можно обосновать вид кривых долговечности в зависимости от величины действующей нагрузки, которые позволяют проводить анализ долговечности при небольшом объеме экспериментальных данных.

Процесс накопления повреждений можно представить в виде последовательного разрушения некоторых структурных элементов, на которые условно разбивается объем, ответственный за разрушение. При таком представлении для математического описания процесса разрушения независимо от конкретных механизмов разрушения отдельных элементов можно использовать уравнения гибели и рождения

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \lambda_1(t)(n-1)P_{n-1}(t) - (\lambda_1(t)+\mu_1(t))\,nP_n(t) +$$

$$+\mu_1(t)(n+1)P_{n+1}(t), \quad n=\overline{0,n_0}\,, \tag{1}$$

где $P_n(t)$ – вероятность того, что в момент времени $t$ число неразрушенных элементов равно $n$; $\lambda_1(t)$, $\mu_1(t)$ – интенсивности разрушения и восстановления элементов; $n_0$ – число неразрушенных элементов в момент приложения нагрузки.

Если известны зависимости интенсивностей $\lambda_1(t)$ и $\mu_1(t)$ от величины нагрузки, конструкционных свойств материалов и характера их изменения во времени, можно найти многие вероятностные характеристики долговечности.

Математическое ожидание числа неразрушенных элементов в момент времени $t$ в частном случае, когда $\lambda_1(t)=\lambda_1$, $\mu_1(t)=\mu_1$, вычисляется по формуле

$$\langle n(t)\rangle = \langle n_0\rangle \exp\left[(\mu_1 - \lambda_1)t\right], \qquad (2)$$

где $\langle n_0\rangle$ – математическое ожидание числа неразрушенных элементов в момент $t_0$.

Прологарифмировав выражение (2), получим выражение для определения времени, когда математическое ожидание числа неразрушенных элементов равно $\langle n\rangle$

$$t = \frac{1}{\lambda_1 - \mu_1} \ln \frac{\langle n_0\rangle}{\langle n\rangle}. \qquad (3)$$

Считая, что разрушение наступает в момент, когда математическое ожидание числа разрушенных элементов равно $\langle n^*\rangle$, получаем выражение для определения математического ожидания времени до разрушения

$$\langle t\rangle = \frac{1}{\lambda_1 - \mu_1} \ln \frac{\langle n_0\rangle}{\langle n_0\rangle - \langle n^*\rangle}. \qquad (4)$$

Если не учитывать восстановления разрушенных элементов и положить $\mu_1 = 0$, то

$$\langle t\rangle = \frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{\langle n_0\rangle}{\langle n_0\rangle - \langle n^*\rangle}. \qquad (5)$$

Величина $\langle t_1\rangle = \dfrac{1}{\langle \lambda_1\rangle}$ представляет собой математическое ожидание времени до разрушения одного элемента.

Приведенные соотношения получены на основе марковских процессов гибели и рождения. Однако для вывода соотношения (5) не обязательно, чтобы процесс разрушения адекватно описывался марковским процессом. Это соотношение можно получить и для произвольного случайного процесса гибели и рождения, описываемого уравнением

$$\frac{dn}{dt} = -\lambda_1(t)n(t) + \left[n_0 - n(t)\right]\mu_1(t). \qquad (6)$$

Последнее уравнение применяется в химической кинетике. Заметим, что для вывода соотношения типа (5) можно использовать теорию надежности, в соответствии с которой вероятность безотказной работы элемента выражается через интенсивность отказов $\lambda_1(t)$ следующим образом

$$P_1(t) = \exp\left[-\int_0^t \lambda_1(\tau)d\tau\right]. \qquad (7)$$

Соответственно

$$\langle n(t)\rangle = \langle n_0\rangle \exp\left[-\int_0^t \lambda_1(\tau)d\tau\right]. \qquad (8)$$

Однако при разбиении объема твердого тела, ответственного за разрушение, на произвольные элементы практическое применение приведенных соотношений затруднено из-за невозможности найти интенсивности $\lambda_1(t)$ и $\mu_1(t)$ для составляющих элементов.

Если в разрушении твердого тела определяющую роль играют термофлуктуационные процессы, то в качестве структурных элементов, на которые условно разбивается объем материала, ответственного за разрушение, целесообразно рассматривать межатомные или другие межчастичные связи. В дальнейшем под межчастичными связями будем понимать межатомные связи.

Для определения интенсивностей $\lambda_1(t)$ и $\mu_1(t)$ будем полагать, что распределение внутренней энергии подчиняется статистике Больцмана. Можно показать, что в этом случае для $i$-го атома вероятность $P_i$ преодолеть потенциальный барьер $u_i$ в течение периода колебаний находится так:

$$P_i^- = \exp\left(-\frac{u_i}{kT}\right), \qquad i = \overline{1, n_0}, \tag{9}$$

где $u_i$ – энергия межатомной связи; $k$ – постоянная Больцмана; $T$ – абсолютная температура; $n_0$ – число неразорванных связей в момент приложения нагрузки.

Если к образцу приложена нагрузка, создающая постоянное растягивающее напряжение $\sigma_0$, то эта вероятность

$$P_i^- = \exp\left[-\frac{u_i - \varphi_i(\sigma_0)}{kT}\right], \tag{10}$$

где $\varphi(\ldots)$ – функция, определяемая кривой изменения потенциальной энергии атома от величины напряжения.

Положим, что вероятность восстановления разорванных связей в течение одного периода

$$P_i^+ = \exp\left[-\frac{u_i + \varphi_i(\sigma_0)}{kT}\right]. \tag{11}$$

Учитывая, что период тепловых колебаний атомов – очень малая величина ($\tau_0 \approx 10^{-13}$ c), можно положить, что процесс разрыва межатомных связей происходит непрерывно. Тогда интенсивности $\lambda_i$ и $\mu_i$ для $i$-й межатомной связи могут быть вычислены по формулам:

$$\lambda_i = \frac{P_i^-}{\tau_{0i}} = \frac{1}{\tau_{0i}} \exp\left[-\frac{u_i - \varphi_i(\sigma_0)}{kT}\right], \tag{12}$$

$$\mu_i = \frac{P_i^+}{\tau_{0i}} = \frac{1}{\tau_{0i}} \exp\left[-\frac{u_i + \varphi_i(\sigma_0)}{kT}\right]. \tag{13}$$

Эти интенсивности для каждого атома будут изменяться в течение каждого периода за все время нагружения от момента приложения нагрузки до момента разрушения. Усреднив интенсивности по всему объему материала и за все время нагружения, запишем

$$\lambda_1 = \frac{1}{\tau_0} \exp\left[-\frac{u - \varphi(\sigma_0)}{kT}\right], \tag{14}$$

$$\mu_1 = \frac{1}{\tau_0} \exp\left[-\frac{u + \varphi(\sigma_0)}{kT}\right], \tag{15}$$

где $\tau_0$ – средний по всем атомам и за все время нагружения период колебаний атомов.

Из-за структурной неоднородности материала приложенная нагрузка неравномерно распределяется между отдельными связями. Введем понятие микронапряжения, под которым будем понимать напряжение, действующее на площадках, линейные размеры которых равны атомному радиусу.

Для количественного описания неравномерности распределения нагрузки между отдельными связями введем плотность распределения микронапряжений $f(\sigma)$. Действующее в элементе конструкции макронапряжение $\sigma_0$ в этом случае находится так:

$$\sigma_0 = \int_{\sigma} \sigma f(\sigma) d\sigma . \tag{16}$$

Для дальнейшей конкретизации выражений (14), (15) необходимо задаться видами функций $\varphi(\sigma)$ и $f(\sigma)$. Для $\varphi(\sigma)$ применим параболическую зависимость

$$\varphi(\sigma) = \gamma_1 \sigma + \gamma_2 \sigma^2 . \tag{17}$$

Для обоснования закона распределения $f(\sigma)$ используем принцип максимума энтропии, в соответствии с которым из всех возможных распределений выбирается то, у которого при заданных значениях моментов максимальная энтропия

$$H = -\int_{\sigma} \ln f(\sigma) f(\sigma) d\sigma . \tag{18}$$

С помощью функции $f(\sigma)$ количественно описывается неравномерность распределения микронапряжений по объему материала. Одной из количественных характеристик этой неравномерности является дисперсия микронапряжений $D$. Известно, что при заданной дисперсии максимальная энтропия – у нормального закона. Поэтому в соответствии с принципом максимума энтропии следует взять нормальный закон распределения микронапряжений.

Отметим, что экспериментальные исследования показывают, что распределения микронапряжений хорошо описываются этим законом.

Без учета восстановления разрушенных связей получим

$$\langle t\rangle = A\ln\frac{\sigma_*}{\sigma}\left(1-\frac{2\gamma_2\nu^2\sigma^2}{kT}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left[-\frac{\gamma_1\sigma+\gamma_2\sigma^2}{kT}-\frac{\nu^2\sigma^2(\gamma_1+2\gamma_2\sigma)^2}{2k^2T^2\left(1-\frac{2\gamma_2\nu^2\sigma^2}{kT}\right)}\right]. \quad (19)$$

где $A=\tau_0\exp\left(\frac{u}{kT}\right)$; $\nu=\frac{\sqrt{D}}{\sigma_0}$ – коэффициент вариации микронапряжений; $\sigma_*$ – напряжение, при котором происходит мгновенное разрушение.

Рассмотрим частные случаи. При линейной аппроксимации функции снижения начального потенциального барьера ($\gamma_2=0$) имеем

$$\langle t\rangle=\tau_0\ln\frac{\sigma_*}{\sigma}\exp\left[\frac{u-\gamma_1\sigma}{kT}-\frac{\gamma_1^2\nu^2\sigma^2}{2k^2T^2}\right]. \quad (20)$$

Для идеального материала, когда нагрузка равномерно распределяется между всеми связями, $\nu=0$, соответственно

$$\langle t\rangle=\tau_0\ln\frac{\sigma_*}{\sigma}\exp\left(\frac{u-\gamma_1\sigma}{kT}\right). \quad (21)$$

Из последней формулы следует, что коэффициент $\gamma_1$ представляет собой значение коэффициента линейного снижения начального потенциального барьера для идеального случая. По мнению многих исследователей, его значение можно приближенно принять равным атомному объему. Учитывая незначительное изменение $\ln\frac{\sigma_*}{\sigma}$ по сравнению с погрешностью в определении величины $\tau_0$, запишем

$$\langle t\rangle=\tau_0\exp\left(\frac{u-\gamma\sigma}{kT}\right), \quad (22)$$

Заметим, что в формуле (22) при аппроксимации опытных кривых по долговечности коэффициент $\gamma$ может на несколько порядков превышать коэффициент $\gamma_1$.

Теперь рассмотрим квадратичный закон изменения величины потенциального барьера. В этом случае при $\gamma_1=0$ без учета восстановления разрушенных связей

$$\langle t\rangle = A\ln\frac{\sigma_*}{\sigma}\left(1-\frac{2\gamma_2\nu^2\sigma^2}{kT}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left[-\frac{\gamma_2\sigma^2}{kT\left(1-\frac{2\gamma_2\nu^2\sigma^2}{kT}\right)}\right]. \quad (23)$$

Введем коэффициент $\beta=\frac{\gamma_2}{kT}$, тогда

$$\langle t\rangle = \tau_0 \ln\frac{\sigma_*}{\sigma}\left(1-2\beta\nu^2\sigma^2\right)^{1/2} \exp\left(\frac{u}{kT}\right)\exp\left(-\frac{\beta\sigma^2}{1-2\beta\nu^2\sigma^2}\right). \quad (24)$$

Анализ этого соотношения показывает, что при $2\beta\nu^2\sigma^2 = 1$ происходит мгновенное разрушение. Отсюда можно найти значение коэффициента вариации

$$\nu = \frac{1}{\sigma_*\sqrt{2\beta}}. \quad (25)$$

Подставив значение $\nu$ в выражение (24), получим

$$\langle t\rangle = \tau_0 \ln\frac{\sigma_*}{\sigma}\left(1-\frac{\sigma^2}{\sigma_*^2}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{u}{kT}\right)\exp\left(-\frac{\beta\sigma^2}{1-\frac{\sigma^2}{\sigma_*^2}}\right). \quad (26)$$

Проанализируем параметры, входящие в зависимость (26).

Иногда полагают

$$\tau_0 = \frac{h}{kT}, \quad (27)$$

где $h$ – постоянная Планка.

При $T = 300$ К величина $\tau_0$, вычисленная по формуле (27), составляет $1{,}3\cdot 10^{-13}$ с. Поэтому в большинстве случаев при нормальной температуре полагают $\tau_0 \approx 10^{-13}$ с. Параметр $u$ представляет собой энергию активации разрушения материала. Величину $u$ для металлических материалов полагают близкой к энергии сублимации, для стеклопластиков – к энергии термодеструкции.

Результаты расчетов для некоторых материалов показывают, что коэффициент $\nu$ может намного превышать единицу, что подтверждает вывод о том, что на прочность материалов существенно влияет его структурная неоднородность, одной из количественных характеристик которой является коэффициент вариации микронапряжений.

Приведенные зависимости являются приближенными, так как они получены при определенных допущениях. Одно из основных допущений состоит в том, что разрушение происходит за счет термофлуктуационных процессов. По-видимому, разрушение может носить и термический характер. Следующее допущение состоит в принятии нормального закона распределения микронапряжений. На наш взгляд, и при любом другом законе решающую роль будет играть параметр, характеризующий разброс микронапряжений. Лучше всего эти зависимости применять для сравнительной оценки долговечности различных материалов.

На основе анализа приведенных выше зависимостей предложена удобная для проведения инженерных расчетов следующая формула для определения среднего времени до разрушения элементов конструкций

$$t_0 = \tau_0 \exp\left[\frac{U}{RT}(1-\eta)\right], \tag{28}$$

где $R$ – универсальная газовая постоянная, $U$ – энергия активации разрушения для одного моля.

Параметр $\eta$ представляет собой отношение эксплуатационной нагрузки к несущей способности.

Как уже отмечалось, времена до отказов элементов конструкций являются случайными величинами. На практике для вероятностного описания этих величин наиболее часто используются распределение Вейбулла и логарифмически нормальное распределение.

Вероятности неразрушения $p(t)$ в течение времени $t$ для этих распределений находятся соответственно по формулам:

$$p(t) = \exp\left(-\lambda t^{\beta}\right), \tag{29}$$

$$p(t) = F\left(\frac{\mu - \ln t}{b}\right), \tag{30}$$

где $\lambda, \beta$ – параметры распределения Вейбулла; $\mu, b$ – параметры логарифмически нормального распределения; $F(...)$ – функция стандартного нормального распределения.

Параметры $\beta$ и $b$ зависят только от коэффициента вариации $\nu$ времени до разрушения, значение которого приближенно может быть установлено по результатам испытаний элементов-аналогов.

При известных значениях $\beta$ и $b$ параметры $\lambda$ и $\mu$ определяются по формулам:

$$\lambda = \left[\frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)}{t_0}\right]^{\beta}, \tag{31}$$

$$\mu = \ln t_0 - \frac{1}{2}b^2, \tag{32}$$

где $\Gamma(...)$ – гамма-функция; $t_0$ – среднее время до разрушения элемента конструкции.

Если $t_0$ вычислять по формуле (28), тогда

$$\lambda = \left\{\frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)}{\tau_0 \exp\left[\frac{U}{RT}(1-\eta)\right]}\right\}^{\beta}, \tag{33}$$

$$\mu = \ln\left[\tau_0 \exp\left(\frac{U}{RT}(1-\eta)\right)\right] - \frac{b^2}{2}. \quad (34)$$

Соответственно вероятности неразрушения находятся из выражений:

$$p(t) = \exp\left\{-\left[\frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)t}{\tau_0 \exp\left[\frac{U}{RT}(1-\eta)\right]}\right]^{\beta}\right\}, \quad (35)$$

$$p(t) = F\left\{\frac{\ln\left[\frac{\tau_0}{t}\exp\left(\frac{U}{RT}(1-\eta)\right)\right] - \frac{b^2}{2}}{b}\right\}. \quad (36)$$

При $\beta = 1$ распределение Вейбулла переходит в экспоненциальное и соответственно

$$p(t) = \exp\left\{-\frac{t}{\tau_0 \exp\left[\frac{U}{RT}(1-\eta)\right]}\right\}. \quad (37)$$

Время $t^*$, в течение которого вероятность неразрушения равна требуемому значению $p^*$, находится из выражений:

$$t^* = \left(-\frac{\ln p^*}{\lambda}\right)^{\frac{1}{\beta}}, \quad (38)$$

$$\ln t^* = \mu - u_{p*} b, \quad (39)$$

$$F(u_{p*}) = p^*. \quad (40)$$

С учетом приведенных выражений для $\lambda$ и $b$ получим:

$$t^* = \tau_0 \exp\left[\frac{U}{RT}(1-\eta)\right]\Gamma^{-1}\left(1+\frac{1}{\beta}\right)(-\ln p^*)^{\frac{1}{\beta}}, \quad (41)$$

$$t^* = \tau_0 \exp\left[\frac{U}{RT}(1-\eta) - \frac{b^2}{2} - u_{p*} b\right]. \quad (42)$$

При $\beta = 1$ выражение (41) принимает вид

$$t^* = \tau_0 \exp\left[\frac{U}{RT}(1-\eta)\right](-\ln p^*). \quad (43)$$

Приведенные выражения позволяют на этапе проектирования оценивать вероятностные показатели долговечности элементов конструкций при статическом нагружении.

Институт технической механики
НАН Украины и НКА Украины,
Днепропетровск

Получено 16.02.10,
в окончательном варианте 16.02.10