

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ И ЭНТРОПИЙНЫЕ МЕТОДЫ В МОДЕЛЯХ ДОЛГОВЕЧНОСТИ

Обсуждаются вопросы оценки долговечности элементов конструкций на основе анализа вероятностных моделей разрушения, термофлуктуационных моделей накопления повреждений и энтропийных методов исследования сложных систем.

Обговорюються питання оцінки довговічності елементів конструкцій на основі аналізу імовірнісних моделей руйнування, термофлуктуаційних моделей накопичення ушкоджень і ентропійних методів досліджень складних систем.

Problems of the estimation of structural elements durability based on the analysis of the probability models of the destruction, thermo fluctuation models of failure accumulation and entropy methods of investigations of complicated systems, are examined.

Ниже под долговечностью понимается время от момента приложения нагрузки к элементу конструкции до момента его разрушения. Из-за неоднородной структуры конструкционных материалов время до разрушения представляет собой случайную величину, а процесс накопления повреждений при длительном нагружении – случайный процесс. Поэтому при разработке моделей долговечности необходимо применять вероятностные методы. Для описания процесса накопления повреждений можно использовать уравнения гибели и рождения некоторых структурных элементов, на которые условно разбивается объем конструкционного материала, ответственный за разрушение. Основными параметрами случайного процесса гибели и рождения являются интенсивности разрушения и восстановления структурных элементов $\lambda_1(t)$ и $\mu_1(t)$. При произвольном разбиении конструктивных элементов на структурные элементы определить значения этих интенсивностей без проведения специальных испытаний не представляется возможным. Если же в соответствии с термофлуктуационной теорией прочности под структурными элементами понимать межатомные связи, выражения для интенсивностей $\lambda_1(t)$ и $\mu_1(t)$ можно определить на основе распределения Больцмана. В [1] приведены выражения для определения среднего времени до разрушения для различных аппроксимаций функции снижения начального потенциального барьера приложенным постоянным растягивающим напряжением. Для описания неравномерности нагружения отдельных межатомных связей вводится плотность распределения микронапряжений, вид которой устанавливается в соответствии с принципом максимума энтропии. Показано, что дисперсия микронапряжений может значительно превышать приложенное напряжение. Это свидетельствует о том, что структурная неоднородность материалов существенно снижает долговечность элементов конструкции. На основе анализа различных зависимостей, полученных на основе термофлуктуационной теории прочности, предложена удобная для проведения инженерных расчетов следующая формула для определения среднего времени до разрушения t_p элементов конструкций

$$t_p = \tau_0 \exp\left[\frac{U}{RT}(1 - \eta)\right], \quad (1)$$

где $\tau_0 = 10^{-13}$ сек – период тепловых колебаний атомов; R – универсальная постоянная, U – энергия активации разрушения для одного моля.

Параметр η представляет собой отношение эксплуатационной нагрузки к несущей способности.

Необходимое значение параметра η для обеспечения требуемой долговечности определяется так:

$$\eta = 1 - \frac{RT}{U} \ln \frac{t}{\tau_0}, \quad (2)$$

где t – суммарное время нагружения элемента конструкции за весь период эксплуатации.

Для определения вероятностных характеристик долговечности представим образец конструкционного материала, состоящий из n структурных элементов. Для получения последующих зависимостей, что собой представляет структурный элемент, особого значения не имеет. Для металлических материалов это могут быть зерна.

Если разрушение образца наступает при разрушении m элементов ($m \leq n$), функция распределения времени до разрушения всего образца $G(t)$ вычисляется по формуле

$$G(t) = C_n^m G_1(t)^m (1 - G_1(t))^{n-m}, \quad (3)$$

где C_n^m – число сочетаний из n по m ; $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$, $n! = n(n-1) \dots 1$;

$G_1(t)$ – функция распределения времени до разрушения одного элемента.

В простейшем случае полагается, что для разрушения всего образца достаточно разрушить один элемент. Тогда в случае n одинаковых независимых элементов функция распределения $G(t)$ долговечности всего образца определится

$$G(t) = 1 - [1 - G_1(t)]^n. \quad (4)$$

Выражение (4) представляет собой функцию распределения наименьшего значения из совокупности n одинаковых независимых случайных величин. Соответственно вероятность неразрушения $P(t) = 1 - G(t)$ находится

$$P(t) = P_1^n(t), \quad P_1(t) = 1 - G_1(t).$$

Математическое ожидание долговечности может быть найдено по формуле:

$$M = \int_0^{\infty} P_1^n(t) dt.$$

Из приведенных выражений следует, что чем больше элементов в образце, т.е. чем больше его размеры, тем меньше вероятность неразрушения и математическое ожидание долговечности образца, и что вид функции распределения долговечности структурных элементов оказывает влияние на характеристики долговечности образца.

Рассмотрим некоторые конкретные функции распределения долговечности структурных элементов. Для нормального распределения получим приближенную формулу

$$M = m_1 - \sigma_1 \sqrt{2 \ln n}, \quad (5)$$

где m_1 , σ_1 – математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение долговечности структурного элемента.

Из этого выражения следуют выводы: с увеличением числа элементов долговечность образца уменьшается, и для идеального материала, для которого $\sigma_1 = 0$, долговечность образца равна долговечности структурного элемента.

Экспериментальные данные показывают, что часто распределение долговечности элементов конструкций описывается законом Вейбулла.

Для распределения Вейбулла

$$G(t) = 1 - \exp[-\lambda t^\beta],$$

где λ , β – параметры распределения.

Для приближенной оценки влияния масштабного фактора на долговечность образца положим, что долговечность структурного элемента также описывается распределением Вейбулла с тем же параметром β .

Соответственно вероятность неразрушения элемента $P_1(t) = \exp(-\lambda_1 t^\beta)$. Вероятность неразрушения всего образца определяется так: $P(t) = \exp(-n\lambda_1 t^\beta) = \exp(-\lambda t^\beta)$, где $\lambda = n\lambda_1$.

Отношение математического ожидания долговечности образца к математическому ожиданию долговечности структурного элемента в этом случае находится так:

$$M/m_1 = (1/n)^{1/\beta}. \quad (6)$$

Параметр β можно найти, предварительно вычислив значение коэффициента вариации v . Заметим, что при $v \rightarrow 0$ параметр $\beta \rightarrow \infty$ и соответственно $1/\beta \rightarrow 0$, а $M \rightarrow m_1$. Случай же $v = 0$ соответствует идеальной схеме, когда образец состоит из однородных элементов.

Выражение (6) можно записать в таком виде:

$$M = m_1 \left(\frac{1}{n} \right)^v.$$

Нами были рассмотрены приближенные соотношения для простейшей схемы, когда образец представляется в виде цепочки из n независимых элементов. В случае зависимых элементов получить такие простые соотношения в общем случае не всегда возможно. С математической точки зрения здесь возникает проблема описания многомерных распределений с заданными одномерными распределениями. Из многомерных распределений к настоящему времени лучше всего изучено гауссовское. Поэтому для качественной оценки влияния зависимости составляющих элементов на характеристики долговечности образца приведем некоторые соотношения для случая, когда долговечности отдельных структурных элементов описывается нормальным законом.

Рассмотрим частный случай зависимых элементов, когда долговечности всех элементов описываются нормальным законом и все они попарно имеют один и тот же коэффициент корреляции $r > 0$.

В этом случае при большом n имеем

$$M = m_1 r + (1-r) \left[m_1 - \sigma_1 \sqrt{2 \ln n} \right].$$

При $r = 0$ последнее выражение переходит в (5).

Анализ этой формулы показывает, что с увеличением r математическое ожидание долговечности образца увеличивается. При $r = 1$ имеем $M = m_1$. Случай $r = 1$ эквивалентен случаю, когда долговечности всех элементов одинаковы.

Аналогичный результат можно получить для произвольных многомерных распределений с зависимыми элементами. В [2] предложено следующее выражение для произвольных многомерных функций распределения $G_n(x)$ при положительных коэффициентах корреляции $r_{ij} > 0$

$$G_n(x) = \mu G_1(x) + (1-\mu) G_1^n(x),$$

где $G_1(x)$ – одномерная функция распределения.

Параметр μ учитывает степень зависимости между элементами и изменяется от нуля до единицы. Для многомерного нормального вектора

$$\mu = \frac{2}{\pi N} \sum_{i \neq j}^n \arcsin r_{ij},$$

где $N = \frac{n(n-1)}{2}$.

При жесткой зависимости между элементами $\mu = 1$. Можно показать, что в этом случае $M = m_1$.

Приведенные соотношения показывают, что положительная корреляция между элементами увеличивает долговечность образцов.

В работе [3] приведено выражение для функции распределения, для которой максимально математическое ожидание наибольшего значения при заданных математическом ожидании m_1 и дисперсии σ_1^2 исходного распределения.

Вероятность неразрушения образца в этом случае находится так:

$$P(t) = \left[\frac{n-1}{n} \frac{m_1 - t}{\sigma_1 \sqrt{2n-1}} + \frac{1}{n} \right]^{n/n-1}.$$

Математическое ожидание долговечности образца M выражается через математическое ожидание m_1 и среднее квадратическое отклонение σ_1 элемента следующим образом:

$$M = m_1 - \frac{\sigma_1(n-1)}{\sqrt{2n-1}}.$$

При больших n можно положить

$$M = m_1 - \sigma_1 \sqrt{\frac{n}{2}}.$$

Из последней формулы следует, что $M \rightarrow m_1$ при $\sigma_1 \rightarrow 0$. Таким образом, резервы повышения долговечности состоят, с одной стороны, в увеличении долговечности составляющих элементов, а с другой – в повышении степени однородности материала. В частности, если все составляющие элементов имеют одинаковую долговечность: $\sigma_1 = 0$ и $M = m_1$.

В настоящее время при решении различных прикладных задач, в том числе и для описания процессов разрушения, широко используются энтропийные методы [4–16]. При этом применяется как термодинамическая энтропия S , так и информационная H . Моменту разрушения любого элемента конструкции предшествуют необратимые изменения. Известно, что из термодинамических параметров приращение энтропии лучше всего описывает необратимые процессы. В общем случае приращение энтропии dS можно представить в виде суммы двух слагаемых:

$$dS = dS_e + dS_i,$$

где dS_e – изменение энтропии, обусловленное обменом с окружающей средой; dS_i – приращение энтропии, вызванное необратимыми изменениями внутри системы.

В соответствии с законами термодинамики dS_e может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Приращение же dS_i в соответствии со вторым законом термодинамики может быть только положительным. Для изолированной системы $dS_e = 0$, и в такой системе энтропия может только возрасть. Величину $\Theta = \frac{dS_i}{dt}$ называют производством энтропии. Эта величина характеризует удельную скорость накопления необратимых изменений в единице объема и для необратимых процессов является основным параметром.

Предложено соотношение между интенсивностью отказов и производством энтропии

$$\lambda(t) = \frac{\langle \Theta(t) \rangle}{\langle S \rangle},$$

где $\langle \Theta(t) \rangle$ – математическое ожидание производства энтропии; $\langle S \rangle$ – математическое ожидание приращения энтропии, при котором происходит разрушение.

Энтропийный критерий эквивалентности различных режимов нагружения записывается так:

$$\int_0^{t_1} \Theta(t, \varepsilon_1) dt = \int_0^{t_2} \Theta(t, \varepsilon_2) dt,$$

где $\Theta(t, \varepsilon_1)$, $\Theta(t, \varepsilon_2)$ – производство энтропии соответственно в режимах ε_1 и ε_2 .

Заметим, что для анализа процессов накопления повреждений и разрушения эффективно также применение информационной энтропии. Особенно важное значение информационная энтропия H приобретает при учете самоорганизационных процессов.

В равновесном состоянии систем соблюдается принцип максимума энтропии. Исходя из этого принципа, можно обосновать вид закона распределения изучаемых случайных величин. Например, если известны только конечные пределы изменения случайной величины, то максимальная энтропия у равномерного распределения. При заданном математическом ожидании максимальная энтропия у экспоненциального распределения, при заданной дисперсии максимальная энтропия у нормального распределения. Вот почему, исходя из принципа максимума энтропии, распределение микронапряжений описывается нормальным законом.

В большинстве случаев основные свойства энтропии исследуются для независимых систем. Исследуем, как влияет на изменение энтропии зависимость элементов системы. Рассмотрим систему, состояние которой описывается многомерным нормальным вектором X . Информационная энтропия в этом случае вычисляется по формуле [17]

$$H = \log \left[(2\pi e)^n |K| \right]^{1/2},$$

где n – мерность вектора; $|K|$ – определитель корреляционной матрицы.

Для удобства рассмотрим систему, у которой все компоненты имеют одинаковые дисперсии σ^2 , тогда

$$|K| = \sigma^{2n} \Delta,$$

где Δ – определитель нормированной корреляционной матрицы.

При таком представлении

$$H = \log \left[(2\pi e)^n \sigma^{2n} \Delta \right]^{1/2}.$$

Исследуем влияние коэффициентов корреляции на величину H при $r_{iK} \geq 0$. С уменьшением значений коэффициентов корреляции энтропия увеличивается и при $r_{iK} = 0$ достигает максимального значения H_{\max} . При $r_{iK} = 0$ определитель $\Delta = 1$ и соответственно

$$H_{\max} = \log \left[2\pi e \sigma^2 \right]^{n/2}.$$

С увеличением значений коэффициентов корреляции энтропия H уменьшается.

Представляет интерес определить значения коэффициентов корреляции, при которых энтропия достигает нулевого значения. Значение определителя Δ в этом случае вычисляется из равенства

$$(2\pi e)^{n/2} \Delta^{1/2} \sigma^n = 1.$$

Анализ приведенных выражений показывает, что при заданных значениях коэффициентов корреляции с увеличением n определитель Δ_n уменьшается и соответственно энтропия H_n увеличивается.

Показано, что для систем с зависимыми элементами повышение сложности системы приводит к уменьшению энтропии. Из изложенного следует, что для уменьшения информационной энтропии реальных систем необходимо находить конструктивные методы увеличения зависимости

между составляющими элементами, а для систем с зависимыми элементами – методы повышения их сложности за счет увеличения числа элементов (для конструкционных материалов создавать более мелкозернистую структуру). Эти выводы соответствуют общим принципам синергетики [7]: для возникновения самоорганизационных процессов система должна состоять из большого числа взаимодействующих элементов.

На основе изложенных подходов в Институте технической механики НАНУ и НКАУ проводятся экспериментальные исследования по обработке конструкционных материалов различными энергетическими полями с целью возбуждения в них самоорганизационных процессов, которые приводят, на наш взгляд, к уменьшению информационной энтропии и улучшению некоторых физико-механических характеристик. Исследованы способы повышения показателей долговечности конструкционных материалов за счет возбуждения в них самоорганизационных процессов при комбинированном энергетическом нагружении путем воздействия полями различной природы (электромагнитными, ультразвуковыми, магнитными, тепловыми и силовыми). Выбраны режимы нагружения, которые существенно повышают их долговечность. На образцах из алюминий-магниевого сплава АМг6М достигнуто увеличение среднего времени до разрушения в условиях ползучести более чем в 30 раз.

- 1 *Переверзев Е. С.* Модели накопления повреждений в задачах долговечности / *Е. С. Переверзев.* – Киев : Наук. думка, 1995. – 358 с.
- 2 *Переверзев Е. С.* Вероятностные распределения и их применение / *Е. С. Переверзев, Ю.Ф. Даниев.* – Днепропетровск, Институт технической механики НАН Украины и НКА Украины, 2004. – 418 с.
- 3 *Гумбель Э.* Статистика экстремальных значений / *Э. Гумбель* – М. : Мир, 1965. – 452 с.
- 4 *Вильсон А. Дж.* Энтропийные методы моделирования сложных систем / *А. Дж. Вильсон.* – М. : Наука, 1978. – 246 с.
- 5 *Завальнюк П. А.* Термодинамическая концепция управления качеством / *П. А. Завальнюк* – Тверь : Изд-во Твер. у-та, 1992. – 149 с.
- 6 *Воробьев В. Л.* Термодинамические основы диагностики и надежности микроэлектронных устройств / *В. Л. Воробьев.* – М. : Наука, 1989. – 160 с.
- 7 *Хакен Г.* Синергетика: Иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах : Пер. с англ. / *Г. Хакен.* – М. : Мир, 1985. – 423 с.
- 8 *Дьярмати И.* Неравновесная термодинамика : Теория поля и вариационные принципы / *И. Дьярмати.* – М. : Мир, 1974. – 304 с.
- 9 *Митюгов В. В.* Физические основы теории информации / *В. В. Митюгов.* – М. : Сов. радио, 1976. – 216 с.
- 10 *Коган И. М.* Прикладная теория информации / *И. М. Коган.* – М. : Радио и связь, 1981. – 216 с.
- 11 *Шамбадаль П.* Развитие и приложения понятия энтропии / *П. Шамбадаль.* – М. : Наука, 1967. – 278 с.
- 12 *Поплавский Р. П.* Термодинамика информационных процессов / *Р. П. Поплавский.* – М. : Наука, 1981. – 255 с.
- 13 *Николис Дж.* Динамика иерархических систем: Эволюционное представление: Пер. с англ. / *Дж. Николис.* – М. : Мир, 1989. – 488 с.
- 14 *Николис Г.* Познание сложного. Введение: Пер. с англ. / *Г. Николис, И. Пригожин.* – М. : Мир, 1990. – 344 с.
- 15 *Базаров И. П.* Термодинамика : Учебник. – 3-е изд., перераб. и доп. / *И. П. Базаров.* – М. : Высш. шк., 1983. – 344 с.
- 16 *Циглер Г.* Экстремальные принципы термодинамики необратимых процессов и механика сплошных сред / *Г. Циглер.* – М. : Мир, 1966. – 133 с.
- 17 *Пугачев В. С.* Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления / *В. С. Пугачев.* – Физматгиз, 1960. – 883 с.

Институт технической механики
НАН Украины и НКА Украины,
Днепропетровск

Получено 26.08.10,
в окончательном варианте 26.08.10