

КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНЫЙ АНАЛИЗ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ОТСЕКОВ РАКЕТНЫХ КОНСТРУКЦИЙ С ВЫРЕЗАМИ

Проведено численное исследование упругопластического напряженно-деформированного состояния оболочечных отсеков ракетных конструкций с вырезами прямоугольной и круглой формы различных размеров. Используются вариационные методы теории пластичности, методы упругих решений (переменных параметров упругости), проекционно-итерационные схемы реализации метода конечных элементов. На основе построения зон пластических деформаций исследовано взаимовлияние вырезов.

Проведено чисельне дослідження пружно-пластичного напружено-деформівного стану оболочкових відсіків ракетних конструкцій з вирізами прямокутної і круглої форми різних розмірів. Використано варіаційні методи теорії пластичності, методи пружних розв'язків (змінних параметрів пружності), проекційно-ітераційні схеми реалізації методу скінченних елементів. На основі побудови зон пластичних деформацій досліджено взаємодія вирізів.

A numerical study of elasticoplastic stress-strained state of the shell sections rocket structures with cuts rectangular and circular shapes of various sizes is developed. Variational methods in plasticity theory, methods of elastic solutions (variable parameters of elasticity), the projection-iterative schemes for the implementation of the finite element method are used. On the basis of the construction zone of plastic deformation the cuts interference was investigated.

Введение. Оболочечные конструкции оптимальным образом сочетают необходимую прочность и жесткость с минимальным весом и являются основными элементами конструкций ракетно-космической техники. Для «сухих» оболочечных отсеков этих конструкций характерно наличие вырезов-люков, предназначенных для выполнения определенных конструктивно-технологических задач. Отметим, что в различных случаях эксплуатации в результате повреждения вследствие определенных локальных воздействий в оболочечных конструкциях также могут появляться отверстия.

Указанные нарушения сплошности, вызывающие существенную неоднородность конструкций, приводят к концентрации напряжений при нагружении, что может вызвать разрушение или появление недопустимых деформаций [1 – 3].

При высоких уровнях нагрузок возникают пластические деформации. Реальные запасы прочности и ресурс конструкций могут быть определены только при учете пластических свойств материала.

Модели упругопластического расчета основаны на построении схем последовательных приближений, для каждого из которых решается задача неоднородной теории упругости (методы упругих решений) [4 – 6]. Расчеты при этом проводятся до заданного совпадения двух соседних приближений. К методам упругих решений относятся методы дополнительных нагрузок, переменных параметров упругости, дополнительных деформаций.

Наличие указанных нарушений сплошности при учете пластичности приводит к сложным задачам прочности. Наиболее распространенным и эффективным численным методом решения разнообразных задач прочности и устойчивости конструкций является метод конечных элементов (МКЭ) [7]. Наличие лицензионных программ (обычно весьма дорогостоящих) позволяет исследовать разнообразные статические и динамические задачи прочности оболочечных отсеков ракетно-космических конструкций. Можно отметить, что стоимость соответствующих лицензионных программ пропорциональна сложности задач. А задачи прочности оболочек с отверстиями (вырезы, люки) различной

формы при учете физической нелинейности материала относятся к достаточно сложным задачам. Необходимо отметить особенности лицензионных программ, существенно ограничивающие их эффективность. По сути дела, они являются «черным ящиком»: определены начальные и конечные этапы расчета, отсутствует возможность прослеживания промежуточных этапов и, при необходимости, их корректировки. Это ограничивает их использование для сложных задач, когда на промежуточных этапах процесса расчета необходимо скорректировать методы, процедуры расчета, что связано с анализом полученных на этих этапах результатов.

В связи с этим актуальной является разработка конечноэлементных моделей численного анализа при использовании схем, существенно уменьшающих время компьютерного расчета. К ним относятся разработанные проекционно-итерационные схемы реализации МКЭ [8 – 12].

В ряде работ проекционно-итерационные схемы реализации МКЭ применены к краевым задачам теории упругости, задачам о напряженно-деформированном состоянии (НДС) пластин с одним или двумя отверстиями при упругом и упругопластическом деформировании материала, где, в частности, исследовано их взаимовлияние [11, 13 – 15], задачам об исследовании влияния формы конечных элементов на эффективность схем [16], задачам о деформировании структурированных сред (имеющих локальные концентраторы: поры, трещины, включения) [17, 18]. В [19] проекционно-итерационные схемы МКЭ применены для определения НДС упругой цилиндрической оболочки с одним прямоугольным вырезом. Применение указанных схем МКЭ приводит к экономии времени расчета в десятки раз по сравнению с традиционным МКЭ.

Постановка задачи. Методы решения. Распространенным для многих оболочечных отсеков ракетных конструкций является наличие двух или нескольких вырезов. Рассматривается цилиндрическая оболочка, имеющая два выреза различной формы, при осевом сжатии. В статье исследовано упругопластическое НДС оболочки, имеющей прямоугольное и круглое отверстия (рис. 1 а). Области пластических деформаций возникают вначале локально, возле краев вырезов. При увеличении нагрузки или при уменьшении расстояния между отверстиями области смыкаются, образуя общие зоны пластических деформаций, что существенно уменьшает способность конструкции сопротивляться возрастающим нагрузкам, увеличивая риск разрушения, и должно быть оценено.

В настоящей статье разработанные в [11 – 20] алгоритмы численного моделирования пластинчато-оболочечных элементов конструкций на основе проекционно-итерационных схем реализации МКЭ применены к исследованию НДС оболочечных отсеков ракетно-космической техники. Это дает возможность исследовать взаимовлияние двух (или большего числа) рядом расположенных вырезов (отверстий) различной формы и тем самым более точно моделировать процесс упругопластического деформирования оболочечных отсеков ракетных конструкций и оценить реальные запасы прочности.

Исследуется взаимовлияние двух рядом расположенных отверстий в цилиндрической оболочке при осевом сжатии на основе разработанных алгоритмов с применением проекционно-итерационных схем конечноэлементного анализа. Используется разработанный алгоритм численного моделирования процесса деформирования пластинчато-оболочечных элементов конструкций с учетом пластических деформаций, возникающих при высоких уровнях нагрузки. При применении методов упругих решений на каждом этапе последовательных приближений это дает возможность исследовать взаимовлияние

двух (или большего числа) рядом расположенных отверстий и существенно сократить время численной реализации на компьютере.

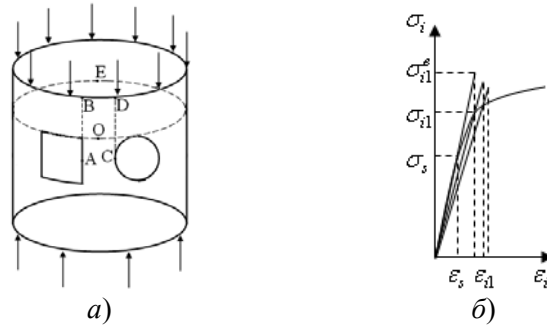


Рис. 1.

Нами использован метод переменных параметров упругости [5, 6]. Схема использования этого метода отражена на рис. 1 б, где изображена типичная диаграмма упрочняющегося материала (типа АМГ6, Д16). В каждом приближении решается неоднородная задача теории упругости с переменным модулем упругости \tilde{E} , сдвига \tilde{G} и коэффициентом Пуассона $\tilde{\nu}$. Используя соотношения деформационной теории, получим следующие соотношения

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\tilde{G}} \left(\sigma_{ij} - \frac{3\tilde{\nu}}{1+\tilde{\nu}} \delta_{ij} \sigma \right), \quad (1)$$

где $\tilde{G} = \frac{\tilde{E}}{2(1+\tilde{\nu})} = \frac{1}{2\psi}$; $\tilde{E} = \frac{3E}{2E\psi + 1 - 2\nu}$; $\tilde{\nu} = \frac{E\psi - 1 + 2\nu}{2E\psi + 1 - 2\nu}$; $\psi = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}$; σ_{ij} – напряжения; ε_{ij} – деформации; σ_i , ε_i – интенсивности напряжений и деформаций соответственно; δ_{ij} – символ Кронекера; σ – среднее напряжение.

В первом приближении, решая задачу теории упругости с $\tilde{E}_1 = E$ и $\tilde{\nu}_1 = \nu$, определим σ_{i1}^e , σ_{i1} и $\psi_1 = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_{i1}}{\sigma_{i1}}$. Во втором приближении для E вводится поправка $\tilde{E} = \frac{\sigma_{i1}}{\varepsilon_{i1}}$ и решается задача теории упругости при \tilde{E}_2 и $\tilde{\nu}_2$ и т.д. Решение определяется до заданного совпадения двух соседних n -го и $(n-1)$ -го приближений при условии, что точки, характеризующие σ_{in} и ε_{in} , будут близки к диаграмме $\sigma_i - \varepsilon_i$ (в практических задачах ставится условие: $\tilde{E}_n \approx \tilde{E}_{(n-1)}$).

Укажем, что применение деформационной теории оправдано для условий нагружения, близкого к простому, при сравнительно медленно меняющихся нагрузках. В сечениях, близких к угловым точкам, применимость этой теории должна быть исследована особо [4, 15]. В [5] исследованы соотношения метода переменных параметров упругости для теории течения.

Для каждого приближения используется проекционно-итерационный вариант МКЭ. К основным работам, где изложены идеи такого подхода, относятся [8 – 12]. Кратко основная его идея такова. Задача нахождения минимума функционала, определяющего потенциальную энергию (он будет приведен

ниже), которая дает возможность найти компоненты НДС, является задачей условной минимизации

$$I[z] \rightarrow \inf, \quad z \in Z, \quad (2)$$

где $I[z]$ – некоторый функционал, ограниченный снизу на множестве кинематически возможных перемещений Z вещественного гильбертова пространства $H = W_2^{(1)}(\Omega)$.

Экстремальная задача (2) с помощью МКЭ аппроксимируется последовательностью экстремальных задач ($n=1, 2, \dots$) для функции многих переменных. Каждая из таких задач решается с помощью метода верхней релаксации не до конца, а таким образом. Начиная с некоторого достаточно грубого разбиения для соответствующей функции многих переменных, строится лишь несколько (K_n) приближений к точке ее минимума. Последнее приближение затем интерполируется на более мелкую конечноэлементную сетку и служит на ней начальным приближением к точке минимума для соответствующего функционала многих переменных. Процесс продолжается до тех пор, пока не будет достигнута заданная точность.

Область Ω разбивается на прямоугольные конечные элементы. Отметим, что сравнение эффективности применения прямоугольных и треугольных элементов (соответственно билинейная и линейная аппроксимации) проведено в [16], где показано, что треугольные элементы более эффективны с точки зрения точности, но требуют большего времени счета. Оптимально сочетание этих форм элементов.

Используется методика, в соответствии с которой не требуется хранения матрицы жесткости системы в явном виде, а значения перемещений в текущем узле выражаются через перемещения в узлах четырех прилегающих к этому узлу элементов. При проведении расчетов целесообразно использование адаптивных сеток [20].

В статье исследовано НДС оболочечных отсеков конструкций с вырезами. Принято, что уровень нагрузок и параметры конструкций таковы, что потери устойчивости оболочек не происходит. Задачи устойчивости можно исследовать на основе известных подходов, изложенных во многих работах [6, 21, 22 и др.]. Отметим значительное поддерживающее влияние соседних отсеков (“сухие” отсеки, содержащие вырезы, являются составными элементами протяженных оболочечных конструкций ракетной техники).

Основные соотношения для определения НДС оболочечных отсеков.

Для решения задачи теории упругости на каждом этапе последовательных приближений в методе переменных параметров упругости используется функционал потенциальной энергии. Используем геометрически линейную теорию тонких оболочек [23, 24]. Указанный функционал запишется в виде

$$U = \frac{\tilde{G}h}{1-\tilde{\nu}} \iint_{\Omega} \left(\varepsilon_{\alpha}^2 + 2\nu\varepsilon_{\alpha}\varepsilon_{\beta} + \varepsilon_{\beta}^2 + 2(1-\tilde{\nu}) \left(\frac{\omega}{2} \right)^2 \right) Rd\alpha d\beta + \frac{\tilde{G}h^3}{12(1-\tilde{\nu})} \iint_{\Omega} \left(\chi_{\alpha}^2 + 2\nu\chi_{\alpha}\chi_{\beta} + \chi_{\beta}^2 + 2(1-\tilde{\nu})\tau^2 \right) Rd\alpha d\beta, \quad (3)$$

где ε_α , ε_β , ω – относительные удлинения и сдвиг волокон срединной поверхности, связанных с координатами α , β ; χ_α , χ_β , τ – параметры изменения кручения элемента срединной поверхности; R – радиус цилиндрической оболочки; h – толщина оболочки; Ω – поверхность оболочки; \tilde{G} , $\tilde{\nu}$ – переменные модуль сдвига и коэффициент Пуассона в каждом приближении метода переменных параметров упругости (см. (1)), которые рассматриваются как известные функции координат и определяются из предыдущего приближения. Как было отмечено, в первом приближении $\tilde{G} = G$, $\tilde{\nu} = \nu$.

Деформации срединной поверхности цилиндрической оболочки определяются по формулам:

$$\begin{aligned}\varepsilon_\alpha &= \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \quad \varepsilon_\beta = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \beta} + w \right), \quad \omega = \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha}, \\ \chi_\alpha &= -\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}, \quad \chi_\beta = -\frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} - \frac{\partial v}{\partial \beta} \right), \\ \tau &= -\frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \alpha},\end{aligned}\tag{4}$$

где u , v , w – перемещения точек срединной поверхности в направлении координат α , β , z .

Напряжения в срединной поверхности оболочки задаются соотношениями:

$$\sigma_\alpha = \frac{2\tilde{G}}{1-\tilde{\nu}} (\varepsilon_\alpha + \tilde{\nu}\varepsilon_\beta), \quad \sigma_\beta = \frac{2\tilde{G}}{1-\tilde{\nu}} (\varepsilon_\beta + \tilde{\nu}\varepsilon_\alpha), \quad \sigma_{\alpha\beta} = \tilde{G}\omega.\tag{5}$$

Функционал U с использованием (4) запишем в виде

$$\begin{aligned}U &= \frac{\tilde{G}h}{1-\tilde{\nu}} \iint_{\Omega} \left(R \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} \right)^2 + 2\tilde{\nu} \frac{\partial u}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial v}{\partial \beta} + w \right) + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \beta} + w \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} R (1-\tilde{\nu}) \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right)^2 \right) d\alpha d\beta + \\ &\quad + \frac{\tilde{G}h^3}{12(1-\tilde{\nu})} \iint_{\Omega} \left(R \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \right)^2 + 2\tilde{\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} - \frac{\partial v}{\partial \beta} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{R^3} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} - \frac{\partial v}{\partial \beta} \right)^2 + 2 \frac{1}{R} (1-\tilde{\nu}) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right)^2 \right) d\alpha d\beta - \\ &\quad - \int_{\Gamma_q} (T_1 u + S_1 v + Q_1 w + M_1 \varphi_1) d\beta,\end{aligned}\tag{6}$$

где T_1 , S_1 , Q_1 , M_1 – продольные, касательные, поперечные усилия и изгибающий момент, приложенные к краям оболочки.

Интенсивность деформаций определяется по формуле

$$\varepsilon_i = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1 - \tilde{\nu} + \tilde{\nu}^2}{(1 - \tilde{\nu})^2} (\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta)^2 - 3\varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta + \frac{3}{4} \omega^2}. \quad (7)$$

Результаты численного анализа. На основе разработанного алгоритма и программы расчёта на языке C++ проведены расчёты НДС цилиндрических оболочек с отверстиями. Расчеты проведены на ПК Turion 64×2 (2 GHz, 2×512 Kb L2 cache) с 2 Gb оперативной памяти. Проведено исследование цилиндрической оболочки длиной $L = 1,5$ м, радиусом $R = 1$ м из материала Д16Т с прямоугольным и круговым отверстиями (круговое отверстие с диаметром 0,4 м; квадратное отверстие с размерами 0,4×0,4 м). Сжимающие нагрузки q изменялись от 100 МПа до 160 МПа. Расстояния между центрами отверстий l : 0,6 м; 0,8 м. Отношение L и h выбрано таким, чтобы деформирование проходило за пределами упругости. Диаграмма $\sigma_i \sim \varepsilon_i$ для дюралюминия взята из [25], где принято значение предела текучести $\sigma_s = 200$ МПа (см. также [26]). Разработанная методика позволяет провести соответствующие расчеты для других диаграмм материала и параметров E , ν , σ_s . В качестве толщины для подкрепленных отсеков следует заложить приведенную толщину, определяемую известными способами через параметры подкреплений: стрингеров, шпангоутов и толщину оболочки.

Проекционно-итерационный вариант метода конечных элементов реализован на 8-ми вложенных вдвое конечноэлементных сетках (21×31, 41×61, 81×121, 161×241, 321×481, 641×961, 1281×1921, 2561×3841) из прямоугольных эрмитовых элементов. Количество k_n строящихся приближений на n -ом шаге ($n = 1, 2, \dots, 8$) проекционно-итерационного процесса выбиралось как наименьшее целое k , которое удовлетворяет неравенству

$$\|z_h^{(k)} - z_h^{(k-1)}\| \leq \varepsilon \quad (k = 0, 1, \dots, k_n), \quad (8)$$

где $z_h^{(k_n)}$ – приближенное решение n -ой конечномерной задачи; ε – заданная точность вычислений.

Исходя из нулевого начального приближения, задаваемого на самой грубой сетке (21×61), приближённое решение исходной задачи на основе проекционно-итерационного варианта МКЭ было получено за 29 мин 45 с, при использовании традиционного МКЭ решение получено за 19 час 38 мин. С точки зрения затрат времени расчета на ПК проекционно-итерационный вариант МКЭ оказался более чем в 40 раз эффективнее традиционного МКЭ.

На рис. 2 и рис. 3 приведены проекции на плоскость развертки оболочки с двумя отверстиями для $l = 0,6$ м (рис. 2 а при $q = 120$ МПа, рис. 2 б при $q = 160$ МПа) и для $l = 0,8$ м (рис. 3 а при $q = 120$ МПа, рис. 3 б при $q = 160$ МПа). Заштрихованными областями обозначены зоны остаточных пластических деформаций.

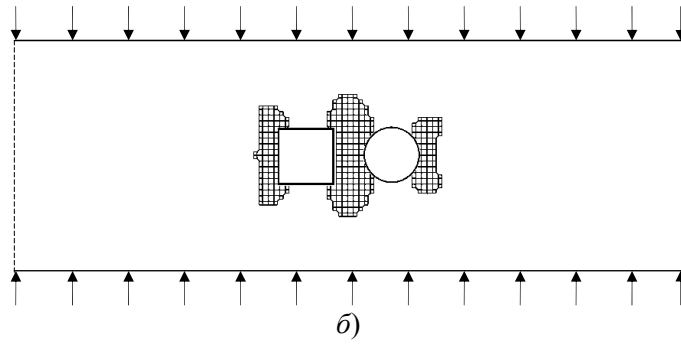
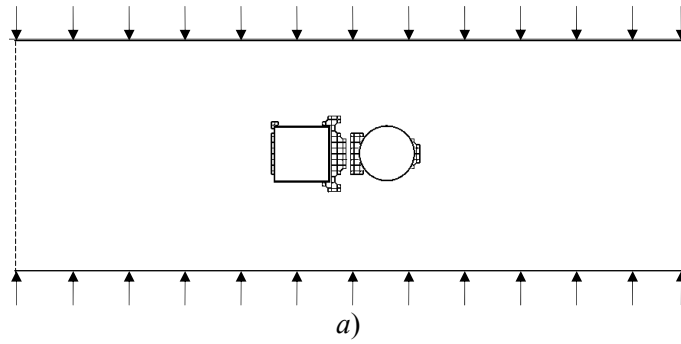


Рис. 2.

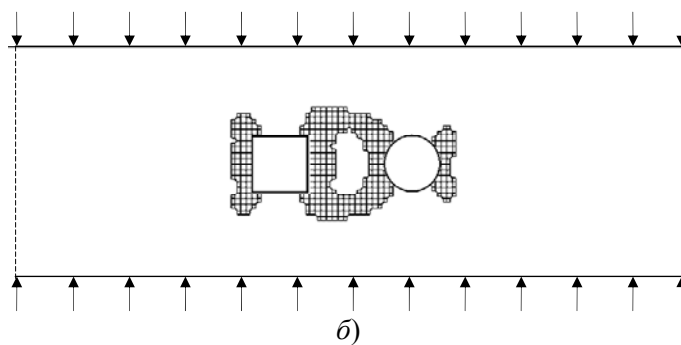
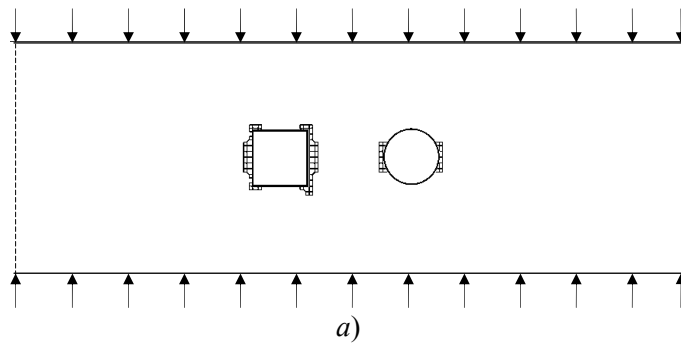


Рис. 3.

Были найдены нагрузки, при которых происходит смыкание зон пластического деформирования. Так, для рассматриваемых оболочек смыкание зон пластического деформирования происходит: для $l = 0,6$ м при $q = 122$ МПа (рис. 4 а); для $l = 0,8$ м при $q = 158$ МПа (рис. 4 б).

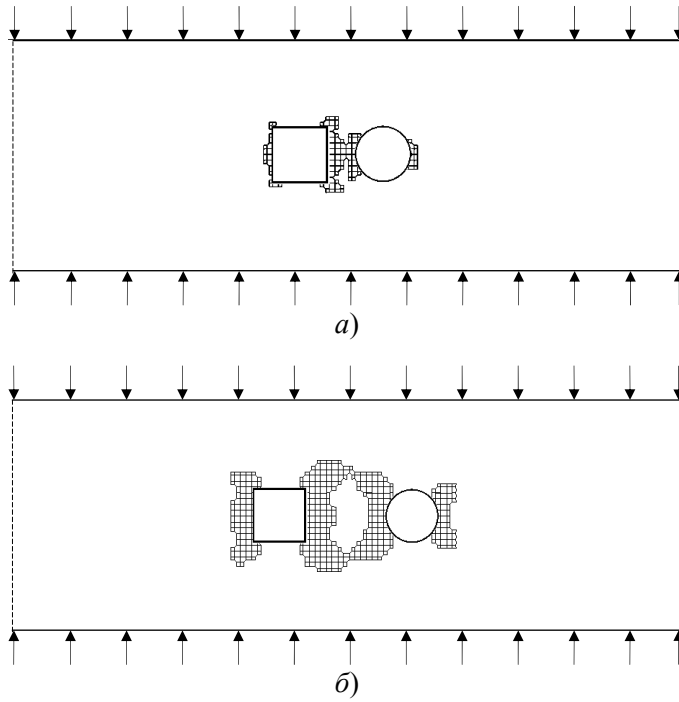


Рис. 4.

На рис. 5 показано распределение относительных напряжений в характерных сечениях указанных оболочек, обозначенных на рис. 1 а, при $q = 130$ МПа (линии — для $l = 0,6$ м; линии --- для $l = 0,8$ м). Рис. 5 в даёт распределение напряжений по всей окружности, проходящей через верхние точки отверстий.

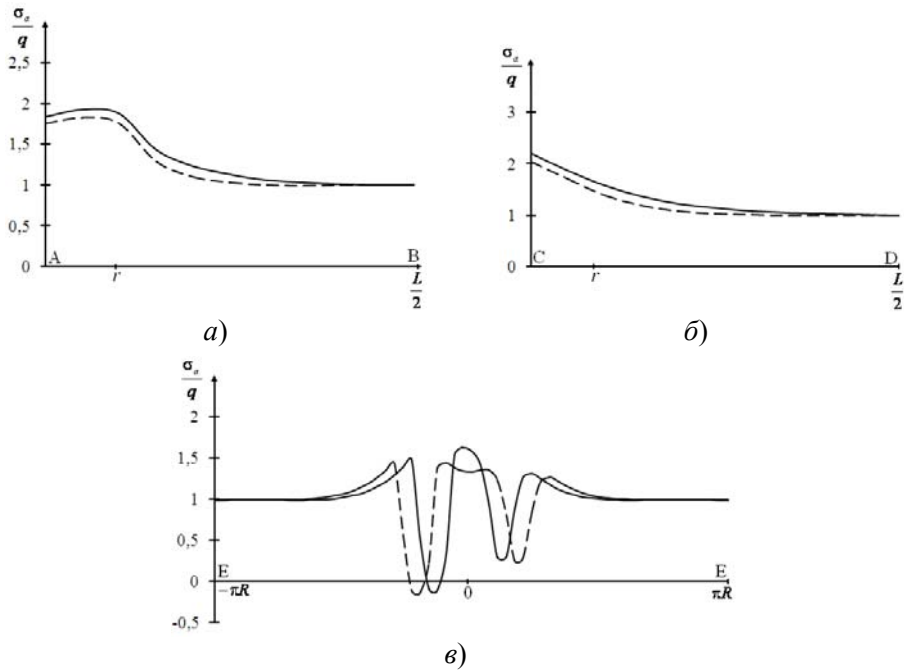


Рис. 5.

Могут быть также построены зависимости $\frac{\sigma_\alpha}{q}$ в указанных и других сече-

ниях оболочки при разных значениях q , соответствующих, например, появлению пластических деформаций в оболочке, смыканию зон пластичности и др.

Выводы. Разработанные алгоритмы расчета на основе конечноэлементного анализа с использованием проекционно-итерационных схем реализации МКЭ позволяют определить НДС в оболочечных отсеках конструкций ракетно-космической техники, имеющих расположенные рядом два или более вырезов, при пластическом деформировании материала и исследовать их взаимовлияние при анализе зон остаточных пластических деформаций. Расположение и конфигурация этих зон меняется в зависимости от формы, размеров вырезов и расстояния между ними.

В статье исследована задача о НДС отсека конструкции в виде цилиндрической оболочки с прямоугольным и круговым отверстиями при осевом сжатии. Могут быть рассмотрены различные другие размеры, формы отверстий (эллиптические, треугольные и др.), разное количество вырезов, их расположение, различные виды нагружения.

На основе известных подходов, разработанных в теории оболочек [22], может быть исследовано влияние на НДС подкреплений оболочек ребрами жесткости, в частности подкрепление краев вырезов.

Предложенные расчетные схемы с успехом могут быть применены для конструкций других отраслей техники и промышленного строительства, состоящих из оболочек и пластин с вырезами (например, башенные железобетонные сооружения различного назначения [27] и др.).

1. Гузь А. Н. Методы расчёта оболочек: в 5 т. Т. 1. Теория оболочек, ослабленных отверстиями / А. Н. Гузь, И. С. Чернышченко, В. Н. Чехов [и др.]. – К.: Наук. думка, 1980. – 636 с.
2. Преображенский И. Н. Вырезы в несущих конструкциях / И. Н. Преображенский, И. А. Цурнал. – М.: Машиностроение, 1984. – 112 с.
3. Hudramovich V. S. Features of nonlinear deformation and critical states of shell systems with geometrical imperfections / V. S. Hudramovich // Int. Appl. Mech. – 2006. – V. 42. – N 12. – P. 1323 – 1355.
4. Ильющин А. А. Труды. Т. 2. Пластичность. 1946–1966 / А. А. Ильющин. – М.: Физматлит, 2004. – 479 с.
5. Биргер И. А. Общие алгоритмы решения задач теорий упругости, пластичности и ползучести / И. А. Биргер // Успехи механики деформируемых сред. – М.: Наука, 1975. – С. 51 – 73.
6. Гудрамович В. С. Устойчивость упруго-пластических оболочек / В. С. Гудрамович. – К.: Наук. думка, 1987. – 216 с.
7. Шайдуров В. В. Многосеточные методы конечных элементов / В. В. Шайдуров. – М.: Наука, 1989. – 288 с.
8. Красносельский М. А. Приближенное решение операторных уравнений / М. А. Красносельский, Г. М. Вайникко, П. П. Забрейко [и др.]. – М.: Наука, 1969. – 455 с.
9. Kluge R. Ein Projektions-Iterations Verfahren bei Fixpunktproblemen und Gleichungen mit monotone Operatoren / R. Kluge // Monatsh. Dtsch. Acad. Wiss. – Berlin, 1969. – 11. N 8 – 9. – S. 599 – 609.
10. Самарский А. А. Методы решения сеточных уравнений / А. А. Самарский, Е. С. Николаев. – М.: Наука, 1978. – 592 с.
11. Гарт Э. Л. Проекционно-итерационные модификации метода конечных элементов в краевых задачах теории упругости / Э. Л. Гарт // Доп. НАН України. – 2008. – № 6. – С. 56 – 61.
12. Hart E. L. Proection-iterative version of the pointwise relaxation method / E. L. Hart // Journ. Mathematic Sci. – 2010. – Vol. 167. – N 1. – P. 76 – 88.
13. Гарт Е. Л. Розв'язування задач пружно-пластичної рівноваги пластин з прямокутним і круговим отворами на основі проекційно-ітераційних схем реалізації методу скінченних елементів / Е. Л. Гарт, В. С. Гудрамович, С. А. Рябоконт // Вісн. Київського нац. унів ім. Т. Шевченка. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2009. – № 3. – С. 52 – 57.
14. Гудрамович В. С. Упругопластическое деформирование прямоугольных пластин с двумя отверстиями различной формы / В. С. Гудрамович, Э. Л. Гарт, С. А. Рябоконт // Техническая механика. – 2009. – № 4. – С. 102 – 110.
15. Гудрамович В. С. Проекционно-итерационные схемы реализации метода конечных элементов в задачах упруго-пластического деформирования пластин с отверстиями / В. С. Гудрамович, Э. Л. Гарт // Упругость и неупругость. : Междун. симп. посв. 100-летию со дня рождения А. А. Ильющина : матер. конф. – М.: Изд. МГУ им. М. В. Ломоносова, 2011. – С. 144 – 147.

16. *Гудрамович В. С.* Вплив форми скінченного елемента на обчисловальну ефективність проекційно-ітераційних методів при розв'язуванні плоскої задачі теорії пружності / *В. С. Гудрамович, Е. Л. Гарт* // Вісн. Київського нац. унів. ім. Т. Шевченка. Сер. : фіз.-мат. науки. – 2008. – № 4. – С. 53 – 58.
17. *Гудрамович В. С.* Моделирование процесса разрушения плоскодеформируемой упругопластической среды, связанного с образованием и развитием дефектов в виде отверстий различной формы / *В. С. Гудрамович, Э. Л. Гарт* // Проблемы пластичности и устойчивости в МДГТ : VII Межд. научн. симп. 2010, Тверь, Россия : тез. докл. – Тверь : Изд. ТГТУ, 2010. – С. 26 – 28.
18. *Гарт Э. Л.* Численное моделирование поведения плоскодеформируемых структурированных сред на основе проекционно-итерационных схем метода конечных элементов / *Э. Л. Гарт, В. С. Гудрамович* // Математическое моделирование в механике деформируемых тел и конструкций. Методы граничных и конечных элементов : 24 Межд. конф. 2011, Санкт-Петербург, Россия : матер. конф. – СПб : Изд. Моринтех, 2011. – Т. 1. – С. 37 – 39.
19. *Гарт Э. Л.* Исследование напряженно-деформированного состояния цилиндрических оболочек с прямоугольными вырезами на основе проекционно-итерационных схем реализации метода конечных элементов / *Э. Л. Гарт, Д. В. Клименко, С. А. Рябоконт* // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформованого твердого тіла. – 2011. – Вип. 12. – С. 47 – 54.
20. *Гарт Э. Л.* Проекционно-итерационный вариант метода конечных элементов на последовательности адаптивных сеток / *Э. Л. Гарт* // Техническая механика. – 2007. – № 2. – С. 92 – 100.
21. *Вольмир А. С.* Устойчивость деформируемых систем / *А. С. Вольмир*. – М. : Наука, 1967. – 984 с.
22. *Амиро И. Я.* Методы расчета оболочек: в 5 т. Т. 2. Теория ребристых оболочек / *И. Я. Амиро, В. А. Заруцкий*. – К. : Наук. думка, 1980. – 368 с.
23. *Новожилов В. В.* Линейная теория тонких оболочек / *В. В. Новожилов, К. Ф. Черных, Е. И. Михайловский*. – Л. : Политехника, 1991. – 656 с.
24. *Григоренко Я. М.* Розв'язування задач теорії оболонок на основі дискретно-континуальних методів / *Я. М. Григоренко, В. Д. Будақ, О. Я. Григоренко*. – Миколаїв : Іліон, 2010. – 294 с.
25. *Угодчиков А. Г.* Некоторые методы решения на ЭЦВМ физически нелинейных задач теории пластин и оболочек / *А. Г. Угодчиков, Ю. Г. Коротких*. – К. : Наук. думка, 1971. – 220 с.
26. *Лебедев А. А.* Механические свойства конструкционных материалов при сложном напряженном состоянии / Под ред. А. А. Лебедева / *А. А. Лебедев, Б. И. Ковальчук, Ф. Ф. Гигиняк, В. П. Ламашевский*. – К. : Изд. дом “Ин-Юре”, 2003. – 538 с.
27. *Левин В. М.* Железобетонные башенные конструкции сооружения. Исследования, расчет / *В. М. Левин*. – Макеевка : ДонГАСА, 1999. – 230 с.

Институт технической механики
НАН Украины и ГКА Украины,
Государственное предприятие
КБ “Южное” им. М. К. Янгеля,
Днепропетровск

Получено: 27.10.11
в окончательном варианте 27.10.11