

КОМПЛЕКСНАЯ ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ ПРОЕКТНЫХ ПАРАМЕТРОВ И ПРОГРАММ УПРАВЛЕНИЯ ТВЕРДОТОПЛИВНОЙ РАКЕТЫ-НОСИТЕЛЯ СВЕРХЛЕГКОГО КЛАССА

Сформулирована комплексная задача совместной оптимизации проектных параметров и программ управления твердотопливной ракетой-носителем (ТРН) сверхлегкого класса как задача теории оптимального управления. Приведены элементы математической модели ТРН, позволившие свести задачу теории оптимального управления к задаче нелинейного математического программирования с ограничениями в виде равенств, неравенств и дифференциальных связей. В состав оптимизируемых параметров ТРН введены геометрические параметры, характеризующие начальные конфигурации зарядов маршевых РДТТ, что позволило в результате решения задачи внутренней баллистики сформировать программы изменения во времени тяговых и расходных характеристик маршевых РДТТ и осуществлять их оптимизацию при выборе проектных параметров ТРН на начальном этапе проектирования.

Сформульовано комплексну задачу спільної оптимізації проектних параметрів і програм управління твердотопливної ракети-носія (ТРН) надлегкого класу як задачу теорії оптимального управління. Приведені елементи математичної моделі ТРН, які дозволили звести задачу теорії оптимального управління до задачі нелінійного математичного програмування з обмеженнями у вигляді рівнянь, нерівностей і диференціальних зв'язків. До складу параметрів ТРН, що оптимізуються, введені геометричні параметри, які характеризують початкові конфігурації зарядів маршових РДТТ, що дозволило в результаті розв'язання задачі внутрішньої балістики сформувати програми зміни в часі тягових і витратних характеристик маршових РДТТ і здійснювати їхню оптимізацію при виборі проектних параметрів ТРН на початковому етапі проектування.

The complex problem of the simultaneous optimization of the design parameters and control programs of the superlight solid launch vehicle is formulated as an optimal control theory problem. The components of the mathematical model of the solid launch vehicle are reported enabling the optimal control theory problem to be reduced to the nonlinear mathematical programming problem with constraints in the form of equalities, inequalities and differential constraints. The optimized parameters of the solid launch vehicle include the geometrical parameters characterizing the initial configurations of the cruise solid-propellant rocket engine charges with the resulting compliance and optimization of programs of time variations in the thrust and flow-rate characteristics of the cruise solid-propellant rocket engine when solving the internal ballistics problem and choosing the design parameters at the initial design stage.

Введение. Разработка и создание ракет-носителей сверхлегкого класса является одной из актуальных задач современной космонавтики. Это обусловлено необходимостью оперативного выведения в околоземное пространство малоразмерных космических аппаратов (МКА) массой от 1 кг до 50 кг [1 – 3] как коммерческого, так и двойного назначения. Для выполнения такого рода транспортных операций может быть целесообразным использование твердотопливных ракет-носителей (ТРН) сверхлегкого класса, время подготовки которых к пуску существенно меньше ракет-носителей (РН), работающих на жидких компонентах ракетного топлива (КРТ).

Постановка задачи. Формализация задачи оптимизации проектных параметров и программ управления ТРН имеет ряд отличий от формализации аналогичной задачи [4] для жидкостных РН. Основное из них заключается в том, что для жидкостных РН требуемая программа изменения тяги маршевых двигателей в полете может быть обеспечена соответствующей регулировкой секундного расхода продуктов сгорания КРТ. Регулировка же тяги маршевых ракетных двигателей твердого топлива (РДТТ) технически трудно реализуема, а программа изменения тяги и секундного расхода продуктов сгорания во времени в этом случае определяется начальной конфигурацией заряда и характеристиками твердого ракетного топлива (ТРТ). Это приводит к необходимости осуществлять оптимизацию проектных параметров и программ управления движением ТРН совместно с геометрическими параметрами, ха-

рактически начальные конфигурации зарядов (далее – геометрическими параметрами зарядов) маршевых РДТТ.

Комплексная задача совместной оптимизации проектных параметров ТРН, программ управления и геометрических параметров зарядов маршевых РДТТ сформулирована как задача теории оптимального управления с ограничениями в виде равенств, неравенств и дифференциальных связей.

В качестве исходной информации (вектор \bar{x}) предполагаются известными: данные, определяющие целевую задачу; ограничения на траекторию полета, габаритно-массовые характеристики ТРН в целом, отдельных подсистем и элементов; коэффициенты безопасности, используемые при проведении прочностных расчетов; физико-механические и химические характеристики используемых материалов и ТРТ; неучтенные массы элементов, подсистем ТРН и др.

В качестве оптимизируемых параметров и программ управления далее рассматриваются:

- структурные параметры (вектор \bar{c}), определяющие облик, конструктивно-компоновочную и аэродинамическую схемы ТРН;
- основные проектные параметры (вектор \bar{p}), определяющие основные габаритно-массовые и энергетические характеристики ТРН;
- геометрические параметры, характеризующие начальные конфигурации зарядов маршевых РДТТ (вектор \bar{a});
- вектор управления \bar{u} , компонентами которого в рассматриваемой задаче являются программы изменения во времени угла тангажа $\varphi_{np}(t)$, тяговых $P_{np i}(t)$ и расходных $\dot{m}_{c i}(t)$ характеристик маршевых РДТТ i -х ступеней ТРН.

Компонентами вектора структурных параметров \bar{c} являются: параметры, определяющие типы зарядов маршевых РДТТ; типы ТРТ; типы материалов, используемых в элементах конструкции ТРН; параметры, задающие аэродинамическую, конструктивно-компоновочную схемы ТРН и т.п.

Компонентами вектора основных проектных параметров \bar{p} являются: коэффициенты начальных тяговооруженностей ступеней РН v_{pi} , $i = \overline{1, n_c}$, где n_c – количество ступеней ТРН; относительные конечные массы ступеней РН μ_{ki} , $i = \overline{1, (n_c - 1)}$; давления в камерах сгорания маршевых РДТТ p_{ki} , $i = \overline{1, n_c}$; диаметры срезов сопел D_{ai} , $i = \overline{1, n_c}$; углы полураствора на срезах сопел β_{ai} , $i = \overline{1, n_c}$; степени утопленности сопловых блоков в камеры сгорания η_i , $i = \overline{1, n_c}$. Проектный параметр (относительная конечная масса последней ступени ТРН $\mu_{k n_c}$) определяется из условия обеспечения заданных значений кинематических параметров движения в конце активного участка траектории (АУТ).

Коэффициенты начальных тяговооруженностей ступеней РН v_{pi} и относительные конечные массы ступеней РН μ_{ki} определяются известными соотношениями [4]:

$$v_{pi} = \frac{m_{0i} \cdot g_0}{P_{0i}}; \quad \mu_{ki} = \frac{m_{ki}}{m_{0i}},$$

где m_{0i}, m_{ki} – соответственно стартовая и конечная массы i -й ступени ТРН; g_0 – ускорение свободного падения у поверхности Земли; P_{0i} – начальное значение тяги в пустоте маршевого РДТТ после выхода последнего на основной режим работы.

Компонентами вектора \bar{a} , как уже было отмечено выше, являются геометрические параметры зарядов маршевых РДТТ.

Значения оптимизируемых параметров ТРН (векторов \bar{c} , \bar{p} , \bar{a}) и программы управления \bar{u} выбираются из условия обеспечения максимального значения целевого функционала, в качестве которого рассматривается масса полезного груза m_{nz} (как один из наиболее емких критериев, характеризующих ТРН) при соблюдении ограничений, которые накладываются на области изменения векторов \bar{c} , \bar{p} , \bar{a} , \bar{u} конструктивно-технологическими требованиями, условиями полета, условиями прочности, габаритными размерами, условиями работоспособности и эксплуатации маршевых РДТТ. Связь векторов \bar{c} , \bar{p} , \bar{a} , \bar{u} с целевым функционалом осуществляется с помощью математической модели ТРН.

Комплексная задача совместной оптимизации программ управления, проектных параметров ТРН и геометрических параметров зарядов маршевых РДТТ формулируется следующим образом. Необходимо определить значения векторов \bar{c} , \bar{p} , \bar{a} , \bar{u} , обеспечивающих максимальное значение целевого функционала

$$I(\bar{c}, \bar{p}, \bar{a}, \bar{u}, \bar{x}) = \max_{\bar{c}, \bar{p}, \bar{a}, \bar{u}} m_{nz}(\bar{c}, \bar{p}, \bar{a}, \bar{u}, \bar{x})$$

при ограничениях:

- на области изменения оптимизируемых параметров и исходных данных

$$\bar{c} \in \tilde{C}^n \subset C^n, \bar{p} \in \tilde{P}^m \subset P^m, \bar{a} \in \tilde{A}^s \subset A^s, \bar{x} \in \tilde{X}^k \subset X^k;$$

- на траекторию полета ТРН

$$H_{верт} = H_{верт}^{mp}, Q_{\max} \leq Q_{\max}^{mp}, Q_{разд} \leq Q_{разд}^{mp},$$

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = f(\bar{y}, \bar{u}, \bar{x}, \bar{c}, \bar{p}, \bar{a}),$$

$$\bar{y} \in \tilde{Y}^b \subset Y^b, \bar{u} \in \tilde{U}^r \subset U^r,$$

- на внутрибаллистические характеристики маршевых РДТТ

$$\frac{d\bar{w}}{dt} = g(\bar{w}, \bar{c}, \bar{p}, \bar{a}, \bar{x}),$$

$$\bar{w} \in \tilde{W}^h \in W^h,$$

- на габаритные размеры ТРН

$$l_p(\bar{x}, \bar{c}, \bar{p}, \bar{a}) = l_p^{\partial o C}, D_{pi}(\bar{x}, \bar{c}, \bar{p}, \bar{a}) \leq D_p^{\partial o C}, i = \overline{1, n_c}.$$

Здесь $\bar{c} = (c_i), i = \overline{1, n}$ – вектор структурных параметров, являющийся элементом дискретного векторного пространства C^n ; $\bar{x} = (x_i), i = \overline{1, k}$, $\bar{p} = (p_i), i = \overline{1, m}$, $\bar{a} = (a_j), j = \overline{1, s}$ – векторы исходных данных, основных проектных параметров ТРН и геометрических параметров зарядов маршевых РДТТ, являющиеся элементами векторных пространств X^k, P^m, A^s , соот-

ответственно; $\tilde{C}^n, \tilde{P}^m, \tilde{A}^s, \tilde{X}^k$ – замкнутые области в векторных пространствах C^n, P^m, A^s, X^k , в которых могут принимать значения векторы $\bar{c}, \bar{p}, \bar{a}, \bar{x}$; $\bar{y} = (y_i), i = \overline{1, b}, \bar{u} = (u_j), j = \overline{1, r}$ – соответственно вектор фазовых координат, определяющий положение ТРН в пространстве, и вектор управления, являющиеся элементами векторных пространств Y^b и U^r ; \tilde{Y}^b, \tilde{U}^r – замкнутые области в векторных пространствах Y^b, U^r , в которых могут принимать значения векторы \bar{y}, \bar{u} ; \bar{w} – вектор, изменение во времени которого определяет внутрибаллистические характеристики маршевых РДГТ (давления в камерах сгорания $p_{ki}(t, \bar{c}, \bar{p}, \bar{a}, \bar{x})$, свободные объемы в камерах сгорания $V_{cv\ i}(t, \bar{c}, \bar{p}, \bar{a}, \bar{x})$, поверхности горения $S_i(t, \bar{c}, \bar{p}, \bar{a}, \bar{x}), i = \overline{1, n_c}$); \tilde{W}^h – замкнутая область в векторном пространстве W^h , в которой может принимать значения вектор \bar{w} ; $l_p(\bar{x}, \bar{c}, \bar{p}, \bar{a}), l_p^{\partial oC}$ – расчетная и максимально допустимая длины ТРН, соответственно; $D_{pi}(\bar{x}, \bar{c}, \bar{p}, \bar{a}), D_p^{\partial oC}, i = \overline{1, n_c}$ – расчетные и максимально допустимые диаметры ТРН по ступеням.

Математическая модель ТРН представляется в виде оператора

$$\tilde{F} = R(Z)$$

с областью определения на множестве $Z = \tilde{X}^k \times \tilde{C}^n \times \tilde{P}^m \times \tilde{A}^s \times \tilde{U}^r \times \tilde{W}^h$ и областью значений на множестве F , сопоставляющего каждому элементу множества $z(\bar{x}, \bar{c}, \bar{p}, \bar{a}, \bar{u}, \bar{w}) \in Z$ множество выходных характеристик ТРН $\tilde{F} \subset F$.

Структура математической модели, последовательность расчета целевого функционала при оптимизации проектных параметров и программ управления ТРН приведена на рис. 1, где использована следующая аббревиатура: СБ – сопловой блок; ПО, ХО – соответственно переходный и хвостовой отсеки; ГО головной обтекатель; ГМХ – габаритно-массовые характеристики.

Метод решения. Как отмечалось выше, оптимизируемые параметры в комплексной задаче совместной оптимизации могут принимать как дискретные (вектор \bar{c}), так и непрерывные (векторы \bar{p}, \bar{a}) значения, поэтому основой для разработки метода решения комплексной задачи, является декомпозиция последней на две частные задачи:

– выбор вектора структурных параметров \bar{c} , характеризующего облик ТРН, ее аэродинамическую и конструктивно-компоновочную схемы (задача 1);

– совместная оптимизация векторов \bar{p}, \bar{a} и программ управления движением $\bar{u}(t)$ для выбранного облика ТРН (задача 2).

Решение комплексной задачи может быть получено на основе взаимоувязанного решения двух частных задач, когда результаты решения одной из задач являются исходными данными для решения другой задачи.

При таком подходе, в том случае, когда рассматриваемое количество альтернативных вариантов ТРН невелико, для решения первой частной задачи целесообразно использование метода полного перебора из ограниченного множества альтернативных вариантов.

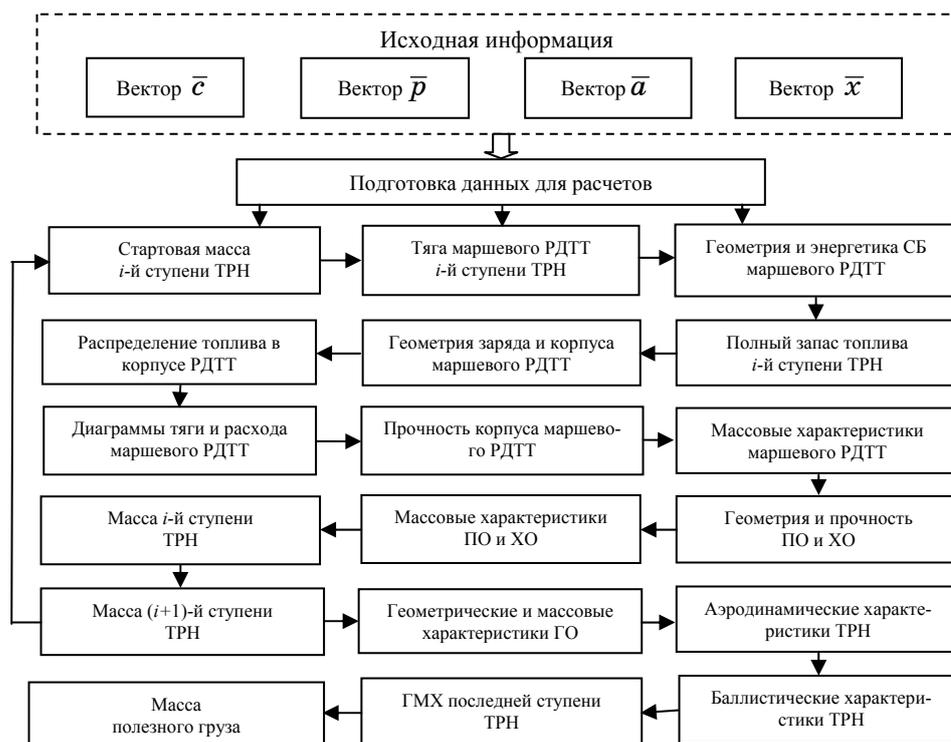


Рис. 1

Для решения второй частной задачи могут быть применены методы теории оптимального управления [5 – 8]. Однако следует отметить, что их использование наталкивается на трудности, связанные с формулировкой условий применения, наличием ограничений, сложностью математической модели, а также с проблемой решения краевой задачи для каждого из рассматриваемых альтернативных вариантов ТРН. Перечисленные факторы затрудняют внедрение этих методов в практику оптимального проектирования ракетносителей. Для преодоления этих трудностей предлагается подход, позволяющий свести задачу теории оптимального управления к задаче нелинейного математического программирования с ограничениями в виде равенств, неравенств и дифференциальных связей [4, 9 – 12]. В этом случае программа управления движением ТРН (программа изменения угла тангажа $\varphi_{np}(t)$) задается в заданном классе функций, в частности в виде полиномов, часть коэффициентов которых определяется с использованием исходных данных, текущих значений основных проектных параметров и фазовых координат, а остальные коэффициенты оптимизируются совместно с основными проектными параметрами ТРН [4, 12]. Программы же изменения величин вектора тяги маршевых РДГТ $P_{npi}(t) = P_{npi}(t, \bar{a})$ и массового секундного расхода продуктов сгорания ТРТ $\dot{m}_c = \dot{m}_c(t, \bar{a})$ определяются, как указывалось ранее, начальной конфигурацией заряда ТРТ (вектором \bar{a}), который в рассматриваемой задаче оптимизируются совместно с проектными параметрами ТБР. При этом программы $P_{npi}(t) = P_{npi}(t, \bar{a})$ и $\dot{m}_c = \dot{m}_c(t, \bar{a})$ для текущего зна-

чения вектора \bar{a} определяются перед задачей расчета баллистических характеристик ТРН, что дает возможность для каждого альтернативного варианта ТБР и типовых форм зарядов маршевых РДТТ оптимальным образом подбирать тяги маршевых РДТТ, решая менее трудоемкую задачу нелинейного математического программирования, в отличие от задачи теории оптимального управления.

При таком подходе задача нелинейного математического программирования может быть успешно решена методами детерминированного или случайного поиска [13]. Следует также отметить, что в процессе оптимизации в области, подозрительной на экстремум, целесообразно использование параболической аппроксимации сечения функциональной поверхности в направлении поиска и определение оптимальных на данном шаге оптимизации значений проектных параметров из условия максимума (минимума) аппроксимирующей функции [4].

Элементы математической модели. Задача совместной оптимизации векторов \bar{p} , \bar{a} и программ управления движением $\bar{u}(t)$ (задача 2) рассматривается для выбранного облика ТРН (одного из возможных альтернативных вариантов), когда заданы:

- состав и значения структурных параметров (вектор \bar{c}), определяющих облик ТРН, ее аэродинамическую и конструктивно-компоновочную схемы, а также множество элементов и подсистем, из которых сформирован альтернативный вариант ТРН;

- перечень основных проектных параметров (вектор \bar{p}), позволяющих для текущего значения вектора \bar{p} с использованием математической модели определять значение целевого функционала и основные характеристики ТРН;

- перечень параметров (вектор \bar{a}), характеризующих начальные конфигурации зарядов ТРТ и определяющих для текущего значения вектора \bar{a} законы изменения во времени поверхности горения ТРТ, тяговых и расходных характеристик маршевых РДТТ;

- исходные данные (вектор \bar{x}), включающие информацию о выполняемой целевой задаче, ограничения на траекторию полета, характеристики используемых ТРТ, конструкционных, эрозионно-стойких, теплозащитных и других материалов, условия применения и т.п.

В процессе решения задачи необходимо для различных значений векторов \bar{p} , \bar{a} сформировать программы управления движением ТРН, которые включают программу изменения угла тангажа $\varphi_{np}(t)$ и программы изменения тяговых $P(t, \bar{a})$ и расходных $m_c(t, \bar{a})$ характеристик маршевых РДТТ во времени.

Используемые при проектировании математические модели объектов ракетно-космической техники с двигательными установками на ТРТ достаточно широко освещены в технической литературе [9, 10, 15 – 17]. Далее рассмотрены элементы математической модели ТРН, которые дали возможность свести задачу теории оптимального управления к задаче нелинейного математического программирования.

Выбор программы управления углом тангажа. Система уравнений движения центра масс РН различного назначения, которая используется при решении совместной оптимизации векторов \bar{p} , \bar{a} и программ управления движением $\bar{u}(t)$, приведена в [4,14]. При этом программа управления углом

тангажа $\varphi_{np}(t)$ (одна из компонент вектора управления \bar{u}) определяется с учетом следующих условий и ограничений.

Траектория движения (схема полета ТРН) на АУТ по виду программы управления $\varphi_{np}(t)$ разделена на несколько участков:

- участок вертикального движения;
- участок разворота;
- участок интенсивного аэродинамического и теплового воздействия, на котором осуществляется движение ТРН с нулевым углом атаки α ;
- участок движения с фиксированным углом тангажа φ_f ;
- участок движения с линейным изменением во времени угла тангажа;
- пассивный участок движения по переходной орбите, если он предусмотрен схемой выведения МКА;
- участок доразгона МКА в апогее переходной орбиты при выведении на круговую орбиту.

На участке вертикального движения $\varphi_{np}(t)$ имеет следующий вид

$$\varphi_{np}(t) = \text{const} = \frac{\pi}{2}.$$

На участке разворота $\varphi_{np}(t)$ задается кубической параболой

$$\varphi_{np}(t) = \sum_{i=0}^3 A_i \cdot t^i,$$

коэффициенты которой определяются в результате решения системы линейных (относительно коэффициентов $A_i, i = \overline{1,3}$) уравнений [4]

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 A_i \cdot t_e^i &= \frac{\pi}{2} - A_0; \\ \sum_{i=1}^3 A_i \cdot t_p^i &= \varphi_0 - A_0; \\ \sum_{i=1}^3 i \cdot A_i \cdot t_p^{i-1} &= -\frac{g(H) \cdot \cos(\theta)}{V}, \end{aligned} \quad (1)$$

где t_e и t_p – соответственно времена окончания вертикального участка движения и участка разворота; $g(H)$ – ускорение свободного падения на высоте H в конце участка разворота ТРН; θ – угол наклона вектора скорости к местному горизонту; V – скорость движения ТРН в конце участка разворота.

Коэффициент A_0 , входящий в правые части системы (1), определяется из условия обеспечения нулевого угла атаки в конце участка разворота при скорости движения ТРН V , близкой к скорости звука. Значение угла тангажа φ_0 находится из условия обеспечения требуемой высоты круговой орбиты $H_{кр}$ или высоты перигея $H_{не}$ переходной орбиты, если она предусмотрена условиями выведения МКА.

Значения параметров движения V, H и θ определяются в результате численного интегрирования уравнений движения.

После участка разворота, в зоне интенсивного аэродинамического и теплового воздействия, осуществляется движение ТРН с нулевым углом атаки и программа изменения угла тангажа $\varphi_{np}(t)$ имеет вид [4,12]

$$\varphi_{np}(t) = \theta(t).$$

Предполагается, что зона интенсивного аэродинамического воздействия заканчивается, когда текущее значение скоростного напора

$$q = \frac{\rho(H) \cdot V^2}{2}$$

становится равным $\approx 5\% - 10\%$ от значения максимального, скоростного напора, действующего на ТРН при движении по заданной траектории.

После участка интенсивного аэродинамического и теплового воздействия осуществляется движение с фиксированным углом тангажа φ_f до окончания работы РДТТ первой ступени ТРН

$$\varphi_{np}(t) = \varphi_f = \text{const.}$$

Последующее движение ТРН после отделения первой ступени осуществляется по следующей программе

$$\varphi_{np}(t) = \varphi_f + \dot{\phi} \cdot t,$$

где параметр программы $\dot{\phi}$ (угловая скорость разворота ТРН) подбирается исходя из условия выполнения конкретной целевой задачи: выведения ТРН на круговую орбиту или, если предусмотрен пассивный участок выведения МКА, на перигей переходной орбиты. В последнем варианте в апогее переходной орбиты осуществляется включение апогейного двигателя, а ориентация и управление МКА осуществляются таким образом, чтобы радиальная составляющая ускорения МКА равнялась нулю [11]

$$\varphi_{np}(t) = \arcsin\left(\frac{\mu}{r^2} - \frac{V_\tau}{r}\right) \cdot \frac{m_{КА}}{P_{DU}},$$

где φ_{np} – угол между направлением вектора тяги апогейного двигателя и трансверсальной составляющей вектора скорости V_τ ; P_{DU} – значение тяги апогейного двигателя; r – радиус-вектор, соединяющий центр притяжения Земли с центром масс МКА; μ – гравитационная постоянная Земли; $m_{КА}$ – текущая масса МКА.

Выбор программы изменения тяговых и расходных характеристик маршевых РДТТ. Как указывалось выше, тяговые $P(t, \bar{a})$ и расходные $m_c(t, \bar{a})$ характеристики маршевых РДТТ зависят от значений геометрических параметров, характеризующих начальную конфигурацию заряда ТРТ. Именно эти параметры определяют характер изменения геометрических характеристик заряда и, соответственно, тяговых и расходных характеристик маршевого РДТТ во времени. Под геометрическими характеристиками заряда

далее понимаются законы изменения поверхности горения твердого топлива $S = S[e(t), \bar{a}]$ и внутреннего, свободного объема $V_{ce} = V_{ce}[e(t), \bar{a}]$ камеры сгорания в зависимости от толщины сгоревшего свода e .

Сила тяги маршевого РДГТ $P(t, \bar{a})$ и удельный импульс тяги $I_{y\delta}^{Cycm}$ в пустоте, а также массовый секундный расход продуктов сгорания $\dot{m}_c(t, \bar{a})$ рассчитываются по известным соотношениям [16, 17]:

$$P(t, \bar{a}) = I_{y\delta}^{Cycm} \cdot \dot{m}_c(t, \bar{a});$$

$$I_{y\delta}^{Cycm} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2 \cdot \frac{k+1}{k} \cdot \chi \cdot R \cdot T_2} \cdot \left(\lambda_a + \frac{1}{\lambda_a} \right); \quad (2)$$

$$\dot{m}_c(t, \bar{a}) = A_n \cdot \frac{p_k(t) \cdot F_{kr}}{\sqrt{\chi \cdot R \cdot T_2}},$$

где k – показатель изоэнтропы расширения продуктов сгорания ТРТ в сопловом блоке; R, T_2 – соответственно газовая постоянная продуктов сгорания и температура горения ТРТ; χ – коэффициент теплопотерь в камере сгорания; λ_a – приведенная скорость в выходном сечении сопла. $p_k(t)$ – давление торможения на входе в сопло; F_{kr} – площадь критического сечения сопла.

Коэффициент A_n , входящий в (2), определяется по зависимости

$$A_n = \sqrt{k \cdot \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{k-1}}}.$$

Как видно из (2), изменение силы тяги маршевого РДГТ во времени $P(t, \bar{a})$ определяется характером изменения давления $p_k(t)$ в камере сгорания, которое может быть получено в результате решения задачи внутренней баллистики РДГТ. Согласно работам [16,17], при функционировании РДГТ наблюдаются четыре явно выраженных периода: автономное горение воспламенителя; совместное горение воспламенителя и ТРТ; стабилизация давления в камере РДГТ; период «последствия» после сгорания ТРТ. Продолжительность периода «последствия» равна времени истечения продуктов сгорания ТРТ из камеры сгорания в окружающую среду.

На начальном этапе проектирования ТБР с достаточной для проектных исследований точностью задача внутренней баллистики может быть решена в нульмерной постановке [17] при использовании гипотезы осреднения параметров состояния продуктов сгорания в камере двигателя. При этом первые два периода функционирования РДГТ могут быть исключены из рассмотрения в силу их малой продолжительности по сравнению с полным временем работы двигателя и слабого влияния на энергетические характеристики ТРН в целом. В этом случае предполагается, что воспламенитель при полном сгорании обеспечивает необходимый уровень давления в камере, требуемое количество подведенного тепла к поверхности горения и надежное воспламенение заряда ТРТ.

При этих предположениях уравнение изменения во времени давления $p_k(t)$ в камере сгорания РДТТ может быть получено из уравнения баланса газа в камере сгорания [17]

$$\frac{d}{dt} \left\{ V_{cs} [e(t), \bar{a}] \cdot \frac{p_k(t)}{\chi \cdot R \cdot T_2} \right\} = \dot{m}_2 [e(t), \bar{a}] - \dot{m}_c(t, \bar{a}). \quad (3)$$

В левой части уравнения представлено изменение массы газа (продуктов сгорания) в свободном объеме $V_{cs} [e(t), \bar{a}]$ камеры сгорания в единицу времени, в правой части – разность прихода газа вследствие горения ТРТ $\dot{m}_2 [e(t), \bar{a}]$ и расхода газа через сопло $\dot{m}_c(t, \bar{a})$. Здесь $e(t)$ – зависимость толщины сгоревшего свода заряда от времени t .

Приход газа $\dot{m}_2 [e(t), \bar{a}]$ в камеру сгорания вследствие горения ТРТ определяется соотношением

$$\dot{m}_2 [e(t), \bar{a}] = S [e(t), \bar{a}] \cdot u \cdot \rho_m,$$

где $S [e(t), \bar{a}]$ – изменение поверхности горения заряда ТРТ во времени; u, ρ_m – соответственно скорость горения и плотность ТРТ.

После подстановки $\dot{m}_2 [e(t), \bar{a}]$ и $\dot{m}_c(t, \bar{a})$ в (3) в предположении, что произведение $\chi \cdot R \cdot T_2 \approx \text{const}$, получим систему дифференциальных уравнений для расчета внутриваллистических характеристик РДТТ:

$$\frac{V_{cs} [e(t), \bar{a}]}{\chi \cdot R \cdot T_2} \cdot \frac{dp_k}{dt} = S [e(t), \bar{a}] \cdot u \cdot \rho_m - A_n \cdot \frac{p_k(t) \cdot F_{kr}}{\sqrt{\chi \cdot R \cdot T_2}} - \frac{p_k}{\chi \cdot R \cdot T_2} \cdot \frac{dV_{cs} [e(t), \bar{a}]}{dt};$$

$$\frac{dV_{cs} [e(t), \bar{a}]}{dt} = S [e(t), \bar{a}] \cdot u;$$

$$\frac{de}{dt} = u.$$

Полученная система уравнений может быть проинтегрирована численным методом, если заданы начальные условия p_{k0}, V_{cs}^0, e_0 при $t = t_0$, а также известны скорость горения u ТРТ и зависимость изменения площади горения заряда $S = S [e(t), \bar{a}]$ от толщины сгоревшего свода e .

Конструктивно типовые формы зарядов РДТТ в большинстве случаев представляют собой набор геометрических тел: цилиндров, конусов, торов, сфер и т.п. Эта совокупность в различных сочетаниях со взаимным пересечением составляет разнообразие конфигураций зарядов.

В процессе работы РДТТ изменение геометрических характеристик заряда зависит от характера перемещения поверхности горения ТРТ, т.е. от поля скоростей горения $u = u(x, y, z)$, которое определяется в свою очередь начальным физико-механическим состоянием заряда, технологической неоднородностью состава ТРТ, его начальной и текущей температурой, давлением и скоростью потока вблизи поверхности горения и ряда других факторов. Точки поверхности горения движутся в процессе работы РДТТ внутрь заряда по нормальям к поверхности с местной скоростью горения u , при этом количест-

во поверхностей горения может измениться за счет выгорания некоторых из них и появления новых.

Составление алгоритмов расчетов поверхностей горения и внутренних свободных объемов зарядов для неравномерного поля скоростей горения ТРТ $u = u(x, y, z)$ представляет собой сложную задачу, трудоемкость решения которой, с одной стороны, определяется громоздкостью и сложностью алгоритмов, с другой стороны – недостатком имеющейся на начальном этапе проектирования ТРН исходной информации, необходимой для проведения расчетов.

В связи с этим, на начальном этапе проектирования ТРН при расчете геометрических характеристик зарядов маршевых РДТТ предполагается, что поле скоростей горения равномерно, то есть не зависит от координат x, y, z . В этом случае задачу расчета поверхности горения и внутреннего объема заряда ТРТ можно решать отдельно от задачи внутренней баллистики и определять поверхность горения и внутренний объем как функции от толщины сгоревшего свода e .

Следует отметить, что скорость горения u является одной из основных характеристик ТРТ, используемых в расчетах внутрикамерных процессов РДТТ. Экспериментальные данные [16, 17] показывают, что факторы, влияющие на скорость горения ТРТ, практически не зависят друг от друга. Это позволяет представить зависимость скорости горения ТРТ в виде произведения функций от каждого из факторов [17]

$$u = u(p_k) \cdot \theta(T_3) \cdot \varphi(v) \cdot \eta(n_n),$$

где $u(p_k)$, $\theta(T_3)$, $\varphi(v)$, $\eta(n_n)$ – независимые функции соответственно: давления p_k ; начальной температуры заряда ТРТ T_3 ; скорости движения продуктов сгорания вдоль поверхности горения заряда v ; ускорения n_n , действующего по нормали к поверхности горения.

На начальном этапе проектирования ТРН основными функциями, которые наиболее целесообразно использовать при расчетах внутрикамерных процессов в РДТТ, являются зависимость скорости горения от давления $u(p_k)$, а также функция $\theta(T_3)$, характеризующая влияние начальной температуры T_3 на скорость горения ТРТ.

В диапазоне давлений от 20 МПа до 30 МПа функция $u(p_k)$ обычно аппроксимируется степенной зависимостью вида $u = u_1 \cdot (p_k)^v$; в диапазоне давлений от 50 МПа до 60 МПа приемлема линейная зависимость $u = A + B \cdot p_k$; при больших значениях p_k используется линейная зависимость $u = B \cdot p_k$ [17]. Аппроксимация функции $\theta(T_3)$ в диапазоне температур заряда ТРТ $\pm 60^\circ\text{C}$ осуществляется зависимостью [17]

$$\theta(T_3) = \frac{B_m}{B_m - (T_3 - T_n)},$$

где B_m – термохимическая константа, свойственная конкретному типу ТРТ; T_n – номинальная температура заряда ТРТ, равная 20°C .

Термохимическая константа B_m в первом приближении может быть определена по соотношению

$$B_m = \frac{1}{k_m},$$

где температурный градиент скорости горения k_m для известных (по литературе) топлив находится в пределах $0,001 - 0,005$ [17].

Для типовых форм зарядов поверхность горения может быть составлена из плоскостей, сферических, тороидальных, цилиндрических и конических поверхностей. При этом оси поверхностей вращения располагаются в плоскостях, проходящих через продольную ось заряда z .

Для упрощения построения алгоритма расчета $S(e, \bar{a})$ заряд ТРТ вдоль продольной оси z разделяется на N зон, при этом последний рассекается рядом плоскостей, проходящих через ось канала z . Линии (следы поверхностей горения), получающиеся в результате таких сечений, будут состоять для типовых форм зарядов из взаимно пересекающихся прямых и окружностей. Границы зон определяются плоскостями, перпендикулярными оси z и проходящими через точки пересечения двух соседних элементов, образующих указанные выше линии. В число зон N должны быть включены также зоны, возникающие в результате появления так называемых неявных поверхностей горения, которые могут получаться, например, при разгорании двухгранных углов, вершин конусов и т.п.

Площадь поверхности горения заряда $S(e, \bar{a})$ и внутренний объем камеры сгорания $V_{св}(e, \bar{a})$ для текущей толщины сгоревшего свода e определяются следующими соотношениями:

$$S(e, \bar{a}) = \sum_{i=1}^N S_i(e, \bar{a}); \quad (4)$$

$$V_{св}(e, \bar{a}) = \sum_{i=1}^N V_{св i}(e, \bar{a}). \quad (5)$$

Значение внутреннего объема $V_{св i}(e, \bar{a})$ в i -й зоне заряда определяется по зависимостям:

$$V_{св i}(e, \bar{a}) = \int_{z_{Hi}(e)}^{z_{Bi}(e)} F_i(z, e, \bar{a}) dz; \quad (6)$$

$$F_i(z, e, \bar{a}) = \sum_{j=1}^{n_i} \int_{x_{Hj}(z, e)}^{x_{Bj}(z, e)} y_{ij}(x, z, e, \bar{a}) dx, \quad (7)$$

где $F_i(z, e, \bar{a})$ – закон изменения площади проходного сечения канала заряда вдоль продольной оси z в i -й зоне заряда; $z_{Hi}(e)$, $z_{Bi}(e)$ – нижняя и верхняя граница i -й зоны; n_i – число элементов, формирующих контур проходного сечения канала заряда в плоскости, перпендикулярной продольной оси z ;

$y_{ij} = y_{ij}(x, z, e, \bar{a})$ – уравнение j -го элемента, формирующего контур проходного сечения канала заряда в i -й зоне.

Нижние и верхние пределы интегрирования $x_{Hj}(z, e)$, $x_{Bj}(z, e)$ для каждого элемента y_{ij} являются абсциссами точек пересечения j -го элемента с $(j-1)$ и $(j+1)$ соответственно.

Среднее значение поверхности горения S_{cp} на интервале изменения толщины сгоревшего свода заряда $[e_j, e_{j+1}]$ определяется по соотношению

$$S_{cp} = \frac{V_{ce\ j+1} - V_{ce\ j}}{e_{j+1} - e_j}. \quad (8)$$

Если поверхность горения в i -й зоне заряда представляет собой поверхность вращения относительно продольной оси заряда z , то ее площадь определяется по соотношениям:

$$S_i(e, \bar{a}) = 2\pi \int_{z_{Hi}(e)}^{z_{Bi}(e)} y_i(z, e, \bar{a}) ds; \quad (9)$$

$$ds = \sqrt{1 + \left[\frac{dy_i(z, e, \bar{a})}{dz} \right]^2} dz, \quad (10)$$

а свободный объем, ограниченный этой поверхностью вращения, вычисляется по зависимости

$$V_{ce\ i}(e, \bar{a}) = \pi \int_{z_{Hi}(e)}^{z_{Bi}(e)} y_i^2(z, e, \bar{a}) dz, \quad (11)$$

где $y_i = y_i(z, e, \bar{a})$ – уравнение образующей поверхности вращения;

В том случае, когда образующая описывается прямой вида $y_i = k_i z + b_i$, поверхность горения и внутренний объем определяются по формулам:

$$S_i = 2\pi \sqrt{1 + k_i^2} (z_{Bi} - z_{Hi}) \left[\frac{k_i}{2} (z_{Bi} - z_{Hi}) + b_i \right]; \quad (12)$$

$$V_{ce\ i} = \pi \left[\frac{k_i^2 (z_{Bi}^3 - z_{Hi}^3)}{3} + k_i b_i (z_{Bi}^2 - z_{Hi}^2) + b_i^2 (z_{Bi} - z_{Hi}) \right]. \quad (13)$$

Если образующая поверхности вращения описывается окружностью вида $(z - a_i)^2 + (y - b_i)^2 = R_i^2$, поверхность горения и внутренний объем в i -й зоне заряда определяются по соотношениям:

$$S_i = 2\pi R_i \left[b_i \arcsin \left(\frac{z - a_i}{2} \pm z \right) \right]_{z_{Hi}}^{z_{Bi}}; \quad (14)$$

$$V_{св\ i} = \pi \left\{ b_i^2 z \pm 2b_i \left[\frac{z - a_i}{2} \sqrt{R_i^2 - (z - a_i)^2} + \frac{R_i^2}{2} \arcsin \frac{z - a_i}{R_i} \right] + \right. \\ \left. + R_i^2 z + \frac{z^3}{3} + a_i z^2 - a_i^2 z \right\} \Bigg|_{z_{Hi}}^{z_{Bi}}. \quad (15)$$

Знак «+» в (14), (15) берется в том случае, когда поверхность горения и внутренний объем образуются вращением верхней части дуги окружности, знак «-» – в противоположном случае.

Значения параметров прямой b_i и радиуса окружности R_i в зависимости от толщины сгоревшего свода e определяются по формулам:

$$b_i = b_{0i} \pm \frac{e}{\cos[\arctg(k_i)]}; \quad (16)$$

$$R_i = R_{0i} \pm e, \quad (17)$$

где b_{0i}, R_{0i} – значения соответствующих параметров для нулевой толщины сгоревшего свода e .

Знак «+» в (16), (17) берется в том случае, если соответствующий параметр увеличивается при увеличении толщины сгоревшего свода, знак «-» – в противоположном случае.

Входящие в (14), (15) значения нижних и верхних границ i -й зоны $z_{Hi}(e)$, $z_{Bi}(e)$ определяются как координаты z точек пересечения линии, формирующей след поверхности горения в i -й зоне, с линиями, формирующими следы поверхностей горения в зонах $(i-1)$ и $(i+1)$ соответственно.

Обобщенный алгоритм определения геометрических характеристик заряда РДТТ В алгоритме расчета поверхности горения и внутреннего объема для заданного диапазона $[e_H - e_K]$ изменения толщины сгоревшего свода e с требуемым шагом Δe можно выделить три основные части:

– определение границ зон для заданного значения толщины сгоревшего свода e (алгоритм А);

– определение по соотношениям (6) – (7) площади проходного сечения канала заряда в плоскости, перпендикулярной оси z , и свободного объема для текущего значения толщины сгоревшего свода e в i -й зоне (алгоритм Б);

– определение поверхностей горения и внутренних объемов по соотношениям (9) – (15) (алгоритм В).

Обобщенный алгоритм расчета поверхности горения и внутреннего объема можно представить в следующем виде.

1. Задаются начальные и конечные значения толщин сгоревшего свода e_H и e_K , а также число расчетных точек по толщине сгоревшего свода n .
2. Определяется шаг изменения толщины сгоревшего свода

$$\Delta e = \frac{e_K - e_H}{n - 1}.$$

3. Задается начальное значение $e = e_H$.

4. Для заданного значения толщины сгоревшего свода e по алгоритму А вычисляются значения границ зон $z_{Hi}(e)$, $z_{Bi}(e)$.

5. Если поверхность горения заряда состоит из поверхностей вращения, то расчет продолжается с п. 6, в противном случае – с п. 7.

6. По соотношениям (9) – (15), в зависимости от типа образующих поверхностей вращения, определяются внутренние объемы и поверхности горения во всех зонах заряда и производится их суммирование, далее расчеты продолжают с п.9.

7. По соотношениям (6) – (7), с использованием алгоритма Б, определяются значения площади проходного сечения канала заряда и свободного объема в каждой зоне заряда и в камере сгорания в целом.

8. Производится сравнение текущего значения толщины сгоревшего свода e с начальным значением e_H .

Если $e > e_H$, то по (8) определяются средние значения площади поверхностей горения во всех зонах заряда и далее расчеты продолжают с п.9.

Если $e = e_H$, то величине толщины сгоревшего свода e присваивается значение $e + \Delta e$ и расчеты продолжают с п. 4.

9. Производится сравнение текущего значения толщины сгоревшего свода e с конечным значением e_K .

Если $e < e_K$, то значение e увеличивается на Δe и расчеты повторяются с п.4.

В противном случае $e = e_K$ и вычисления заканчиваются.

Выводы. Сформулирована комплексная задача выбора облика и оптимизации проектных параметров и программ управления движением ТРН сверхлегкого класса. Разработана структура математической модели ТРН, приведены элементы математической модели, позволившие свести задачу теории оптимального управления к задаче нелинейного математического программирования с ограничениями в виде равенств, неравенств и дифференциальных связей. Приведенные элементы математической модели и алгоритм могут быть использованы проектными организациями на начальном этапе проектирования объектов ракетно-космической техники различного назначения.

1. Аллатов А. П. Методология системных исследований конкурентоспособности транспортных космических систем / А. П. Аллатов, В. К. Дорошкевич, В. И. Кузнецов // Информационные технологии в управлении сложными системами : международная научно-практическая конференция, май, 2008 г., Днепропетровск: сборник докладов и тезисов. – Днепропетровск : ИТМ НАНУ и НКАУ, 2008. – С. 64 – 67.
2. Аллатов А. П. Исследования конкурентоспособных обликов транспортных космических систем. / А. П. Аллатов, В. К. Дорошкевич, В. И. Кузнецов, И. Ф. Мостипан // Информационные технологии в управлении сложными системами : международная научно-практическая конференция, май, 2008 г., Днепропетровск : сборник докладов и тезисов.– Днепропетровск : ИТМ НАНУ и НКАУ, 2008. – С. 68 – 71.
3. Афанасьев И. Наноракета для наноспутников? / И. Афанасьев, Д. Воронцов // Новости космонавтики. – 2007. – Т.17, № 7 (294). – С. 39 – 41.
4. Аллатов А. П. Комплексная задача оптимизации основных проектных параметров и программ управления движением ракет космического назначения / А. П. Аллатов, В. С. Сенькин // Техническая механика. – 2011. – № 4. – С. 98 – 113.
5. Кротов В. Ф. Методы и задачи оптимального управления / В. Ф. Кротов, В. И. Гурман. – М. : Наука, 1973. – 446 с.

6. Понтрягин Л. С. Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. – М. : Наука, 1969. – 385 с.
7. Брайсон А. Прикладная теория оптимального управления / А. Брайсон, Хо Ю-Ши. – М. : Мир, 1972. – 544 с.
8. Тарасов Е. В. Алгоритм оптимального проектирования летательного аппарата / Е. В. Тарасов. – М. : Машиностроение, 1970. – 364 с.
9. Анпазов Р. Ф. Баллистика управляемых ракет дальнего действия / Р. Ф. Анпазов, С. С. Лагров, В. П. Мишин. – М. : Наука, 1966. – 307 с.
10. Лебедев А. А. Баллистика ракет / А. А. Лебедев, Н. Ф. Герасюта. – М. : Машиностроение, 1970. – 244 с.
11. Сенькин В. С. Выбор программы управления движением космического аппарата при переходе с начальной круговой орбиты на заданную конечную круговую орбиту / В. С. Сенькин // Техническая механика. – 2003. – № 2. – С. 79 – 87.
12. Сенькин В. С. Оптимизация проектных параметров ракеты-носителя сверхлегкого класса / В. С. Сенькин // Техническая механика. – 2009. – № 1. – С. 80 – 88.
13. Батищев Д. И. Поисковые методы оптимального проектирования / Д. И. Батищев. – М. : Сов. радио, 1975. – 216 с.
14. Шкадов М. Л. Механика оптимального пространственного движения летательных аппаратов в атмосфере / М. Л. Шкадов, Р. С. Буханова, В. Ф. Илларионов, В. П. Плохих. – М. : Машиностроение, 1972. – 240 с.
15. Разумеев В. Ф. Основы проектирования баллистических ракет на твердом топливе / В. Ф. Разумеев, Б. К. Ковалев. – М. : Машиностроение, 1976. – 356 с.
16. Орлов Б. В. Термодинамические и баллистические основы проектирования ракетных двигателей на твердом топливе / Б. В. Орлов, Г. Ю. Мазинг. – М. : Машиностроение, 1968. – 535 с.
17. Абугов Д. И. Теория и расчет ракетных двигателей твердого топлива / Д. И. Абугов, В. М. Бобылев. – М. : Машиностроение, 1987. – 272 с.

Институт технической механики
НАН Украины и НКА Украины,
Днепропетровск

Получено 03.04.12,
в окончательном варианте 26.04.12.