

РАСЧЕТ ОТТАЛКИВАЮЩЕГО ЭЛЕКТРОНЫ САМОСОГЛАСОВАННОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ ВБЛИЗИ ОБТЕКАЕМОГО ПОТОКОМ РАЗРЕЖЕННОЙ ПЛАЗМЫ ЦИЛИНДРА

В приближении центрального отталкивающего цилиндрического поля получены расчетные формулы для концентрации электронов вблизи каталитической поверхности. Обосновано использование полученных формул при расчетах самосогласованного электрического поля в окрестности поперечно обтекаемого бесстолкновительной плазмой бесконечного проводящего цилиндра.

У наближенні центрального відразливого циліндричного поля отримані розрахункові формули для концентрації електронів біля каталітичної поверхні. Обґрунтовано використання отриманих формул при розрахунках самоузгодженого електричного поля навколо поперечно обтічного беззіткнувальною плазмою нескінченного провідного циліндра.

Calculating formulae of electron concentration near the catalytic surface are derived as an approximation of a central repelling cylindrical field. The formulae presented are validated for calculations of an electrical self-matched field in the vicinity of the infinitely conducting cylinder with the flow of the transverse collision-free plasma.

Развитие современных методов исследования и диагностики процессов в низкотемпературной плазме все более связывают с численным моделированием, позволяющим детально рассматривать характеристики плазмы при комплексном и частичном воздействии множества определяющих факторов. При этом, из-за сложности математической задачи в полной постановке даже при двумерном моделировании бесстолкновительной плазмы, для практики по-прежнему остаются актуальными упрощенные модели плазмы – кинетические уравнения Власова–Пуассона и уравнения Пуассона–Больцмана. Вблизи каталитической поверхности равновесное распределение Больцмана для заряженных частиц нарушается, вследствие поглощения зарядов поверхностью. Поэтому, при проведении детальных исследований приповерхностных эффектов в плазме необходимо учитывать каталитичность поверхности. Цель настоящей статьи – получение для электронов вблизи поглощающей заряд поверхности расчетных формул и обоснование их использования в модели Пуассона–Больцмана в отталкивающем самосогласованном электрическом поле при сверхзвуковом обтекании проводящего цилиндра бесстолкновительной плазмой.

В отсутствие магнитного поля заряженные компоненты низкотемпературной разреженной трехкомпонентной плазмы, состоящей из нейтралов, ионов и электронов, в самосогласованном электрическом поле в стационарной постановке моделируются кинетическими уравнениями Власова–Пуассона

$$\mathbf{v} \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{x}} + \frac{ze}{m_i} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{0}, \quad (1)$$

$$\mathbf{v} \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{x}} - \frac{e}{m_e} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{0}, \quad (2)$$

$$\Delta\varphi = -\frac{e}{\varepsilon_0}(zn_i - n_e), \quad n_\alpha = \int_{\Omega_V} f_\alpha dv, \quad \alpha = i, e. \quad (3)$$

Здесь f – функция распределения по скоростям, x – пространственные координаты, v – скорость частиц, e – элементарный заряд, ε_0 – электрическая постоянная, z – зарядовое число ионов, m – масса частиц, φ – электрический потенциал, Ω_V – расчетная область в пространстве скоростей. Индексы i, e соответствуют ионной и электронной компонентам плазмы.

На границах расчетной области в физическом пространстве определены граничные условия: поглощение заряда (условия каталитичности) и условие поддержания заданного потенциала на поверхности проводящего тела; распределение частиц по скоростям и нулевой потенциал плазмы (условие квазинейтральности) на внешних границах расчетной области.

Обычно алгоритм решения задачи (1) – (3) сводится к двум итерационным процессам [1]: 1) решение кинетического уравнения для ионов (1) при заданном поле электрического потенциала; 2) решение кинетического уравнения для электронов в самосогласованном электрическом поле (2), (3) при заданном поле концентрации ионов. Второй итерационный процесс является внутренним для первого.

На больших расстояниях от поверхности (превышающих дебаевский радиус экранирования) при максвелловском распределении невозмущенной плазмы справедливо равновесное распределение электронов по скоростям, приводящее к распределению Больцмана для концентрации

$$n_e = n_0 \exp(e\varphi/kT_e). \quad (4)$$

При этом задача для электронов в самосогласованном электрическом поле (2), (3) заменяется уравнением Пуассона–Больцмана [2, 3]. Решение задачи в такой постановке рассмотрено в ряде работ [2 – 8, 10, 11], получены фундаментальные результаты, выявлены характерные особенности поведения низкотемпературной разреженной плазмы в окрестности обтекаемых заряженных тел. Показано [5], что в покоящейся плазме при отрицательном потенциале $|e\varphi_0/kT_e| > 6$ область равновесности электронов практически достигает поверхности тела. В случае же сверхзвукового обтекания [2 – 4], для электронного газа вблизи поверхности в области следа требуется более полное описание.

Рассмотрим на примере задачи поперечного обтекания бесстолкновительной плазмой бесконечного кругового цилиндра возможность использования распределения Больцмана для электронов в центральном электрическом поле при расчете несимметричного самосогласованного поля вблизи проводящей поверхности. Для проведения таких исследований можно использовать любое правдоподобное для рассматриваемого режима обтекания распределение ионов в пространстве.

В прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ ось цилиндра направим по оси Oz . Распределение ионов полагаем "замороженным", самосогласованное электрическое поле определяется электронной компонентой плазмы, магнитное поле отсутствует, скорости нерелятивистские, скорость потока V направлена вдоль оси Ox . Распределение электронов по скоростям в невозмущенной плазме считаем максвелловским. Поверхность тела катали-

тическая (полностью поглощает электроны), электронная эмиссия отсутствует. Рассматриваем отталкивающее поле для электронов (потенциал поверхности отрицателен относительно невозмущенной плазмы). В такой постановке задача двумерная, симметричная относительно плоскости Oxz и все параметры определяются точками на плоскости Oxy . Каждой точке пространства $\mathbf{x} = (x, y)$ поставим в соответствие радиус-вектор $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

При заданном пространственном распределении ионной плотности $n_i = n_i(\mathbf{x})$ и известной аналитической зависимости $n_e = n_e(\mathbf{x}, \varphi)$, расчет распределения электронов в самосогласованном электрическом поле в безразмерных переменных сводится к математической модели

$$\Delta\varphi = -\xi^2(zn_i(\mathbf{x}) - n_e(\mathbf{x}, \varphi)), \quad (5)$$

$$\varphi|_{r=1} = \varphi_0, \quad \varphi|_{\mathbf{x} \rightarrow \infty} = 0, \quad (6)$$

где $\xi = r_0/\lambda_d$, λ_d – дебаевский радиус экранирования, r_0 , φ_0 – радиус и потенциал поверхности цилиндра ($\varphi_0 < 0$, т.к. поле отталкивающее для электронов). Переменные задачи отнесены к следующим характерным величинам: концентрации ионов и электронов – к концентрации в невозмущенной плазме n_0 , скорости компонент плазмы – к их тепловым скоростям u_α , пространственные координаты – к радиусу цилиндра r_0 , электрический потенциал – к величине e/kT_e .

Известно [9], что задача Дирихле для нелинейного эллиптического уравнения (5) корректна, если правая часть уравнения неубывающая по φ функция. Отсюда следует, что граничная задача (5), (6) корректна при $[n_e(\mathbf{x}, \varphi)]'_\varphi \geq 0$.

Получим формулы для расчета распределения концентрации электронов $n_e(\mathbf{x}, \varphi)$ в центральном отталкивающем поле цилиндра с учетом поглощения электронов на поверхности. Аналитическое решение $f_e(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \varphi)$ кинетического уравнения (2) при фиксированном центральном отталкивающем поле $\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(r)$ находится простым пространственным ограничением траекторий (орбитальные ограничения) [2, 10]. Поскольку в невозмущенной плазме принято максвелловское распределение электронов по скоростям, в результате интегрирования найдем формулу для распределения электронов вблизи отрицательно заряженного цилиндра

$$n_e(r, \varphi, U) = e^\varphi \left(1 - \frac{1}{\pi} \int_0^{q(r)} e^{\frac{-U}{1-r^2 \sin^2 \alpha}} d\alpha \right), \quad q(r) = \arcsin\left(\frac{1}{r}\right). \quad (7)$$

Здесь $U = \varphi - \varphi_0$, $\varphi_0 \leq \varphi \leq 0$.

Для практических расчетов формула (7) неудобна. Раскладывая показатель экспоненты в степенной ряд по переменной интегрирования и сохраняя два члена разложения, получим приближенную формулу для распределения электронов в центральном отталкивающем поле

$$n_e(r, \varphi, U) = e^\varphi \cdot \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{e^{-U}}{r\sqrt{U}} \operatorname{erf}(r \cdot q(r) \cdot \sqrt{U}) \right). \quad (8)$$

При малых U формула (8) имеет особенность, которая легко устраняется разложением функции ошибок в ряд с сохранением двух членов

$$n_e(r, \varphi, U) = e^\varphi \cdot \left(1 - \frac{q(r)}{\pi} \left[1 - \left(1 + \frac{(r \cdot q(r))^2}{3} \right) U \right] \right). \quad (9)$$

Максимальная погрешность формулы (9) достигается на поверхности тела ($r = 1$). При $U < 0,05$ погрешность формулы (9) относительно формулы (8) не превышает 0,15 %, при $U < 0,12 - 1$ %.

Полученные формулы применимы для $\varphi \geq \varphi_0$. Корректность постановки задачи (5), (6), (8) легко подтверждается простым дифференцированием соотношения (8) по φ и анализом функции $[n_e(x, \varphi)]'_\varphi$. В области определения задачи ($r \geq 1$, $\varphi \geq \varphi_0$) функция $\psi(r, U) = e^{-\varphi} [n_e(r, \varphi)]'_\varphi$ монотонная, достигает наибольшего значения при $r = 1$ и $\varphi = \varphi_0$ ($\psi(1, 0) = 1 + \pi^2/24$) и стремится с ростом r и φ к значению $\psi = 1$. Таким образом, условие $[n_e(x, \varphi)]'_\varphi \geq 0$ выполняется и, следовательно, краевая задача (5), (6), (8) поставлена корректно.

Структура электрического поля при обтекании тела разреженной плазмой достаточно хорошо изучена [2, 3, 4, 7, 11]. Основными параметрами задачи, определяющими режим обтекания и структуру электрического поля, являются – скоростное отношение $S = V/\sqrt{2kT_i/m_i}$, размер тела относительно дебаевского радиуса ξ и потенциал поверхности φ_0 относительно невозмущенной плазмы. Можно выделить такие характерные случаи: симметричное электрическое поле ($S \sim 0$), несимметричное электрическое поле без "провала" потенциала в следе ($S \gg 0$, $\varphi_m \geq \varphi_0$; см., например, рис. 2, а)) и электрическое поле с "провалом" потенциала в следе ($S \gg 1$, $\varphi_m < \varphi_0$; см., например, рис. 2, б)). Здесь φ_m – минимальное значение потенциала φ в окрестности обтекаемого тела.

Априори определить к какому из выделенных случаев принадлежит структура следа при обтекании заряженного тела можно из анализа предельного случая гиперзвукового обтекания потоком плазмы, когда ионный след представляется вырезанной полуполосой – $n_i = 1$ при $|y| \geq 1$ и $n_i = 0$ при $|y| < 1$. Начиная с некоторого расстояния от тела вниз по потоку, где влияние потенциала поверхности ослаблено, а для электронов справедливо равновесное распределение $n_e = e^\varphi$, задача (5) – (6) становится одномерной, допускающей аналитическое решение. В этом случае потенциал определяется только значением ξ , а его минимум φ_m^* достигается на плоскости симметрии задачи $y = 0$. На рис. 1 показано изменение электрического потенциала на плоскости симметрии модельной задачи в дальнем следе при гиперзвуковом обтекании тела потоком плазмы в зависимости от параметра ξ . С точностью

до 15% для $\xi \geq 0,5$ значения потенциала на плоскости симметрии φ_m^* можно оценить по формуле

$$\varphi_m^*(\xi) \approx \begin{cases} -1.25 \ln(\xi + 1), & \xi \leq 4 \\ -(1.4 + 0.00033 \cdot \xi) \ln(\xi + 1), & \xi > 4 \end{cases} \quad (10)$$

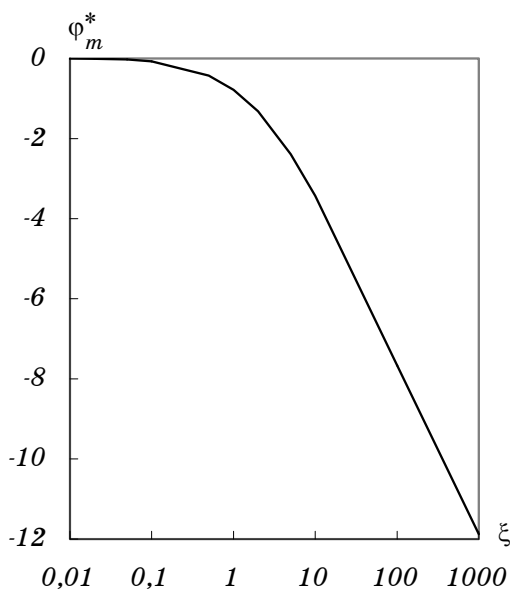


Рис. 1

Для малых ξ относительная погрешность аппроксимации (10) возрастает, однако при этом значения потенциала малы ($|\varphi_m^*(\xi)| < \xi$) и глубокие "провалы" потенциала в следе не возможны.

Таким образом, получив из (10) оценку минимального значения потенциала $\varphi_m \approx \varphi_m^*$ и проверяя условие $\varphi_m < \varphi_0$, можем априори судить о появлении и "глубине" "провала" потенциала в следе при сверхзвуковом обтекании цилиндра разреженной плазмой.

Краевая задача (5), (6) рассматривается при фиксированном распределении ионов $n_i(\mathbf{x})$, соответствующем конкретным значениям параметров задачи обтекания цилиндра

(S, ξ, φ_0). Приближение поля концентрации ионов $n_i(\mathbf{x})$ находилось в результате нескольких (3..5) итераций решения соответствующей системы Власова–Пуассона–Больцмана (1), (3), (4). Кинетические уравнения Власова для ионов (1) решались численно методом характеристик. Расчет макропараметров (концентраций) сводится к вычислению моментов соответствующих функций распределения по скоростям. Поскольку из-за пространственного ограничения (наличия тела) функции распределения разрывные, при численном интегрировании проводилась локализация разрывов в пространстве скоростей [12].

Решение нелинейной краевой задачи (5), (6) при описании распределения электронов формулами (8), (9) сравнивается с ее решением при распределении Больцмана (4), не учитывающем поглощение электронов поверхностью цилиндра. Нелинейная зависимость концентрации электронов от потенциала линеаризуется

$$n_e(\mathbf{x}, \varphi) \approx n_e(\mathbf{x}, \varphi^*) + e^{\varphi^*} (\varphi - \varphi^*), \quad (11)$$

где $\varphi^*(\mathbf{x})$ – поле электрического потенциала, относительно которого проводится линеаризация ("опорный" потенциал).

Линеаризованная задача (5), (6), (11) решается простыми итерациями $\{\varphi^{(k)}, k=0,1,\dots\}$ при конечно-разностной аппроксимации задачи на сгущаю-

щихся сетках с периодической коррекцией "опорного" потенциала $\varphi^*(\mathbf{x}) = \varphi^{(k)}(\mathbf{x})$ по величине нормы $\|n_e(\mathbf{x}, \varphi^{(k)}) - n_e(\mathbf{x}, \varphi^*)\|_C$. Контроль сходимости итераций осуществляется по величине нормы $\|\varphi^{(k)} - \varphi^{(k-1)}\|_C$ и невязке разностного аналога уравнения (5) в узлах сетки.

Проведены параметрические исследования задачи (5), (6) при заданном пространственном распределении ионной плотности $n_i = n_i(\mathbf{x})$ и аналитической зависимости для электронов (8) для характерных режимов обтекания цилиндра разреженной плазмой. Расчеты распределения электронов в самосогласованном электрическом поле выполнены для $S = 0..10$; $\xi = 0,1..10$; $\varphi_0 = -0,1..-6$. На рис. 2 представлены результаты расчетов изменения вдоль плоскости симметрии задачи электрического потенциала (толстые линии) и концентрации электронов (тонкие линии) без учета (сплошные кривые) и с учетом (штриховые кривые) поглощения электронов поверхностью тела для случаев $S = 10$, $\varphi_0 = -2$, $\xi = 1$ (рис. 2, а) и $\xi = 10$ (рис. 2, б)). В области "провала" потенциала в следе (рис. 2, б)), где распределение электронов (8) не применимо, использовалось нейтральное приближение (прямолинейные траектории) распределения электронов с учетом поглощения поверхностью – $n_e(r, \varphi) = (1 - \arcsin(1/r)/\pi)e^\varphi$. Точками на рис. 2 показаны результаты решения кинетического уравнения Власова (2) для электронов. В масштабе рисунка значения потенциала, рассчитанные с учетом и без учета поглощения электронов поверхностью, не совпадают только в области ближнего следа при $\xi = 10$. Значения же концентраций электронов вблизи поверхности заметно различаются даже с наветренной стороны цилиндра.

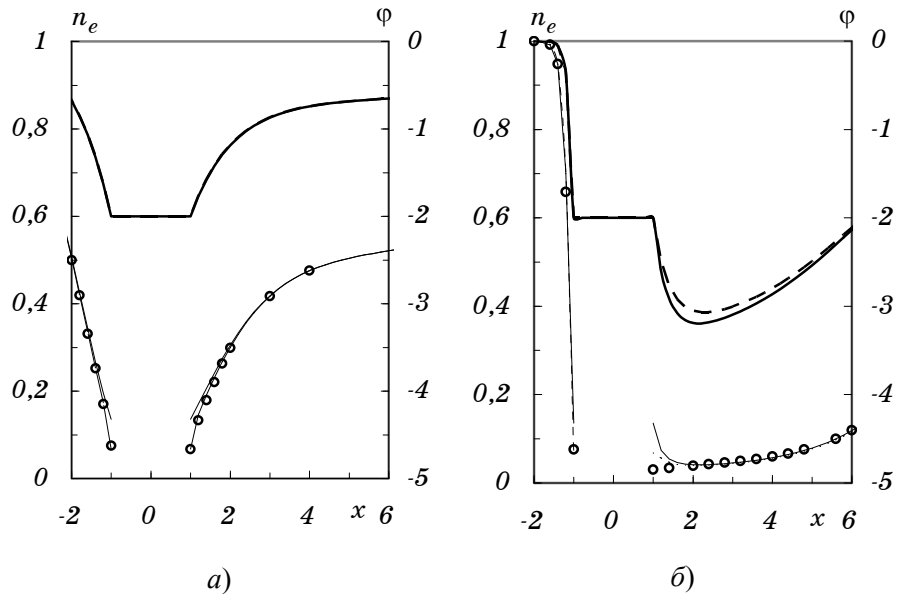


Рис. 2

Детально рассмотрены характерные случаи симметричного ($S = 0$) и несимметричного электрического поля без "провала" потенциала в следе ($\varphi_m^* \geq \varphi_0$). На рис. 3 – 5 представлены результаты расчетов изменения элект-

трического потенциала (a) и концентрации электронов (b) вдоль внешней нормали в точках поверхности цилиндра. Результаты представлены в координатах (h, α) , где h – расстояние до поверхности ($h = r - r_0$), α – угол внешней нормали относительно направления против потока плазмы ($\alpha = 0$ соответствует точке поверхности цилиндра $x = (-1, 0)$, $\alpha = \pi/2$ – точке $x = (0, 1)$). Внешняя нормаль к поверхности цилиндра определяется координатой α – $\alpha = 0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, 10\pi/12, 11\pi/12, \pi$. Параметры φ и n_e монотонно зависят от α как для равновесного приближения Пуассона–Больцмана, так и для задачи (5), (6), (8) – φ и n_e убывают при увеличении α , а величина φ/φ_0 возрастает с ростом α . Поэтому, кривые, соответствующие приведенной последовательности значений α , располагаются на рисунках для относительного потенциала φ/φ_0 снизу вверх, для концентрации n_e – сверху вниз.

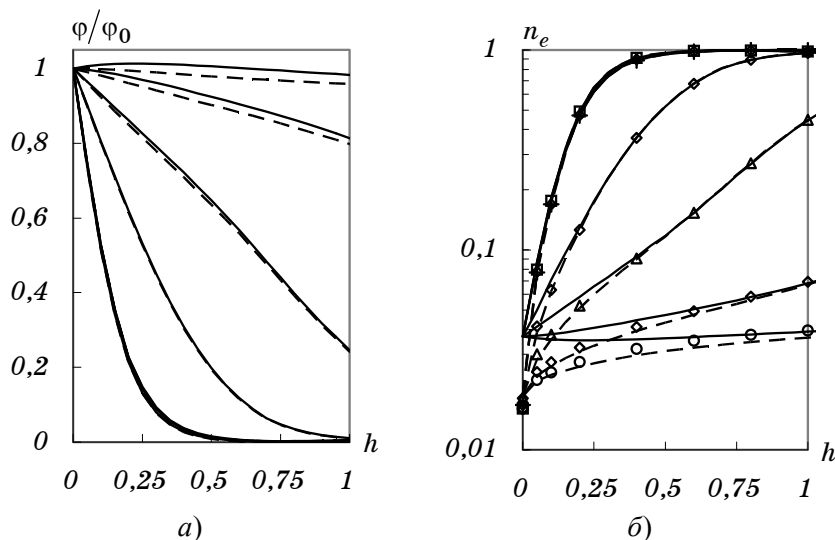


Рис. 3

Сплошными кривыми представлены значения параметров (потенциала φ и концентрации n_e), полученные в равновесном приближении Пуассона–Больцмана (5), (6), (4); штриховыми кривыми показаны изменения параметров, полученные из решения задачи (5), (6), (8), учитывающей поглощение электронов поверхностью тела. Точками на рисунках показаны результаты решения кинетического уравнения Власова (2) для электронов при электрическом потенциале, соответствующем решению задачи (5), (6), (8). Таким образом, близость решений уравнения Власова (2) и задачи (5), (6), (8) для концентрации электронов служит критерием достоверности получаемых результатов.

На рис. 3 представлены изменения потенциала φ и концентрации n_e при $S = 10$, $\varphi_0 = -3,3$, $\xi = 10$, на рис. 4 – при $S = 10$, $\varphi_0 = -1$, $\xi = 1,25$ и на рис. 5 – при $S = 10$, $\varphi_0 = -0,1$, $\xi = 0,11$. На рис. 3, 4 точками показаны решения уравнения Власова (2), соответствующие приведенным выше значениям координаты α , на рис. 5 представлены решения уравнения Власова для $\alpha = 0, 3\pi/4, \pi$.

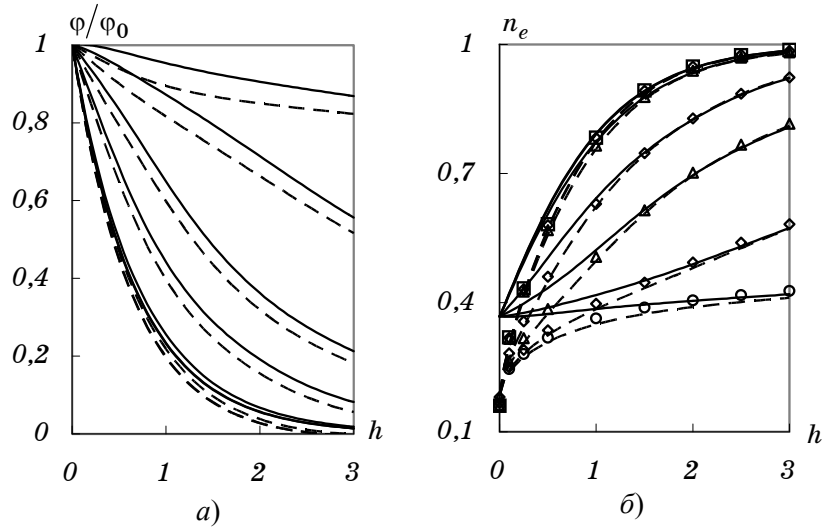


Рис. 4

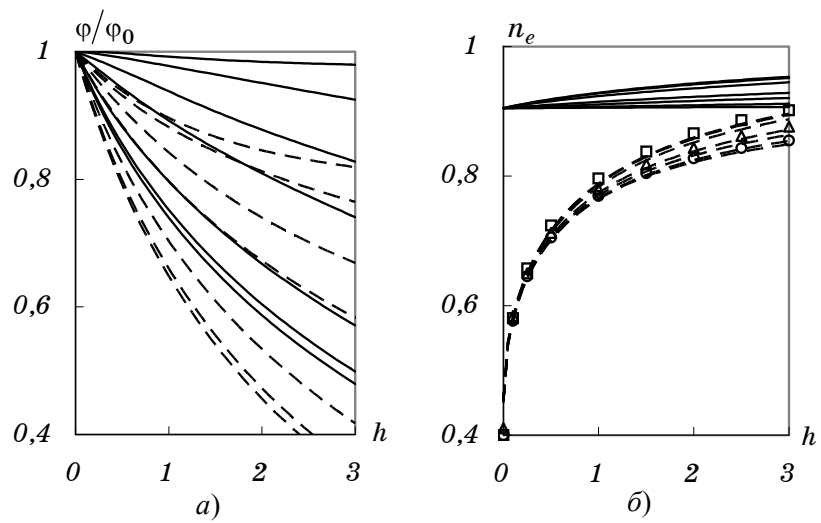


Рис. 5

Как и следовало ожидать, наибольшее влияние каталитической поверхности на самосогласованное электрическое поле при больших ξ ($\xi \geq 1$) наблюдается в области следа за обтекаемым цилиндром, с уменьшением ξ ($\xi < 1$) влияние поглощения электронов поверхностью тела наблюдается всюду в окрестности тела.

Анализ полученных результатов позволяет сделать заключение о достаточности применения распределения Больцмана с учетом поглощения электронов поверхностью (8) всюду в расчетной области для случаев электрического поля без "провала" потенциала в следе. Использование такого подхода позволяет сократить время расчета концентрации электронов в самосогласованном электрическом поле при отрицательном заряде тела в несколько раз. В случае электрического поля с выраженным "провалом" потенциала за обтекаемым телом в ближней зоне следа необходимо рассматривать более пол-

ную модель самосогласованного поля, например, уравнения Власова–Пуассона.

1. Котельников М. В. Вольт-амперные характеристики цилиндрического зонда в потоке столкновительной и бесстолкновительной плазмы / М. В. Котельников // ТВТ. – 2008. – №4. – С. 629 – 632.
2. Альперт Л. А. Искусственные спутники в разреженной плазме / Л. А. Альперт, А. В. Гуревич, Л. Г. Пятаевский. – М.: Наука, 1964. – 382 с.
3. Гуревич А. В. Ионосферная аэродинамика / А. В. Гуревич, Л. П. Пятаевский, В. В. Смирнова // Успехи физ. наук. – 1969, – № 1. – С. 3 – 49.
4. Смирнова В. В. Электрическое поле в возмущенной зоне за цилиндром, обтекаемым разреженной плазмой / В. В. Смирнова // Геомагнетизм и аэронавигация. – 1978. – № 1. – С. 41 – 44.
5. Алексеев Б. В. Расчет возмущенной зоны вблизи зонда численным методом / Б. В. Алексеев, В. А. Котельников, В. Н. Новиков // Физика плазмы. – 1979. – 5, Вып. 4. – С. 920 – 922.
6. Latramboise J. G. Theory of Spherical and Cylindrical Langmuir Probes in a Collisionless Maxwellian Plasma at Rest. Report, No. 100. – Univ. of Toronto, Institute of Aerospace Studies. – 1966. – 210 с.
7. Шувалов В. А. О структуре электростатического поля в следе за телом в потоке разреженной плазмы / Э. А. Зельдина, В. А. Семенов, В. А. Шувалов // Геомагнетизм и аэронавигация. – 1976. – 16, № 5. – С. 795 – 798.
8. Алексеев П. В. Зондовый метод диагностики плазмы / П. В. Алексеев, В. А. Котельников. – М.: Энергоатомиздат, 1988. – 240 с.
9. Курант Р. Уравнения с частными производными / Р. Курант. – М.: Мир, 1964. – 830 с.
10. Грановский В. Л. Электрический ток в газе / В. Л. Грановский. – М.: Гостехиздат, 1952. – 430 с.
11. Шувалов В. А. Структура ближнего следа за цилиндром в потоке неравновесной разреженной плазмы / В. А. Шувалов // Геомагнетизм и аэронавигация. – 1980. – №3. – С. 425 – 429.
12. Калиткин Н. Н. Численные методы / Н. Н. Калиткин. – М.: Наука, 1978. – 512 с.

Ин-т технической механики
НАН Украины и НКА Украины,
Днепропетровск

Получено 06.09.12,
в окончательном варианте 06.09.12