

## К ДИНАМИКЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА. МОМЕНТЫ ЦЕНТРОБЕЖНЫХ УСКОРЕНИЙ

С целью определения механических закономерностей движения свободного твердого тела рассмотрены моменты центробежных ускорений, возникающие при его движении относительно центра масс. Показано, что момент, вызванный вращением главной центральной оси инерции, и момент, связывающий это вращение с вращением вокруг оси инерции, полностью определяют закономерности движения тела. Дана интерпретация причин возникновения этих моментов.

З метою визначення механічних закономірностей руху вільного твердого тіла розглянуто моменти відцентрових прискорень, що виникають при його русі відносно центра мас. Показано, що момент, викликаний обертанням головної центральної осі інерції, та момент, що зв'язує це обертання з обертанням навколо осі інерції, повністю визначають закономірності руху тіла. Надана інтерпретація причин виникнення цих моментів.

The moments of centrifugal accelerations in motion of a free rigid body relative to the center of mass are considered in order to determine the mechanical regularities of its motion. It is shown that the moment caused by the rotation of a principal central axis of inertia, and the moment connecting this rotation with the rotation around the axis of inertia, completely define the regularities of motion of the body. Causes of these moments are interpreted.

**Введение.** Динамика твердого тела (ТТ) является, по-видимому, одной из наиболее исследованных областей физики. Вместе с тем, успехи математических исследований прошлого века, как представляется, затмили физическое содержание особенностей динамики ТТ, и к настоящему времени имеет место определенный недостаток их физического (механического) понимания. В современных учебниках теоретической и аналитической механики мало уделено места анализу причинно-следственных связей движения ТТ, а результаты его исследований представлены как выводы из решений дифференциальных уравнений. В силу этого, по-видимому, такие явления динамики ТТ, как стабилизация вращением, гироскопический момент, прецессионное движение и т. д. в некоторых случаях приобретают несколько таинственный (мистический) характер [1].

Целью данной работы является определение механических причин закономерностей движения свободного ТТ. Авторы отдают себе отчет, что подобные исследования ранее должны были быть проведены. Но, к сожалению, они их не встречали. Прекрасная интерпретация движения свободного ТТ, предложенная Луи Пуансо, является значительным достижением в представлении движения ТТ. Но, по-видимому, есть много людей (к которым относят себя и авторы), которым трудно представить качение эллипсоида по неподвижной поверхности. Не менее трудной кажется и задача представить одновременное вращение тела по трем взаимно перпендикулярным осям. Поэтому одной из целей этой работы является также выработка более простых образов движения ТТ.

Актуальность этой работы связана с задачами управления ориентацией космических аппаратов (КА), в том числе и задачами переориентации на значительные угловые величины. Сложности задач синтеза устойчивого (робастного) управления, отсутствие вполне обоснованных критериев качества управления часто не позволяют удовлетворительно решить задачу синтеза управления переориентацией КА с использованием формальных процедур теории управления [2, 3]. Представляется, что учет закономерностей динамики

ки управляемого объекта во многих случаях является необходимым условием успешности (эффективности) законов управления. Механические образы движения управляемого объекта также необходимы для выбора рабочих гипотез (предположений) об эффективных законах управления, для анализа полученных результатов и для проверки правильности расчетов.

**Движение ТТ как движение системы материальных точек.** В теоретической механике материальная система рассматривается как «собрание материальных точек» [4]. А модель абсолютно твердого тела в динамике рассматривается как «собрание материальных точек, остающихся на неизменных расстояниях друг от друга, что можно мыслить обеспечивающимся с помощью лишенных массы нерастяжимых стерженьков, соединяющих эти точки...» [4].

Покажем, что в задачах динамики ТТ распределение его масс можно представить 4-мя точками, находящимися на неизменном расстоянии друг от друга. Рассмотрим произвольное ТТ и связанную с ним систему координат (СК), оси которой совпадают с главными центральными осями инерции тела. Пусть  $J_x, J_y, J_z$  – главные центральные моменты инерции ТТ. Тогда, располагая материальные точки массы  $m$  каждая, как показано на рис. 1, и вычисляя моменты инерции системы точек относительно осей, получим отношения, связывающие расстояния и моменты инерции тела и обеспечивающие взаимно однозначное соответствие между моментами инерции ТТ и расстояниями в рассматриваемой системе. Выражения для моментов инерции такого ТТ имеют вид

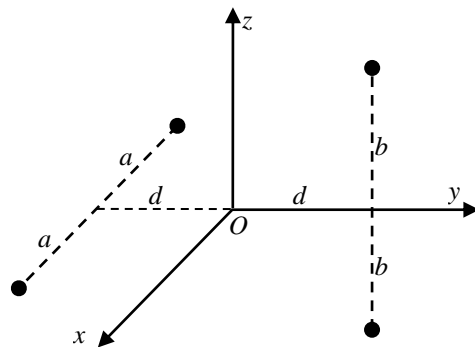


Рис. 1

отношения, связывающие расстояния и моменты инерции тела и обеспечивающие взаимно однозначное соответствие между моментами инерции ТТ и расстояниями в рассматриваемой системе. Выражения для моментов инерции такого ТТ имеют вид

$$\begin{aligned} J_x &= 2d^2m + 2(d^2 + b^2)m; \\ J_y &= 2b^2m + 2a^2m; \\ J_z &= 2(d^2 + a^2)m + 2d^2m. \end{aligned}$$

Тогда можно записать

$$\begin{aligned} J'_x &= 4d^2 + 2b^2; & 8d^2 &= J'_x + J'_z - J'_y; \\ J'_y &= 2b^2 + 2a^2; & \text{или} & & 4b^2 &= J'_x + J'_y - J'_z; \\ J'_z &= 4d^2 + 2a^2; & 4a^2 &= J'_y + J'_z - J'_x; \end{aligned}$$

где  $J'_i = J_i/m$  ( $i = x, y, z$ ).

Таким образом, для произвольного ТТ можно построить динамически эквивалентную систему 4-х материальных точек.

Для представления движения ТТ, по мнению авторов, более удобно использовать следующую систему материальных точек (рис. 2), где точки лежат на прямых, параллельных главным центральным осям инерции. Связь

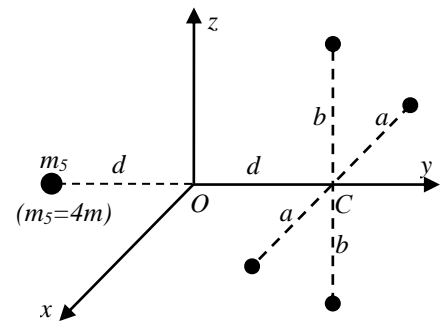


Рис. 2

между моментами инерции и расстояниями также задается взаимнооднозначными соотношениями

$$\begin{aligned} J_x &= (8d^2 + 2b^2)m; \\ J_y &= (2b^2 + 2a^2)m; \\ J_z &= (8d^2 + 2a^2)m; \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} 16d^2 &= J'_x + J'_z - J'_y; \\ 4b^2 &= J'_x + J'_y - J'_z; \\ 4a^2 &= J'_y + J'_z - J'_x. \end{aligned}$$

Таким образом, движение ТТ можно рассматривать как движение соответствующей пирамиды и представлять в виде суммы двух вращений:

- вращения высоты пирамиды, которую далее будем называть *осью* пирамиды, относительно центра масс ТТ (относительно точки  $O$ );
- вращения относительно оси пирамиды (в этом вращении не участвует точка  $m_5$ , а остальные четыре точки будут вращаться относительно центра масс, образованной ими системы 4-х точек – относительно точки  $C$ ).

**Взаимовлияние вращения оси пирамиды и вращения относительно оси.** Для определения закономерностей движения ТТ рассмотрим взаимовлияние указанных двух вращений. Основное наше внимание будет сосредоточено на моментах центростремительных ускорений, возникающих при таких вращениях, поскольку они и определяют особенности движения ТТ. Последовательность нашего рассмотрения будет следующей: сначала рассмотрим простейшую механическую модель, в которой взаимодействуют такие вращения. Для этой модели определим ускорения точек, а затем определим моменты центростремительных ускорений. Дадим механическую интерпретацию полученных результатов и определим основные эффекты действия возникающих моментов. Затем распространим результаты на движение свободного ТТ.

Рассмотрим движение гантели  $AB$  (рис. 3) с равными концевыми массами. Центр масс гантели лежит на оси  $Ox$ , перпендикулярной штанге гантели, и гантель может свободно вращаться относительно этой оси. В свою очередь, ось  $Ox$  (точка  $C$ ) совершает вращательное движение относительно точки  $O$  (рис. 3а).

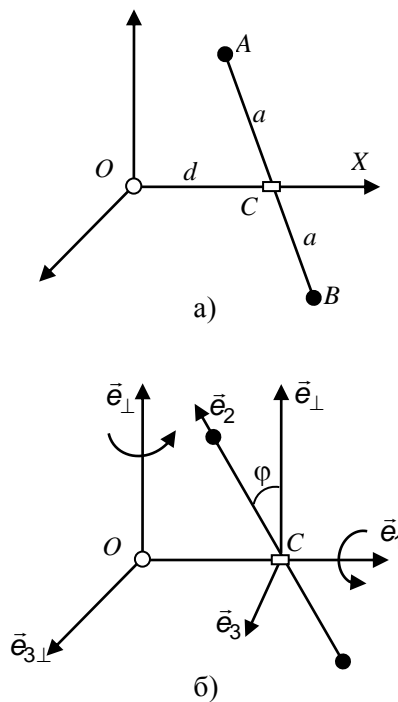


Рис. 3

Пусть ось вращения оси  $Ox$  постоянна в инерциальном пространстве и система вращается относительно нее с угловой скоростью  $\omega_{\perp}$  и относительно оси  $Ox$  с угловой скоростью  $\omega_1$ . Рассмотрим моменты центробежных ускорений, возникающие в этой модели.

Введем правые ортогональные СК (рис. 3б): полуподвижная СК (ПСК) с началом в точке  $O$  и ортами  $\bar{e}_1, \bar{e}_{\perp}, \bar{e}_{3\perp}$ ; связанная СК (ССК) с началом в точке  $C$  и ортами  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ .

Угол  $\varphi$  описывает ориентацию ССК в ПСК. Переход между ПСК и ССК осуществляется следующим образом

$$\begin{aligned} \bar{e}_2 &= \bar{e}_{\perp} \cos \varphi + \bar{e}_{3\perp} \sin \varphi; & \bar{e}_{\perp} &= \bar{e}_2 \cos \varphi - \bar{e}_3 \sin \varphi; \\ \bar{e}_3 &= -\bar{e}_{\perp} \sin \varphi + \bar{e}_{3\perp} \cos \varphi; & \bar{e}_{3\perp} &= \bar{e}_2 \sin \varphi + \bar{e}_3 \cos \varphi. \end{aligned}$$

Очевидно, что  $\omega_1 = \dot{\varphi}$ .

Радиус-векторы точечных масс относительно точки  $O$  равны

$$\vec{r}_{A,B} = d\bar{e}_1 \pm a\bar{e}_2.$$

Нетрудно получить, что скорости точек равны

$$\dot{\vec{r}}_{A,B} = -d\omega_{\perp}\bar{e}_{3\perp} \pm a(\omega_{\perp} \sin \varphi \bar{e}_1 + \omega_1 \bar{e}_3),$$

или в проекциях на оси ПСК

$$\dot{\vec{r}}_{A,B} = -d\omega_{\perp}\bar{e}_{3\perp} \pm a\omega_1(-\sin \varphi \bar{e}_{\perp} + \cos \varphi \bar{e}_{3\perp}) \pm a\omega_{\perp} \sin \varphi \bar{e}_1. \quad (1)$$

Отметим некоторые особенности скоростей точек, связанные с двойным вращением: появление скорости вдоль  $\bar{e}_1$  ( $\pm a\omega_{\perp} \sin \varphi \bar{e}_1$ ) и изменение скорости вдоль  $\bar{e}_{3\perp}$  ( $\mp a\omega_1 \sin \varphi \bar{e}_{3\perp}$ ), которое можно интерпретировать как изменение скорости вращения точек относительно  $\bar{e}_{\perp}$ .

Вычисление ускорений материальных точек несколько более громоздко. Но и в этом случае нетрудно получить следующее выражение

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}}_{A,B} &= -d\dot{\omega}_{\perp}\bar{e}_{3\perp} \pm a((\dot{\omega}_{\perp} \sin \varphi + \dot{\varphi}\omega_{\perp} \cos \varphi)\bar{e}_1 + \dot{\omega}_1\bar{e}_3) \pm \\ &\pm a(-\omega_{\perp}^2 \sin \varphi \bar{e}_{3\perp} + \omega_1\omega_{\perp} \cos \varphi \bar{e}_1 - \omega_1^2\bar{e}_2) - d\omega_{\perp}^2\bar{e}_1. \end{aligned} \quad (2)$$

В первой строке выражения (2) стоят ускорения, вызванные изменениями угловых скоростей, во второй – центростремительные ускорения. Проанализируем последние.

Ускорения  $\vec{W}_1 = -d\omega_{\perp}^2\bar{e}_1$  и  $\vec{W}_2 = \pm a(-\omega_1^2\bar{e}_2)$  понятны – это центростремительные ускорения движения точек по соответствующим кругам.

Ускорение  $\vec{W}_3 = \pm a(-\omega_{\perp}^2 \sin \varphi \bar{e}_{3\perp})$  вызвано вращением системы относительно  $\bar{e}_{\perp}$  с угловой скоростью  $\omega_{\perp}$ . Это ускорение можно интерпретировать как центробежное ускорение точек при вращении относительно точки  $C$  вокруг  $\bar{e}_{\perp}$  с радиусом  $a \sin \varphi$  (рис. 4).

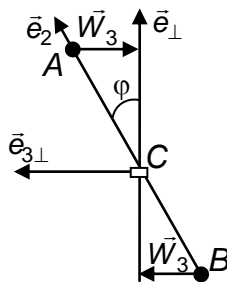


Рис. 4

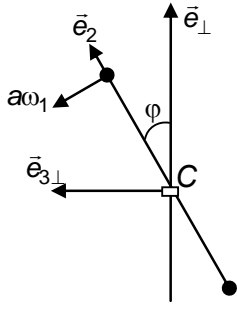


Рис. 5

Ускорение  $\vec{W}_4 = \pm a\omega_1\omega_\perp \cos\varphi \vec{e}_1$  является добавочным ускорением по оси  $\vec{e}_1$  и вызвано наличием двух вращений системы. Его можно интерпретировать как ускорение, вызванное изменением скорости точки по оси  $\vec{e}_{3\perp}$  из-за вращения вокруг  $\vec{e}_1$  (см. рис. 5 и пояснения к (1)),  $a\omega_1$  – скорость движения по окружности вокруг  $\vec{e}_1$ . Часть центростремительного ускорения относительно точки  $O$   $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ , которая соответствует вращению вокруг оси  $\vec{e}_\perp$ , в нашем случае можно записать в виде

$$\vec{\omega}_\perp \times (\vec{V}_C + (\vec{V}_a^* \cdot \vec{e}_{3\perp}) \vec{e}_{3\perp}),$$

где  $\vec{V}_a^*$  – скорость точки относительно  $C$ .

Это ускорение, как будет показано дальше, вызывает опрокидывающий момент. Возможно, рис. 6 поможет более наглядно понять причину возникновения этого момента. Напомним, что осецистремительное ускорение точки при ее вращении с угловой скоростью  $\vec{\omega}$  направлено по перпендикуляру, опущенному из точки на ось вектора угловой скорости, и равно произведению квадрата угловой скорости на расстояние от точки до оси.

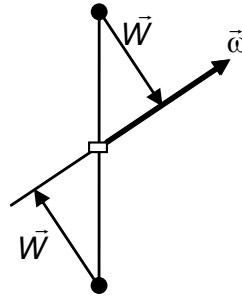


Рис. 6

Определим моменты центростремительных ускорений.

Суммируя несколько громоздкие выражения для  $\vec{r}_i \times \ddot{\vec{r}}_i$ ,  $i = A, B$ , получим

$$\begin{aligned} \sum_{i=A,B} \vec{r}_i \times \ddot{\vec{r}}_i &= 2d^2 \dot{\omega}_\perp \vec{e}_\perp + 2a^2 [\dot{\omega}_1 \vec{e}_1 - (\dot{\omega}_\perp \sin\varphi + \omega_\perp \dot{\varphi} \cos\varphi) \vec{e}_3] - \\ &- 2a^2 (\omega_\perp^2 \sin\varphi \cos\varphi \vec{e}_1 + \omega_1 \omega_\perp \cos\varphi \vec{e}_3). \end{aligned} \quad (3)$$

Наиболее кратко (3) можно получить при следующих преобразованиях. Так как  $\vec{r}_i = \vec{r}_C + \vec{r}_i^*$ , то  $\ddot{\vec{r}}_i = \ddot{\vec{r}}_C + \vec{\omega}' \times \vec{r}_i^* + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i^*)$ , где  $\vec{r}_C$  – радиус-вектор точки  $C$  относительно точки  $O$ ;  $\vec{r}_i^*$ ,  $i = A, B$  – радиус-вектор материальных точек относительно точки  $C$ ;  $\vec{\omega} = \omega_\perp \vec{e}_\perp + \omega_1 \vec{e}_1$  – абсолютная угловая скорость ССК; штрихом обозначена относительная производная в ССК.

Тогда, учитывая, что  $\vec{r}_A^* = -\vec{r}_B^*$ , получим

$$\begin{aligned} \sum_{i=A,B} \vec{r}_i \times \ddot{\vec{r}}_i &= 2\vec{r}_C \times \ddot{\vec{r}}_C + \sum_{i=A,B} [\vec{r}_i^* \times (\vec{\omega}' \times \vec{r}_i^*) + \vec{r}_i^* \times (\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i^*))] = \\ &= 2\vec{r}_C \times \ddot{\vec{r}}_C + 2\vec{\omega}' (\vec{r}_A^*)^2 - 2\vec{r}_A^* (\vec{\omega}' \cdot \vec{r}_A^*) + 2(\vec{r}_A^* \times \vec{\omega}) (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_A^*), \end{aligned} \quad (4)$$

что, как нетрудно убедиться, совпадает с (3).

Конечно, (4) можно записать в виде [5]

$$\sum_{i=A,B} \vec{r}_i \times \ddot{\vec{r}}_i = \frac{1}{m} (M \vec{r}_C \times \ddot{\vec{r}}_C + \hat{J}_C \cdot \vec{\omega} + \vec{\omega} \times \hat{J}_C \cdot \vec{\omega}), \quad (5)$$

где  $M$  – масса всей системы;  $\hat{J}_C$  – тензор инерции системы относительно точки  $C$ .

Последний член в (3) дает моменты центростремительных ускорений. Проанализируем их действие на движение системы. Конечно, речь идет об удельных моментах, т. е. о моментах, отнесенных к массе материальной точки. Далее для краткости будем опускать слово «удельный».

Заметим сначала, что  $\sum \vec{r}_i \times \ddot{\vec{r}}_i$  равно моменту внешних сил, поскольку суммарный момент внутренних сил равен нулю. Тогда изменение угловых скоростей движения системы определяются моментом внешних сил и моментом центробежных ускорений

$$\vec{\Phi}(\dot{\omega}) = \vec{M}_u + \vec{M}_e,$$

где  $\vec{\Phi}(\dot{\omega})$  – вектор момента ускорений, вызванных изменениями угловых скоростей,  $\vec{M}_u, \vec{M}_e$  – моменты центробежных ускорений и внешних сил соответственно. То есть  $\vec{M}_u$  равен моменту центростремительных ускорений с противоположным знаком и их действие на движение системы соответствует действию внешних моментов. Далее будем анализировать именно действие моментов центробежных ускорений.

Момент центробежных ускорений вокруг оси  $\vec{e}_1$  –  $2a^2\omega_{\perp}^2 \sin\varphi \cos\varphi \vec{e}_1$  – вызван только вращением оси  $\vec{e}_1$ . Назовем этот момент моментом от вращения оси. Как и следовало ожидать, этот момент стремится максимально удалить массы от оси этого вращения (оси  $\vec{e}_{\perp}$ ). Проецируя (3) на  $\vec{e}_1$ , получим уравнения движения относительно  $\vec{e}_1$  в предположении отсутствия внешних активных моментов (моменты сил реакции на  $\vec{e}_1$  равны нулю)

$$\ddot{\varphi} = \omega_{\perp}^2 \sin\varphi \cos\varphi. \quad (6)$$

Уравнение (6) имеет положения равновесия  $\varphi = 0 + k\pi$  и  $\varphi = \pi/2 + k\pi$ , где  $k = 0, 1, 2, \dots$ , первые из которых неустойчивы, а вторые устойчивы. При введении в систему малого диссипативного момента вокруг оси  $\vec{e}_1$  система будет стремиться вращаться вокруг оси  $\pm \vec{e}_3$ , что соответствует максимуму кинетической энергии вращения вокруг  $\vec{e}_{\perp}$ .

Уравнение (6) можно переписать в «эйлеровой» форме

$$J_1 \dot{\omega}_1 = (J_3 - J_2) \omega_2 \omega_3, \quad (7)$$

где  $J_1, J_2, J_3$  – главные центральные моменты инерции системы.

Отсюда можно сделать вывод, что физическое содержание классических уравнений Эйлера твердого тела заключается в том, что изменение угловой скорости вращения вокруг главной центральной оси инерции тела равно моменту внешних сил относительно этой оси и моменту от вращения этой оси, т. е. моменту центробежных ускорений, вызванных вращением этой оси (с

угловой скоростью, перпендикулярной этой оси). Дальнейшее рассмотрение подтверждает этот вывод.

Момент центробежных ускорений вокруг оси  $\bar{e}_3 - 2a^2\omega_1\omega_\perp \cos\varphi\bar{e}_3$  – связывает два вращения, и будем его называть моментом двух вращений (обозначим  $\bar{M}_{ss}$ ). Его можно записать в виде

$$\bar{M}_{ss} = 2a^2\omega_1\omega_\perp \cos\varphi\bar{e}_3 = -2a^2\omega_1\omega_\perp \sin\varphi\cos\varphi\bar{e}_\perp + 2a^2\omega_1\omega_\perp \cos^2\varphi\bar{e}_{3\perp}.$$

Первое слагаемое (по  $\bar{e}_\perp$ ) приводит к изменению  $\omega_\perp$ . Второе слагаемое описывает момент, перпендикулярный обеим осям вращения и опрокидывающий систему. Направление этого момента соответствует стремлению совместить оси вращения и направления вращения, что соответствует стремлению системы иметь максимальную кинетическую энергию.

Отметим, что момент двух вращений в содержательной части близок к гироскопическому моменту (см., например, [6]). Но, понятие "гироскопический момент" имеет строгое определение, как "главный момент сил инерции элементов массы гироскопа..." [7, стр 441]. Поэтому его использование в рассматриваемом случае не представляется корректным. По-видимому, выработка корректной терминологии потребует некоторого времени.

Поскольку момент сил реакции на ось  $\bar{e}_\perp$  равен нулю, то, проецируя (3) на  $\bar{e}_\perp$ , получим

$$(d^2 + a^2 \sin^2 \varphi)\dot{\omega}_\perp = -2a^2\omega_1\omega_\perp \sin\varphi\cos\varphi. \quad (8)$$

Отметим, что уравнения (6), (8) можно (и гораздо проще) получить, например, методом Лагранжа.

Эти уравнения полностью описывают движение рассматриваемой системы. Отметим одно, как представляется, любопытное свойство этого движения. Как бы ни была велика  $\omega_1$  и как бы ни была мала  $\omega_\perp$  ( $\omega_1 \gg \omega_\perp$ ), т. е., как бы слабо ни толкнули ось  $\bar{e}_1$ , система будет вращаться относительно  $\bar{e}_\perp$ . То есть никакой стабилизации вращением в данном случае не наблюдается. Конечно, это происходит из-за действия сил реакции, которые нейтрализуют опрокидывающую часть момента двух вращений по  $\bar{e}_{3\perp}$ , в силу чего прецессионное движение невозможно. Это свойство рассматриваемой схемы может быть полезно с практической точки зрения для способа изменения направления вращения, например маховика, с практически нулевой затратой энергии.

Если рассмотреть в данной системе вторую пару точек, расположенных по  $\bar{e}_3$  на расстоянии  $b$  от точки С (см. рис. 2), то, используя (5), например, нетрудно получить выражение

$$\sum \bar{r}_i \times \ddot{\bar{r}}_i = 4d^2\dot{\omega}_\perp\bar{e}_\perp + 2[(a^2 + b^2)\dot{\omega}_1\bar{e}_1 + b^2\dot{\omega}_2\bar{e}_2 + a^2\dot{\omega}_3\bar{e}_3 + (a^2 - b^2)\omega_2\omega_3\bar{e}_1 + b^2\omega_1\omega_3\bar{e}_2 - a^2\omega_1\omega_2\bar{e}_3] \quad (9)$$

где  $\omega_2 = \omega_\perp \cos\varphi$ ,  $\omega_3 = -\omega_\perp \sin\varphi$ .

Проецируя (9) на  $\bar{e}_1$ , получим

$$(a^2 + b^2)\ddot{\varphi} = (a^2 - b^2)\omega_\perp^2 \sin\varphi\cos\varphi$$

или (7), и все выводы, сделанные относительно действия момента от вращения оси  $\vec{e}_1$  и относительно уравнений (6) при  $a > b$ , остаются в силе.

Момент двух вращений имеет вид

$$\begin{aligned}\vec{M}_{ss} &= -2(b^2\omega_1\omega_3\vec{e}_2 - a^2\omega_1\omega_2\vec{e}_3) = \\ &= 2\omega_1\omega_{\perp} \left[ (b^2 \sin^2 \varphi + a^2 \cos^2 \varphi) \vec{e}_{3\perp} + \sin \varphi \cos \varphi (b^2 - a^2) \vec{e}_{\perp} \right]\end{aligned}$$

Наиболее простой вид он имеет при  $a = b$ , т. е. при динамической симметрии системы,  $2a^2\omega_1\omega_{\perp}\vec{e}_{3\perp}$ . Другие моменты центробежных ускорений при  $a = b$  равны нулю.

Рассмотрим движение системы при динамической симметрии.

Уравнения, полученные аналогично (6), (8), имеют вид  $\dot{\omega}_1 = 0$ ,  $\dot{\omega}_{\perp} = 0$ . Таким образом, в рассматриваемом случае движение системы происходит с постоянными угловыми скоростями относительно взаимно перпендикулярных осей.

Поскольку в вышеприведенных рассуждениях предположение постоянства  $\vec{e}_{\perp}$  использовалось только в равенстве  $\omega_1 = \dot{\varphi}$ , то выражение (5) не изменится и без этого предположения. Как нетрудно видеть, при учете массы  $m_5 = 4m$  (рис. 2), в первом слагаемом (9) лишь коэффициент 4 сменится на 8, да в выражении для  $\vec{r}_C \times \ddot{\vec{r}}_C$  появится член  $d^2\omega_{\perp}(\omega_1 - \dot{\varphi})$ , где учитывается вращение  $\vec{e}_{\perp}$  с угловой скоростью  $(\omega_1 - \dot{\varphi})\vec{e}_1$ . С этой поправкой выражение (9) описывает изменение удельного кинетического момента твердого тела в схеме, приведенной на рис. 2. Проецируя на оси  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_{\perp}$ ,  $\vec{e}_{3\perp}$ , получим уравнения движения свободного симметричного твердого тела, которые можно записать в виде

$$\dot{\omega}_1 = 0; \quad \dot{\omega}_{\perp} = 0; \quad (8d^2 + 2a^2)\omega_{\perp}(\omega_1 - \dot{\varphi}) = 4a^2\omega_1\omega_{\perp}. \quad (10)$$

Последнее равенство можно записать в виде

$$J_2\omega_{\perp}(\omega_1 - \dot{\varphi}) = J_1\omega_1\omega_{\perp}$$

и интерпретировать как равенство моментов двух вращений, возникающих при вращении  $\vec{e}_1$  с угловой скоростью  $\omega_{\perp}\vec{e}_{\perp}$  и вращении  $\vec{e}_{\perp}$  с угловой скоростью  $(\omega_1 - \dot{\varphi})\vec{e}_1$ .

Конечно, уравнения (10) проще получить, беря производную от кинетического момента тел. Так как

$$\vec{L} = \sum_i J_i \omega_i \vec{e}_i = J_1 \omega_1 \vec{e}_1 + J_2 \omega_{\perp} \vec{e}_{\perp}, \quad (11)$$

то, учитывая, что угловая скорость ПСК ( $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_{\perp}$ ,  $\vec{e}_{3\perp}$ ) равна  $(\omega_1 - \dot{\varphi})\vec{e}_1 + \omega_{\perp}\vec{e}_{\perp}$ , дифференцируя (11), получим

$$\dot{\vec{L}} = J_1 \dot{\omega}_1 \vec{e}_1 - J_1 \omega_{\perp} \omega_1 \vec{e}_{3\perp} + J_2 \dot{\omega}_{\perp} \vec{e}_{\perp} + J_2 \omega_{\perp} (\omega_1 - \dot{\varphi}) \vec{e}_{3\perp},$$

что в проекциях на оси ПСК, при отсутствии внешних моментов, дает (10).

Поскольку кинетический момент постоянен, то, с учетом (10),

$$\vec{L} = J_2(\omega_1 - \dot{\varphi})\vec{e}_1 + J_2\omega_{\perp}\vec{e}_{\perp}$$

и, следовательно, ПСК ( $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_{\perp}$ ,  $\vec{e}_{3\perp}$ ) вращается с постоянной угловой скоростью относительно  $\vec{L}$ . При этом, ССК (твердое тело) совершает еще допол-



нительное вращение вокруг  $\vec{e}_1$  с угловой скоростью  $\dot{\phi}$ . Эти выводы полностью решают задачу движения симметричного твердого тела.

Таким образом, момент двух вращений в своем опрокидывающем действии заставляет прецессировать оси взаимно перпендикулярных вращений вокруг кинетического момента.

**Выводы.** Движение ТТ относительно центра масс можно рассматривать как движение пирамиды и представлять в виде вращения оси пирамиды и вращения относительно ее оси.

Физическое содержание классических уравнений Эйлера движения ТТ заключается в том, что изменение угловой скорости вращения вокруг главной центральной оси тела равно моменту внешних сил относительно этой оси и моменту центробежных ускорений, вызванных вращением этой оси (с угловой скоростью, перпендикулярной этой оси). Этот момент центробежных ускорений вызван только вращением оси и стремиться максимально удалить массы от оси этого вращения.

Для свободного симметричного ТТ момент двух вращений в своем опрокидывающем действии заставляет прецессировать оси взаимно перпендикулярных вращений вокруг кинетического момента.

1. Гироскоп. Материал из Википедии – свободной энциклопедии.
2. *Ashish Tewari*. Advanced control of aircraft, rockets, and spacecraft / *Ashish Tewari*. – Noida, India : John Wiley & Sons, Ltd, 2011. – 436 p.
3. *Левский М. В.* Некоторые вопросы оптимального по времени управления программным разворотом космического аппарата / *М. В. Левский* // Космические исследования. – 2011. – Т. 49, № 6. – С. 538 – 550.
4. *Лурье А. И.* Аналитическая механика / *А. И. Лурье*. – М. : Физматгиз, 1961. – 824 с.
5. *Виттенбург Й.* Динамика системы твердых тел / *Й. Виттенбург*. – М. : Мир, 1980. – 292 с.
6. *Лойцянский Л. Г.* Курс теоретической механики : В 2-х томах. Т. II. Динамика. – 6-е изд., перераб. и доп. / *Л. Г. Лойцянский, А. И. Лурье*. – М. : Наука, Гл. редак. физ.-мат. лит., 1983. – 640 с.
7. *Кильчевский Н. А.* Курс теоретической механики. Т. II / *Н. А. Кильчевский*. – М. : Наука, Гл. редак. физ.-мат. лит., 1977. – 544 с.

Институт технической механики  
НАН Украины и ГКА Украины,  
Днепропетровск

Получено 11.06.2013,  
в окончательном варианте 19.07.13