УДК 519.6:621.51

Ю. А. КВАША, Н. А. ЗИНЕВИЧ

К ИНТЕРПОЛЯЦИИ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ ПРИ ОПТИМИЗАЦИИ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Институт технической механики
Национальной академии наук Украины и Государственного космического агентства Украины,
ул. Лешко-Попеля, 15, 49005, Днепр, Украина; e-mail: yukv@i.ua; zinevich7385@gmail.com

У роботі розглядається питання попередньої оцінки значень цільової функції у всій багатомірній області зміни незалежних змінних на основі невеликої кількості точок, де відоме її значення. Таке питання виникає на етапі вибору стратегії подальшого пошуку екстремуму функції цілі при оптимізації різних технічних систем. Ціль роботи – побудова методики інтерполяції цільової функції для випадку, коли вузли інтерполяції задані нерегулярним набором точок у багатомірному кубі. Як основний метод інтерполяції застосовується послідовне числове розв'язання рівняння Лапласа й рівняння дифузії на рівномірних розрахункових сітках. Використання рівняння дифузії на додаток до рівняння Лапласа обгрунтовано в роботі необхідністю підвищення якості інтерполяції, тому що в противному випадку поблизу вузлів інтерполяції формуються неприйнятно великі градієнти функції, що інтерполює. Показано, що дане небажане явище може бути істотно ослаблене шляхом обчислення коефіцієнта дифузії на основі градієнта функції, що інтерполює, розрахованої за рівнянням Лапласа. У результаті сформовано методику інтерполяції цільової функції при оптимізації технічних систем, що дозволяє використовувати як вузли інтерполяції нерегулярний набір точок в одиничному квадраті. Працездатність запропонованої методики продемонстровано на трьох істотно різних тестових функціях, показано можливість оцінки виду вихідної функції вже при трьох-чотирьох десятках вузлів інтерполяції навіть у випадку наявності декількох мінімумів в області змінних. Розроблена методика досить просто може бути поширена на випадок багатьох змінних, коли вузли інтерполяції задані в багатомірному кубі. Таким чином, розвинено існуючі підходи до інтерполяції функцій багатьох змінних у найбільш складному випадку, коли вузли інтерполяції розташовані нерегулярно. Отримані в роботі результати можуть бути використані при оптимізації технічних систем.

В работе рассматривается вопрос предварительной оценки значений целевой функции во всей многомерной области изменения независимых переменных на основе небольшого количества точек, где известно ее значение. Такой вопрос возникает на этапе выбора стратегии дальнейшего поиска экстремума функции цели при оптимизации различных технических систем. Цель работы – построение методики интерполяции целевой функции для случая, когда узлы интерполяции заданы нерегулярным набором точек в многомерном кубе. В качестве основного метода интерполяции применяется последовательное численное решение уравнения Лапласа и уравнения диффузии на равномерных расчетных сетках. Использование уравнения диффузии в дополнение к уравнению Лапласа обосновано в работе необходимостью повышения качества интерполяции, так как в противном случае вблизи узлов интерполяции формируются неприемлемо большие градиенты интерполирующей функции. Показано, что данное нежелательное явление может быть существенно ослаблено путем вычисления коэффициента диффузии на основе градиента интерполирующей функции, рассчитанной по уравнению Лапласа. В результате сформирована методика интерполяции целевой функции при оптимизации технических систем, позволяющая использовать в качестве узлов интерполяции нерегулярный набор точек в единичном квадрате. Работоспособность предложенной методики продемонстрирована на трех существенно различных тестовых функциях, показана возможность оценки вида исходной функции уже при трех-четырех десятках узлов интерполяции даже в случае наличия нескольких минимумов в области переменных. Разработанная методика достаточно просто может быть распространена на случай многих переменных, когда узлы интерполяции заданы в многомерном кубе. Таким образом, развиты существующие подходы к интерполяции функций многих переменных в наиболее сложном случае – когда узлы интерполяции расположены нерегулярно. Полученные в работе результаты могут быть использованы при оптимизации технических систем.

This paper is concerned with preliminary estimation of the values of an objective function throughout its multidimensional domain of definition from a small number of points where its value is known. This problem arises at the stage of strategy selection for a further search for the objective function extremum in the optimization of various engineering systems. The aim of this paper is to construct an objective function interpolation technique for the case where the interpolation nodes are specified by an irregular set of points in a multidimensional cube. The main interpolation method is a sequential numerical solution of the Laplace equation and the diffusion equation on uniform meshes. The use of the diffusion equation in addition to the Laplace equation is justified in this paper by the need for interpolation quality improvement because otherwise the interpolating function develops unacceptably high gradients in the vicinity of interpolation nodes. It was shown that this undesirable phenomenon may be reduced considerably by determining the diffusion coefficient from the gradient of the interpolating function calculated by the Laplace equation. This made it possible to construct a technique for objective function interpolation in the optimization of engineering systems, which allows one to use an irregular set of points in a unit square as the interpolation nodes. The workability of the proposed technique was demonstrated for three essentially different test functions, and it was shown that the form of the initial function may be assessed for as few as three–four tens of interpolation nodes even though there are several minima in the domain of variables. The technique developed can be extended rather simply to the case of multiple variables where the interpolation nodes are specified in a unit cube. So this paper further develops existing approaches to the interpolation of multivariable functions in the most complex case where the interpolation node arrangement is irregular. The results obtained may be used in the optimization of engineering systems.

Ключевые слова: *интерполяция функции, нерегулярный набор точек, многомерный куб, уравнение Лапласа, уравнение диффузии.*

Повышение эффективности функционирования различных технических систем часто требует проведения затратных по времени процедур оптимизации их геометрических и режимных параметров. Например, при аэродинамической оптимизации лопаточных венцов компрессоров газотурбинных двигателей на основе численного моделирования пространственных газовых течений за приемлемое время можно оценить эффективность не более нескольких десятков вариантов пространственной формы венцов [1]. При этом возникает задача оценки полученных результатов расчетов. Часто эту задачу можно сформулировать следующим образом.

Имеется область изменения независимых переменных, которая может быть представлена как многомерный куб. В этой области выбирается последовательность точек, в которых рассчитываются значения выбранной функции цели. Указанная последовательность обычно представляет собой нерегулярный набор точек, то есть данные точки не образуют регулярную (структурированную) сетку. В качестве такой последовательности могут быть использованы равномерно распределенные последовательности [2] небольшой длины. Требуется определить направление дальнейшего поиска экстремума целевой функции.

Для решения данной задачи используются в основном такие методы, как построение "поверхностей отклика" [3 – 5] на основе результатов небольших серий расчетов значений целевой функции, в том числе с привлечением эволюционных алгоритмов и алгоритмов на основе моделирования искусственных нейронных сетей [6]. Тем не менее, вопрос оценки значений целевой функции во всей многомерной области изменения независимых переменных (что важно для выбора стратегии дальнейшего поиска экстремума) остается актуальным.

Целью данной работы является построение методики интерполяции целевой функции при оптимизации технических систем для случая, когда узлы интерполяции заданы нерегулярным набором точек в многомерном кубе.

При построении методики за основу принят подход, изложенный в работах [7, 8]. Суть его состоит в следующем. Пусть в плоскости переменных x_1, x_2 расположена прямоугольная область с границей, обозначенной позицией 1 на рис. 1. В данной области построена регулярная сетка. В узлах, обозначенных маркером 2, значения некоторой функции $F(x_1,x_2)$ неизвестны, а в узлах, обозначенных маркером 3 – заданы. При этом узлы, обозначенные маркером 3 (узлы интерполяции), представляют собой, вообще говоря, нерегулярный набор точек.

Для восстановления значений функции F во всех точках сетки в [7, 8] предложено использовать решение уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}=0\,. \qquad (1)$$

Уравнение (1) решается численно методом простой итерации на основе разностной схемы, которая при равных шагах сетки по x_1 и x_2 имеет вид:

$$F_{i,j} = \frac{1}{4}(F_{i,j+1} + F_{i,j-1} + F_{i+1,j} + F_{i-1,j}) . \qquad (2)$$

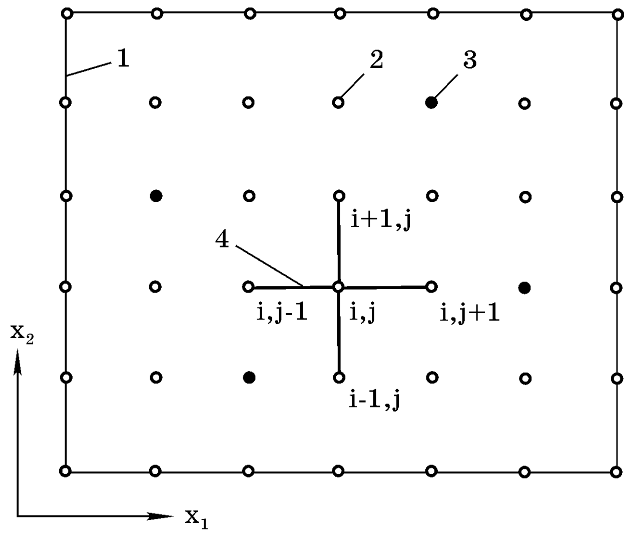


Рис. 1

Шаблон схемы обозначен позицией 4 на рис. 1. Схема (2) применяется только для внутренних точек, обозначенных маркером 2. Точки, обозначенные маркером 3, играют роль "изолированных внутренних граничных условий" (isolated internal boundary conditions [7]).

В настоящей работе выполнена оценка эффективности описанного подхода на примерах интерполяции функций различного вида.

В результате проведенных тестовых расчетов установлено, что наиболее подходящими условиями на границе расчетной области (позиция 1 на рис. 1) являются, в отличие от описанных в [7, 8], условия равенства нулю производной функции F по нормали к границе. Эти условия приняты при всех дальнейших расчетах.

Установлено также, что при небольшом количестве узлов интерполяции, составляющем несколько десятков, вблизи этих узлов формируются неприемлемо большие величины модуля вектора $\operatorname{grad} F$. В связи с этим в настоящей работе предложено после решения уравнения (1) выполнять второй этап интерполяции путем решения уравнения диффузии для новой функции $\overline{F}$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} D \frac{\partial \overline{F}}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} D \frac{\partial \overline{F}}{\partial x_2} = 0 , \qquad (3)$$

где D – коэффициент диффузии.

Величина D вычисляется по формуле

$$D = C\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^2\right]^{\alpha} , \qquad (4)$$

где F – функция, рассчитанная ранее по уравнению (1); C – произвольная постоянная; α – коэффициент, величина которого может выбираться в диапазоне от 0,5 до 1.

Обоснование использования выражений (3) и (4) состоит в том, что диффузионный поток, определяемый в (1) величиной $-\mathrm{grad}\,F$, представлен в уравнении (3) произведением $-D\,\mathrm{grad}\,\overline{F}$, в котором большие величины модуля $\mathrm{grad}\,F$ отнесены к коэффициенту диффузии D.

Разностная схема для уравнения (3) при равных шагах сетки по переменным x_1 и x_2 определяется выражением

$$\overline{F}_{i,j}=\frac{D_{i,j+1/2}\overline{F}_{i,j+1}+D_{i,j-1/2}\overline{F}_{i,j-1}+D_{i+1/2,j}\overline{F}_{i+1,j}+D_{i-1/2,j}\overline{F}_{i-1,j}}{D_{i,j+1/2}+D_{i,j-1/2}+D_{i+1/2,j}+D_{i-1/2,j}}, \qquad (5)$$

где дробные значения индексов соответствуют серединам отрезков, составляющих шаблон схемы (позиция 4 на рис. 1). Разностная схема (5), как и схема (2), применяется только для точек, обозначенных маркером 2 на рис. 1.

На основе приведенной выше методики, включающей применение соотношений (1) – (5), выполнена интерполяция с использованием следующих тестовых функций [9]:

– видоизмененной функции сферы

$$F=2(x_1-0{,}5)^2+4(x_2-0{,}5)^2, \qquad (6)$$

минимум которой помещен в точку (0,5; 0,5);

– функции Розенброка

$$F=(x_1-0{,}5)^2+100\left[x_2+0{,}5-(x_1+0{,}5)^2\right]^2, \qquad (7)$$

минимум данной функции также помещен в точку (0,5;0,5);

– видоизмененной функции Химмельблау

$$F=\left[(10x_1-5)^2+(10x_2-5)-11\right]^2+\left[(10x_1-5)+(10x_2-5)^2-7\right]^2, \qquad (8)$$

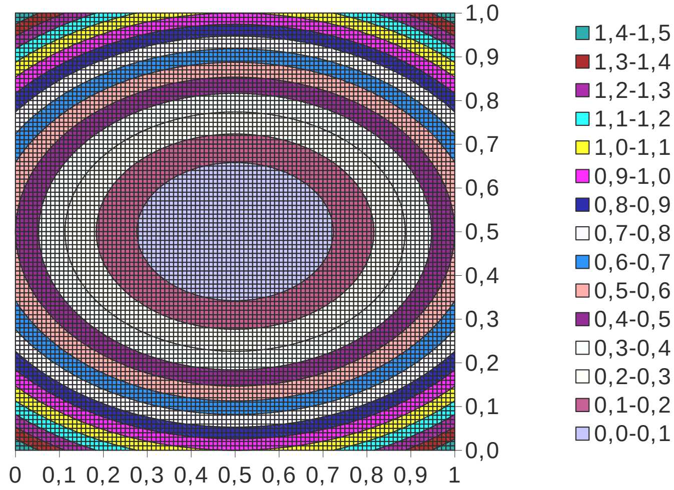
четыре минимума которой достигаются в точках (0,8; 0,7), (0,220; 0,813), (0,122; 0,172) и (0,858; 0,315) (координаты последних трех точек указаны приближенно).

Все перечисленные функции в точках минимума равны нулю.

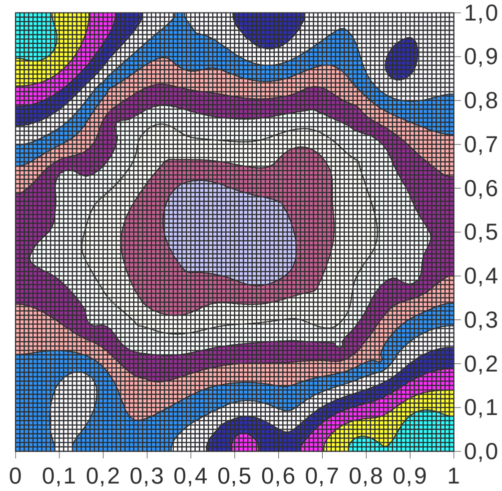
Вычисления проведены на равномерной расчетной сетке, состоящей из 101×101 узлов, с одинаковыми шагами по x_1 и x_2. Для задания узлов интерполяции использованы точки LP_τ последовательностей различной длины [2].

Результаты интерполяции функции (6) показаны на рис. 2, функции (7) – на рис. 3 и функции (8) – на рис. 4. На всех трех рисунках обозначение “а)” соответствует распределению изолиний исходной тестовой функции; обозначение “б)” – распределению изолиний функции, построенной с использованием 32 узлов интерполяции; обозначение “в)” – функции, построенной с использованием 256 узлов интерполяции. На рисунках прослеживается возможность оценки вида исходной функции уже при 32 узлах интерполяции даже в случае наличия четырех минимумов (рис. 4, б)).

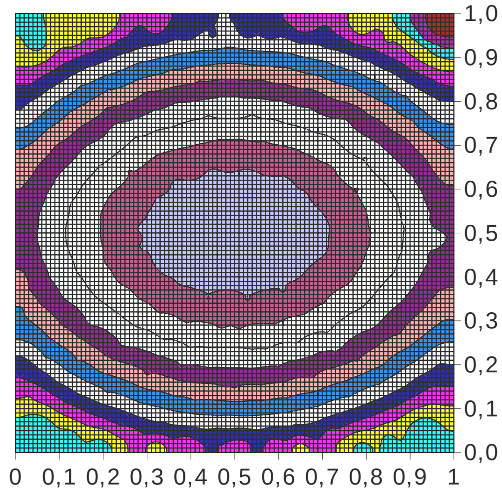
Предлагаемая методика интерполяции функций на основе соотношений (1) – (5) может быть распространена на многомерный случай. При этом уравнение (1) записывается в виде


1,4-1,5
1,3-1,4
1,2-1,3
1,1-1,2
1,0-1,1
0,9-1,0
0,8-0,9
0,7-0,8
0,6-0,7
0,5-0,6
0,4-0,5
0,3-0,4
0,2-0,3
0,1-0,2
0,0-0,1
1,0 0,9 0,8 0,7 0,6 0,5 0,4 0,3 0,2 0,1 0,0
0 0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9 1

а)

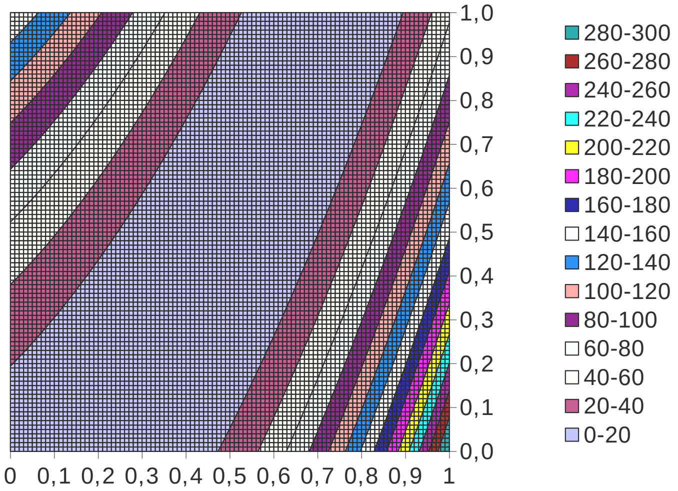

1,0 0,9 0,8 0,7 0,6 0,5 0,4 0,3 0,2 0,1 0,0
0 0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9 1

б)

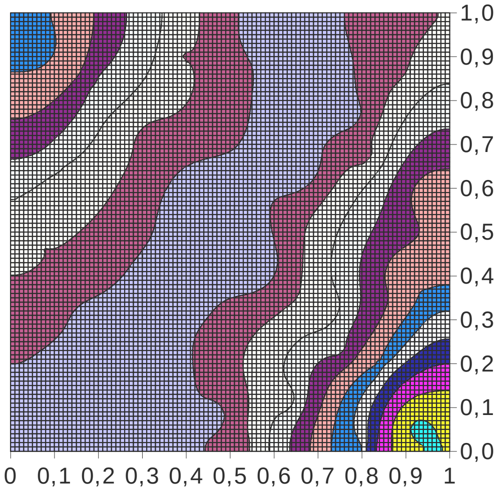

1,0 0,9 0,8 0,7 0,6 0,5 0,4 0,3 0,2 0,1 0,0
0 0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9 1

в)

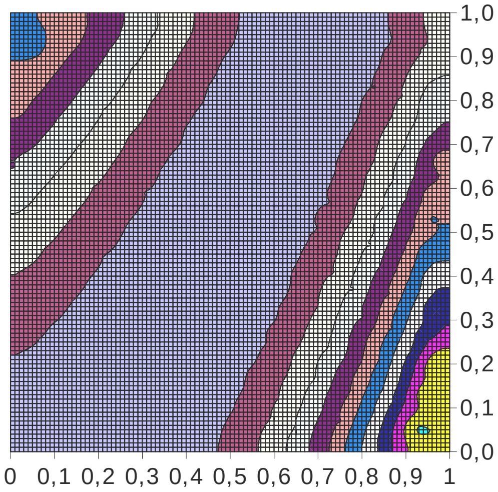
Рис. 2


280-300
260-280
240-260
220-240
200-220
180-200
160-180
140-160
120-140
100-120
80-100
60-80
40-60
20-40
0-20
1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0,0
0 0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9 1

а)

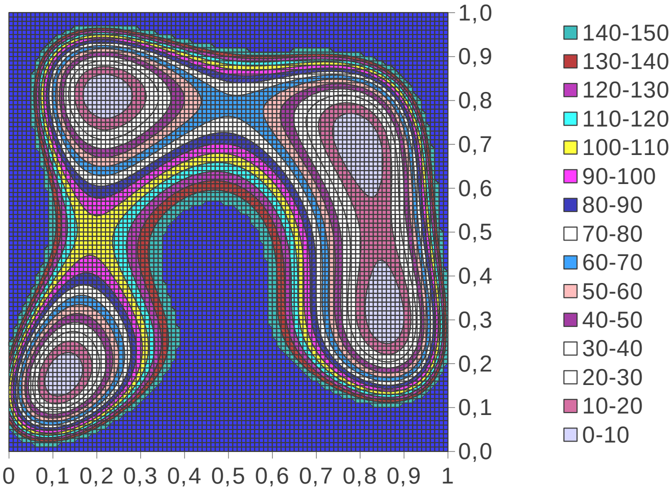

1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0,0
0 0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9 1

б)

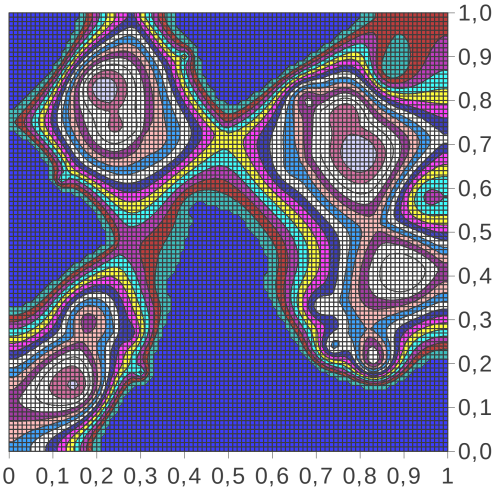

1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0,0
0 0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9 1

в)

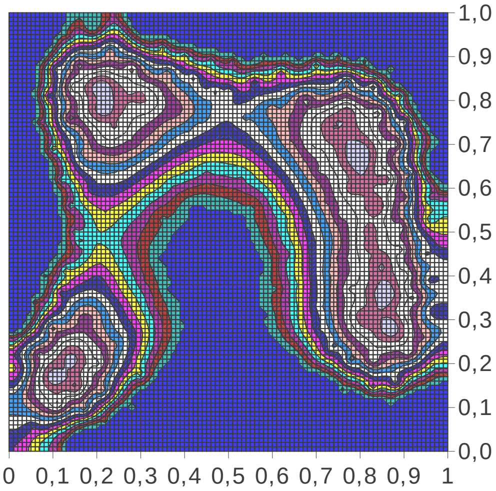
Рис. 3


140-150
130-140
120-130
110-120
100-110
90-100
80-90
70-80
60-70
50-60
40-50
30-40
20-30
10-20
0-10
1,0 0,9 0,8 0,7 0,6 0,5 0,4 0,3 0,2 0,1 0,0
0 0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9 1

а)


1,0 0,9 0,8 0,7 0,6 0,5 0,4 0,3 0,2 0,1 0,0
0 0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9 1

б)


1,0 0,9 0,8 0,7 0,6 0,5 0,4 0,3 0,2 0,1 0,0
0 0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9 1

в)

Рис. 4

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial^2 F}{\partial x_k^2} = 0 ,$$

где N – число независимых переменных.

Уравнение (3) в многомерном случае имеет вид

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_k} D \frac{\partial \overline{F}}{\partial x_k} = 0 ,$$

а соотношение (4) представляется в форме

$$D = C \left[\sum_{k=1}^{N} \left(\frac{\partial F}{\partial x_k} \right)^2 \right]^{\alpha} .$$

Разностные схемы (2) и (5) в многомерном случае сохраняют свою структуру и преобразуются путем добавления членов в соответствии с многомерным шаблоном (данные выражения не приводятся здесь из-за их громоздкости).

Выводы. Предложена методика интерполяции целевой функции при оптимизации технических систем, позволяющая использовать в качестве узлов интерполяции нерегулярный набор точек в единичном квадрате. Особенностью методики является построение интерполяционной функции путем последовательного численного решения уравнения Лапласа и уравнения диффузии на выбранной регулярной расчетной сетке. Работоспособность предложенной методики интерполяции продемонстрирована на тестовых функциях.

Разработанная методика достаточно просто может быть распространена на случай многих переменных, когда узлы интерполяции заданы в многомерном кубе.

Полученные результаты предполагается использовать в дальнейшем при аэродинамической оптимизации элементов авиационных газотурбинных двигателей.

1. *Кваша Ю. А., Зиневич Н. А.* Аэродинамическая оптимизация пространственной формы лопатки рабочего колеса сверхзвуковой компрессорной ступени. Техническая механика. 2016. № 3. С. 35–42.
2. *Соболь И. М., Статников Р. Б.* Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями. М.: Наука, 1981. 110 с.
3. *Chan-Sol Ahn, Kwang-Yong Kim.* Aerodynamic design optimization of an axial flow compressor rotor. Proc. of ASME TURBO EXPO 2002. (Amsterdam, June 3–6, 2002). Amsterdam (The Netherlands), 2002. 7 p.
4. *Sivashanmugam V. K., Arabnia M., Ghaly W.* Aero-structural optimization of an axial turbine stage in three-dimensional flow Proc. of ASME TURBO EXPO 2010. (Glasgow, June 14–18, 2010). Glasgow (UK), 2010. 14 p.
5. *Финаев В. И.* Планирование экспериментов и обработка экспериментальных данных. Таганрог: Изд-во ЮФУ, 2013. 92 с.
6. Технология поверхности отклика. URL: http://www.iosotech.com/ru/response_surface.htm (Дата обращения: 21.05.2018).
7. *Press W. H.* Laplace Interpolation. The University of Texas at Austin, CS 395T, Spring 2010. URL: http://numerical.recipes/CS395T/lectures2010/2010_19_LaplaceInterpolation.pdf. (Last accessed: 20.05.2018).
8. *Caspers P.* Laplace Interpolation. URL: https://quantlib.wordpress.com/tag/laplace-interpolation/ (Last accessed: 20.05.2018).
9. Тестовые функции для оптимизации. Википедия. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Тестовые_функции_для_оптимизации (Дата обращения: 20.05.2018).

Получено 22.05.18
в окончательном варианте 05.06.18