УДК 629.764.017.1

Э. Г. ГЛАДКИЙ

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДВУМЕРНОЙ НОРМАЛЬНОЙ СВЯЗКИ В МОДЕЛЯХ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ НАДЕЖНОСТИ

Государственное предприятие «Конструкторское бюро «Южное»,
ул. Криворожская, 3, 49008, Днепр, Украина; *e-mail:* edgladky@gmail.com

Визначення параметричної надійності механічних систем (МС) ракети-носія (РН) на етапі проектування в більшості практичних випадків можна звести до одно- та двовимірних моделей. Використання нормального розподілу в таких моделях не завжди є виправданим, оскільки параметри МС досить часто слідують відмінним від нормального законам розподілу. Мета статті – продемонструвати можливості використання для оцінки параметричної надійності МС РН двовимірної нормальної зв'язки, побудованої на основі одновимірних узагальнених лямбда розподілів, яким притаманна значна гнучкість. У статті розглянуто питання побудови та особливості нормальної зв'язки такого типу, зокрема, отримано вирази для щільності розподілу, ліній регресії та функції розподілу. Такий розподіл дозволяє врахувати відмінність маргінальних розподілів від нормального, а також лінійну кореляцію між складовими (зустрічається між параметрами МС в 70 % випадків). Показано спосіб визначення параметра нормальної зв'язки, що характеризує лінійний кореляційний зв'язок між випадковими величинами, в основу якого покладено метод моментів.

З використанням нормальної зв'язки, побудованої на основі одновимірних узагальнених лямбда розподілів, отримано співвідношення для оцінки параметричної надійності МС РН. З їх допомогою показано, що спільне врахування відмінності маргінальних розподілів випадкових величин від нормального (насамперед, характеристик скосу та ексцесу), а також лінійної кореляції між ними дозволяє зробити більш коректний прогноз надійності МС, у порівнянні з нормальним випадком. Врахування нелінійної кореляції між параметрами МС (для порівняння використано модифіковану зв'язку Фарл'є–Гумбеля–Моргенштерна) також не призводить до істотного відхилення показника безвідмовності від значень, отриманих з використанням нормальної зв'язки.

Продемонстровано практичне використання нормальної зв'язки для оцінки ймовірності достатності палива ступеня РН для безаварійного вимкнення рушійної установки.

Определение параметрической надежности механических систем (МС) ракеты-носителя (РН) на этапе проектирования в большинстве практических случаев может быть сведено к одномерным и двумерным моделям. Использование нормального распределения в таких моделях не всегда является оправданным, поскольку параметры МС достаточно часто следуют отличным от нормального законам распределения. Цель статьи – продемонстрировать возможности использования для оценки параметрической надежности МС РН двумерной нормальной связки, построенной на основе одномерных обобщенных лямбда распределений, обладающих значительной гибкостью. В статье рассмотрены вопросы построения и особенности нормальной связки такого типа, в частности, получены выражения для плотности распределения, линий регрессии и функции распределения. Такое распределение позволяет учесть отличие маргинальных распределений от нормального, а также линейную корреляцию между составляющими (встречается между параметрами МС в 70 % случаев). Показан способ получения параметра нормальной связки, характеризующего линейную корреляционную связь между случайными величинами, в основе которого лежит метод моментов.

С использованием нормальной связки, построенной на основе одномерных обобщенных лямбда распределений, получены соотношения для определения параметрической надежности МС РН. С их помощью показано, что совместный учет отличия маргинальных распределений случайных величин от нормального (прежде всего, характеристик скоса и эксцесса), а также линейной корреляции между ними позволяет сделать более корректный прогноз надежности МС по сравнению с нормальным случаем. Учет нелинейной корреляции между параметрами МС (для сравнения использована модифицированная связка Фарлье–Гумбеля–Моргенштерна) также не приводит к значимому отклонению показателя безотказности от значений, получаемых с использованием рассматриваемой нормальной связки.

Продемонстрировано практическое использование рассмотренной нормальной связки для оценки вероятности достаточности топлива ступени РН для безаварийного выключения двигательной установки.

In most cases, determining the parametric reliability of the mechanical systems (MSs) of a launch vehicle (LV) at the design stage can be reduced to one- and two-dimensional models. The use of the normal distribution in such models is not always justified because the MS parameters often obey distribution laws distinct from the normal one. This paper demonstrates that the LV MS parametric reliability can be estimated using a two-dimensional normal copula constructed on the basis of one-dimensional generalized lambda distributions, which show a considerable flexibility. The construction and features of a normal copula of this type are considered; in particular, expressions for the distribution density, regression lines, and the distribution function are presented. Such a distribution allows one to account for the difference of marginal distributions from the normal one and a linear correlation between the components (a linear correlation between the MS parameters is observed in 70 percent of cases). It is shown how the normal copula parameter that characterizes a linear correlation between random variables can be obtained using the method of moments.

In this paper, expressions for determining the LV MS parametric reliability are derived using the normal copula constructed on the basis of one-dimensional generalized lambda distributions. With their help, it is shown that accounting for both the difference of marginal distributions of random variables from the normal one (first of all, the skew and the kurtosis) and for a linear correlation between them offers a more accurate prediction of the MS reliability in comparison with the normal case. Accounting for a nonlinear correlation between the MS parameters (a modified Farlie–Gumbel–Morgenstern copula is used for comparison) does not either result in any significant deviation of the reliability index from the values obtained with the use of the normal copula considered.

The practical use of the normal copula considered is demonstrated by the example of estimating the probability of the propellant of an LV stage being sufficient for a trouble-free cutoff of the propulsion system.

Ключевые слова: *ракета-носитель, вероятность безотказной работы, переменные состояния, нормальная связка, обобщенное лямбда распределение.*

Параметрические методы, в основе которых лежит анализ физических принципов функционирования, нашли широкое распространение при определении надежности функционирования систем ракет-носителей (РН) на этапе полета. Так, показатель безотказности механических систем (МС) РН, к которым относятся несущие конструкции, элементы двигательных установок, гидравлические системы подачи топлива, бортовые источники мощности и др., на проектных этапах может определяться как вероятность [4]

$$P = Вер\left\{Z_j = \varphi_j\left(X_1, X_2, ..., X_n\right) > 0 \ \forall \ j = \overline{1,m}\right\}, \qquad (1)$$

где $\varphi_j(\bullet)$ ($j = \overline{1,m}$) – формализованные условия отсутствия отказов (например, отсутствие потери прочности или устойчивости конструкции, непревышение рабочим давлением максимального уровня, отсутствие кавитации в насосах и т. п.); $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ – вектор выходных параметров (переменных состояний); $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – вектор первичных (входных) параметров.

Поскольку на практике условия отсутствия отказов в (1) строятся только для наиболее “опасных” сечений МС (фиксированных точек или сечений рассматриваемой МС с наиболее опасными условиями функционирования) и моментов времени, для которых в “опасных” сечениях воздействие (нагружение) достигает одного из предельных состояний, их записывают в терминах случайных величин (СВ). В итоге вероятность безотказной работы (ВБР) может быть определена с использованием следующего общего соотношения

$$P = \int_0^\infty \underset{(m)}{\cdots} \int_0^\infty g(\bar{z}) dz_1 \ldots dz_m \,, \qquad (2)$$

где $g(\bar{z})$ – совместная функция плотности распределения вектора переменных состояния.

Таким образом, задача определения параметрической надежности в постановке (1) сводится к построению и дальнейшему интегрированию совместной плотности распределения $g(\bar{z})$.

На практике определение параметрической надежности МС согласно (2) часто сводится к вычислению одномерных и двумерных интегралов. Во-первых, во многих случаях работоспособность МС РН с достаточной степенью точности может быть описана одним-двумя основными типами отказов, которым соответствуют определяющие (критические) условия работоспособности. Вклад остальных условий работоспособности в общую надежность (как показывают, например, расчеты прочностной надежности), чаще всего, не превышает (1÷3) %. Во-вторых, даже в случае, когда при определении параметрической надежности приходится рассматривать три и более условия работоспособности, существует простой практический способ понижения кратности интеграла (2) [1]. Выражение (1) определяет вероятность одновременного выполнения событий B_j ($j = \overline{1, m}$), представляющих условия $Z_j > 0$. Заменяя пересечение событий суммой обратных событий и далее применяя формулу для суммы сложного события, получаем следующее выражение

$$P = Вер\left\{\bigcap_{j=1}^{m} B_j\right\} = 1 - Вер\left\{\bigcup_{j=1}^{m} \overline{B}_j\right\} =$$

$$= 1 - \left[\sum_{j=1}^{m} Вер\left\{\overline{B}_j\right\} - \sum_{j_1=1}^{m}\sum_{j_2=1}^{m} Вер\left\{\overline{B}_{j_1} \cap \overline{B}_{j_2}\right\} + \ldots + (-1)^n Вер\left\{\bigcap_{j=1}^{m} \overline{B}_j\right\}\right]. \qquad (3)$$

Поскольку при разработке МС РН закладывается высокий уровень надежности, члены алгебраической суммы в квадратных скобках, начиная со второго, быстро убывают (то есть вероятность одновременного нарушения двух, трех и более условий работоспособности быстро уменьшается), как следствие, при вычислении параметрической надежности в последнем выражении можно ограничиться только одномерными и двойными интегралами.

Не теряя общности, будем предполагать, что работоспособность МС определяется двумя условиями нормального функционирования $Z_j > 0$ ($j = 1, 2$) и для вычисления надежности согласно (2) необходимо построить эмпирическую двумерную плотность $g(z_1, z_2)$.

В подавляющем большинстве практических расчетов для описания переменных состояния Z_1, Z_2 используется двумерное нормальное распределение (позволяет учесть линейную корреляцию между Z_1 и Z_2). На практике параметры МС (как входные, так и выходные) достаточно часто следуют отличным от нормального законам распределения, что требует адекватного математического описания. С этой целью в качестве $g(z_1, z_2)$ могут использоваться двумерные распределения системы Пирсона и Джонсона [11]. Однако они обладают существенной сложностью для проведения практических расчетов, и требуют сложных процедур выбора соответствующей формы.

В качестве двумерной совместной плотности $g(z_1, z_2)$ целесообразно использовать некоторые универсальные формы, например распределение Грам–Шарлье, построенное с использованием ортогональных полиномов Эрмита [3, 6]. Оно позволяет учесть приведенные числовые характеристики (маргинальные и совместные) СВ до 4-го порядка включительно. К сожалению, для двумерного распределения Грам–Шарлье (в отличие от одномерного случая) практически невозможно найти совместную область значений числовых характеристик (маргинальных и совместных), для которой поверхность плотности распределения не выходит в отрицательную область и имеет одну моду (вершину). Это естественно приведет к погрешности вычисления ВБР. Исключение составляет случай независимых СВ, для которых маргинальные распределения положительны и унимодальны.

При выборе эмпирического распределения $g(z_1, z_2)$ будем учитывать существующие подходы к статистической обработке данных. В настоящее время обработка двумерных (многомерных) статистических совокупностей предполагает анализ одномерных выборок, а также определение стохастической зависимости между СВ (в основном парной корреляции в многомерном случае). Статистический анализ одномерных статистических совокупностей наиболее развит в теоретическом и прикладном плане. В последнее время он непременно включает определение выборочных коэффициентов скоса и эксцесса одномерных выборок, характеризующих отличие распределения СВ от нормального случая. Исследование стохастической связи между СВ, чаще всего, не выходит за рамки линейной корреляции, поскольку процедуры анализа нелинейной стохастической зависимости обладают существенной сложностью. В этой связи необходимо отметить, что проведенные автором исследования парной корреляции в многомерных совокупностях характеристик МС ракетно-космических систем [5] показали, что нелинейную стохастическую зависимость в среднем следует ожидать лишь не более чем в 30 % случаев. В остальных случаях, параметры МС РН оказываются связанными линейной стохастической зависимостью.

Учитывая вышесказанное, построение отличного от нормального двумерного (а в общем случае и многомерного) распределения может основываться на имеющихся маргинальных распределениях СВ (в общем случае отличных от нормального) и линейной корреляции между ними. В качестве таких распределений с успехом могут использоваться связки (copula).

Двумерная нормальная связка (общий случай). В общем случае, если $F_1(x_1)$ $F_2(x_2)$ – непрерывные одномерные функции распределений СВ X_1 и X_2 соответственно, то существует единственное представление совместной функции распределения вида

$$F_{1,2}(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2)),$$

где функция $C(u_1, u_2)$ $(0 \le u_1, u_2 \le 1)$ получила название связки (copula).

В литературе можно найти теоретические и прикладные вопросы использования связок Фарлье–Гумбеля–Моргенштерна (ФГМ) и их модификаций, Клейтона, Франка, Гумбеля, нормальной связки, связки Стьюдента [8, 9, 14]. Практическое использование указанных связок, исключая связку ФГМ, сопряжено с большими трудностями. При этом не все связки являются равнозначными в плане прикладного использования и, прежде всего, с точки зрения учета линейной корреляции между СВ. Так, связки Клэйтона, Гумбеля невозможно применять в случае отрицательной линейной корреляции между СВ. Связка ФГМ ограничена в своем применении линейной стохастической зависимостью между маргинальными СВ умеренной величины (для базового варианта распределения коэффициент линейной корреляции между СВ по модулю не превосходит значения $\frac{1}{3}$, для модификаций – не более 0,5). Наиболее общей с точки зрения учета линейной корреляции является нормальная связка, которая охватывает как отрицательные, так и положительные значения линейной корреляции, теоретически включая предельные случаи, когда коэффициент линейной корреляции близок к ±1.

Нормальная связка вводится следующим образом [13]

$$C_N(u_1,u_2;\theta)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\theta^2}}\int_{-\infty}^{\Phi^{(-)}(u_1)}\int_{-\infty}^{\Phi^{(-)}(u_2)}\exp\left\{-\frac{y_1^2-2\theta y_1y_2+y_2^2}{2(1-\theta^2)}\right\}dy_1dy_2\,, \quad (4)$$

где $\Phi^{(-)}(\bullet)$ – функция, обратная функции Лапласа; Y_1, Y_2 – нормальные СВ; θ – параметр, характеризующий линейную связь между СВ Y_1 и Y_2; u_1, u_2 – переменные, представляющие функции распределений СВ X_1 и X_2 ($u_i=F_i(x_i)$ для i = 1, 2).

Функции распределений СВ X_1, X_2 и Y_1, Y_2 связаны следующими соотношениями

$$\Phi(y_i)=F_i(x_i) \ (i = 1, 2). \quad (5)$$

Исходя из (4), совместная функция распределения СВ X_1 и X_2 определяется как

$$F_{1,2}(x_1,x_2)=\Phi\left(\Phi^{(-)}(F_1(x_1)),\Phi^{(-)}(F_2(x_2));\theta\right), \quad (6)$$

где $\Phi(\bullet,\bullet;\theta)$ – функция двумерного нормального распределения.

Раскроем некоторые свойства нормальной связки, поскольку в литературе этот вопрос освещен недостаточно. Используя следующие из (5) выражения $y_i=\Phi^{(-)}\left[F_i(x_i)\right]$ (i = 1, 2), и учитывая, что СВ Y_i имеют нормальное распределение, можно записать выражение для совместной функции плотности распределения X_1, X_2 следующим образом

$$f_{1,2}(x_1,x_2)=\frac{\partial F_{1,2}(x_1,x_2)}{\partial x_1\partial x_2}=\frac{\partial F_{1,2}}{\partial y_1\partial y_2}\cdot\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial y_2}{\partial x_2}=$$
$$=N\left(\Phi^{(-)}(F_1(x_1)),\Phi^{(-)}(F_2(x_2));\theta\right)\cdot\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial y_2}{\partial x_2}\,,$$

где $N(\bullet,\bullet;\theta)$ – функция плотности двумерного стандартного нормального распределения.

Проводя дифференцирование выражений (5) как неявных функций, получим

$$N(y_i)\frac{dy_i}{dx_i}=f_i(x_i) \ (i = 1, 2),$$

где $N(\bullet)$ – функция плотности стандартного одномерного нормального распределения); $f_i(x_i)$ – плотность распределения СВ X_i. Из последнего выражения следует

$$\frac{dy_i}{dx_i}=\frac{f_i(x_i)}{N(y_i)}=\frac{f_i(x_i)}{N(\Phi^{(-)}(F_i(x_i)))}\,.$$

В итоге общее выражение для функции плотности СВ X_1 и X_2 приобретает вид

$$f_{1,2}(x_1,x_2)=\frac{N\left(\Phi^{(-)}(F_1(x_1)),\Phi^{(-)}(F_2(x_2));\theta\right)}{N\left(\Phi^{(-)}(F_1(x_1))\right)\cdot N\left(\Phi^{(-)}(F_2(x_2))\right)}f_1(x_1)f_2(x_2)\,. \quad (7)$$

Несложно убедиться, что частными распределениями (7) являются маргинальные распределения $f_1(x_1)$ и $f_2(x_2)$.

Для линий регрессии распределения (7) можно получить следующие выражения

$$m_2(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} F_2^{(-)}[\Phi(y_2)] \cdot N\left(y_2; \theta\Phi^{(-)}(F_1(x_1)), \sqrt{1-\theta^2} \right) dy_2 \ ;$$

$$m_1(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1^{(-)}[\Phi(y_1)] \cdot N\left(y_1; \theta\Phi^{(-)}(F_2(x_2)), \sqrt{1-\theta^2} \right) dy_1 \ ,$$

где $F_1^{(-)}(\bullet)$, $F_2^{(-)}(\bullet)$ – функции, обратные маргинальным функциям распределения СВ X_1 и X_2.

В общем случае линии регрессии (7) будут отличаться от прямых, что будет обусловлено отличием маргинальных распределений СВ от нормального случая.

Нормальная связка на основе одномерных обобщенных лямбда распределений. Построение пригодного для практического использования распределения (7) требует определения маргинальных функций распределений. В качестве последних будем использовать одномерные обобщенные лямбда распределения. Обобщенное лямбда распределение (ОЛР) обладает значительной гибкостью и определяется через квантильную функцию $Q(u)$ для $0 \le u \le 1$, представляющую функцию, обратную функции распределения случайной величины $F(x)$ ($Q \equiv F^{(-)}$). Последнее представляется важным с точки зрения построения нормальной связки (смотри соотношения (4) и (5)). На практике наибольшее распространение нашла квантильная функция вида [10, 12]

$$Q(u) = \lambda_1 + \frac{u^{\lambda_3} - (1-u)^{\lambda_4}}{\lambda_2},$$

где λ_1 – параметр положения, λ_2 – параметр масштаба, λ_3, λ_4 – параметры формы.

Выражения для функции распределения и плотности ОЛР могут быть заданы в параметрической форме следующим образом:

функция распределения

$$\begin{cases} F(x) = u \\ x = \lambda_1 + \dfrac{u^{\lambda_3} - (1-u)^{\lambda_4}}{\lambda_2} \end{cases}, \tag{8}$$

плотность распределения

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\lambda_2}{\lambda_3 u^{\lambda_3 - 1} + \lambda_4 (1-u)^{\lambda_4 - 1}} \\ x = \lambda_1 + \dfrac{u^{\lambda_3} - (1-u)^{\lambda_4}}{\lambda_2} \end{cases}.$$

Используя параметрическую форму задания ОЛР (8), можно записать следующее выражение для функции распределения нормальной связки (6)

$$\begin{cases} F_{1,2}(x_1,x_2)=\Phi\left(\Phi^{(-)}(u_1)),\Phi^{(-)}(u_2);\theta\right), \\ x_1=\lambda_{1_1}+\dfrac{u_1^{\lambda_{3_1}}-(1-u_1)^{\lambda_{4_1}}}{\lambda_{2_1}}, \\ x_2=\lambda_{1_2}+\dfrac{u_2^{\lambda_{3_2}}-(1-u_2)^{\lambda_{4_2}}}{\lambda_{2_2}}, \end{cases} \tag{9}$$

где λ_{i_1}, λ_{i_2} $(i=\overline{1,4})$ – параметры обобщенных лямбда распределений СВ X_1 и X_2.

Выражение для плотности нормальной связки (7), построенное на основе одномерных ОЛР, в параметрической форме записывается следующим образом

$$\begin{cases} f_{1,2}(x_1,x_2)=\dfrac{N\left(\Phi^{(-)}(u_1)),\Phi^{(-)}(u_2);\theta\right)}{N\left(\Phi^{(-)}(u_1)\right)\cdot N\left(\Phi^{(-)}(u_2)\right)}\cdot\dfrac{\lambda_{2_1}}{\lambda_{3_1}u_1^{\lambda_{3_1}-1}+\lambda_{4_1}(1-u_1)^{\lambda_{4_1}-1}}\times \\ \quad\times\dfrac{\lambda_{2_2}}{\lambda_{3_2}u_2^{\lambda_{3_2}-1}+\lambda_{4_2}(1-u_2)^{\lambda_{4_2}-1}}, \\ x_1=\lambda_{1_1}+\dfrac{u_1^{\lambda_{3_1}}-(1-u_1)^{\lambda_{4_1}}}{\lambda_{2_1}}, \\ x_2=\lambda_{1_2}+\dfrac{u_2^{\lambda_{3_2}}-(1-u_2)^{\lambda_{4_2}}}{\lambda_{2_2}}. \end{cases} \tag{10}$$

Значение параметра θ при построении нормальной связки необходимо подобрать таким образом, чтобы обеспечить требуемое значение коэффициента линейной корреляции между СВ X_1 и X_2. Для определения θ используется метод моментов. Второй смешанный начальный момент распределения (10) определяется как

$$M[X_1\cdot X_2]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x_1x_2f_{1,2}(x_1,x_2)dx_1dx_2=$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\lambda_{1_1}+\frac{\Phi(y_1)^{\lambda_{3_1}}-(1-\Phi(y_1))^{\lambda_{4_1}}}{\lambda_{2_1}}\right)\times$$
$$\times\left(\lambda_{1_2}+\frac{\Phi(y_2)^{\lambda_{3_2}}-(1-\Phi(y_2))^{\lambda_{4_2}}}{\lambda_{2_2}}\right)N(y_1,y_2;\theta)dy_1dy_2=\Psi(\theta).$$

Таким образом, для определения θ в общем случае необходимо решить уравнение вида

$$\Psi(\theta)-m_{X_1}m_{X_2}=\rho_{11}\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}, \tag{11}$$

где m_{X_1}, m_{X_2}, σ_{X_1}, σ_{X_2} – математические ожидания и средние квадратические отклонения СВ X_1 и X_2 соответственно, ρ_{11} – коэффициент линейной корреляции между СВ X_1 и X_2. Уравнение (11) легко решается с использованием пакета MathCAD.

Необходимо отметить, что при построении нормальной связки предварительно для каждой СВ должны быть определены значения параметров ОЛР λ_i (формулы для определения могут быть взяты из [10]).

Функция распределения $F_{1,2}(t_1, t_2)$ при известных значениях λ_{i_1}, λ_{i_2} ($i=\overline{1,4}$) и параметра θ определяется с использованием следующей процедуры. Из уравнений

$$t_1 = \lambda_{1_1} + \frac{u_1^{\lambda_{3_1}} - (1-u_1)^{\lambda_{4_1}}}{\lambda_{2_1}};$$
$$t_2 = \lambda_{1_2} + \frac{u_2^{\lambda_{3_2}} - (1-u_2)^{\lambda_{4_2}}}{\lambda_{2_2}} \tag{12}$$

определяются значения u_1, u_2, соответствующие t_1 и t_2, которые затем подставляются в выражение функции распределения (5)

$$F_{1,2}(t_1,t_2) = \Phi\left(\Phi^{(-)}(u_1), \Phi^{(-)}(u_2); \theta\right).$$

Определение параметрической надежности с использованием нормальной связки. В случае использования для описания СВ Z_1 и Z_2 совместного распределения (9), показатель безотказности $P = Вер\{Z_1 \geq 0 \cap Z_2 \geq 0\}$ будет определяться следующим образом (смотри (3))

$$P = 1 - F_1(0) - F_2(0) + F_{1,2}(0,0) =$$
$$= 1 - u_1(0) - u_2(0) + \Phi\left(\Phi^{(-)}(u_1(0)), \Phi^{(-)}(u_2(0)); \theta\right), \tag{13}$$

где $u_1(0)$, $u_2(0)$ – значения, полученные путем решения уравнений (12) для $t_1 = 0$ и $t_2 = 0$.

С использованием (13) продемонстрируем совместное влияние на надежность отличных от нормального маргинальных распределений СВ Z_1 и Z_2 и линейной корреляции между ними. Для большего охвата практических ситуаций рассматривались маргинальные распределения с сильными и слабыми асимметрией и плосковершинностью. Результаты расчетов ВБР для нормированных СВ в виде

$$P = Вер\{\overset{\circ}{Z}_1 \geq t \cap \overset{\circ}{Z}_2 \geq t\}, \tag{14}$$

где $\overset{\circ}{Z}_1$ и $\overset{\circ}{Z}_2$ представляют нормированные СВ, а t – соответственно нормированный нижний предел для различных сочетаний значений числовых характеристик Z_1 и Z_2 (коэффициента асимметрии β_1 и коэффициента плосковершинности β_2). Также t приведены в таблице 1. Коэффициент линейной корреляции при этом принимался неизменным $\rho_{11} = 0,5$. Для сравнения в таблице 1 также приведены значения ВБР для случаев, когда СВ Z_1 и Z_2 являются независимыми и следуют нормальным законам (случай $\beta_1 = \beta_2 = 0$).

Таблица 1 – Результаты оценки показателя безотказности (14)

β_{1_1}	β_{2_1}	β_{1_2}	β_{2_2}	t	Нормальная связка (13)	Z_1 и Z_2 независимые, для описания используются ОЛР	Z_1 и Z_2 нормальные линейно зависимые	Z_1 и Z_2 независимые и нормальные
0,7	0,2	0,7	0,2	-2,0	0,9968	0,9967	0,9586	0,9550
				-2,5	0,9999	0,9999	0,9883	0,9876
				-3,0	1	1	0,9974	0,9973
-0,7	0,2	0,7	0,2	-2,0	0,9569	0,9562	0,9586	0,9550
				-2,5	0,9829	0,9829	0,9883	0,9876
				-3,0	0,9946	0,9946	0,9974	0,9973
-0,7	0,2	-0,7	0,2	-2,0	0,9254	0,9173	0,9586	0,9550
				-2,5	0,9686	0,9661	0,9883	0,9876
				-3,0	0,9897	0,9892	0,9974	0,9973
0,7	0,8	0,7	0,8	-2,0	0,9872	0,9864	0,9586	0,9550
				-2,5	0,9880	0,9980	0,9883	0,9876
				-3,0	0,9997	0,9997	0,9974	0,9973
-0,7	0,8	0,7	0,8	-2,0	0,9559	0,9537	0,9586	0,955
				-2,5	0,9810	0,9807	0,9883	0,9876
				-3,0	0,9921	0,9921	0,9974	0,9973
-0,7	0,8	-0,7	0,8	-2,0	0,9294	0,9220	0,9586	0,9550
				-2,5	0,9665	0,9637	0,9883	0,9876
				-3,0	0,9853	0,9845	0,9974	0,9973
0,3	-0,6	0,3	-0,6	-2,0	0,9910	0,9905	0,9586	0,9550
				-2,5	0,9996	0,9996	0,9883	0,9876
				-3,0	1	1	0,9974	0,9973
0,7	0,8	0,3	-0,6	-2,0	0,9891	0,9885	0,9586	0,9550
				-2,5	0,9988	0,9988	0,9883	0,9876
				-3,0	1	1	0,9974	0,9973

Результаты расчетов (таблица 1) показывают, что на получаемый уровень надежности, прежде всего, влияет учет отличия маргинальных распределений СВ Z_1 и Z_2 от нормального закона. Хотя линейная корреляция и оказывает влияние на получаемые значения показателя безотказности, это влияние не столь значительно. В рассмотренных примерах ее влияние более существенно в случае отрицательных значений коэффициента асимметрии СВ Z_1 и Z_2.

В обоснование практического применения нормальной связки для задач оценки параметрической надежности МС проведем исследование влияния на показатель безотказности нелинейной корреляции между СВ Z_1 и Z_2. С этой целью определялась надежность с использованием моделей на основе нормальной связки и модифицированной связки ФГМ [7, 8]

$$F(x_1,x_2) = F_1(x_1)F_2(x_2)\left[1+\alpha\left(1-F_1^{p}(x_1)\right)\left(1-F_2^{q}(x_2)\right)\right], \qquad (15)$$

где p, $q \geq 1$.

Модифицированная связка ФГМ имеет достаточно узкую область использования [8], однако дает возможность учесть в расчетах приведенные смешанные моменты ρ_{21}, ρ_{12}, характеризующие нелинейную корреляцию между СВ Z_1 и Z_2.

Определение вероятности $P = Вер\{Z_1 \geq 0 \cap Z_2 \geq 0\}$ в случае совместного распределения (15), построенного с использованием ОЛР (8), имеет вид

$$P = 1 - u_1(0) - u_2(0) + u_1(0)u_2(0)\left[1 + \alpha\left(1 - (u_1(0))^p\right)\left(1 - (u_2(0))^q\right)\right], \qquad (16)$$

где, как и выше, $u_1(0)$, $u_2(0)$ – значения, полученные путем решения уравнений (12) для $t_1 = 0$ и $t_2 = 0$.

В таблице 2 приведены значения ВБР согласно (14), полученные с использованием нормальной связки и связки ФГМ, для различных сочетаний значений числовых характеристик Z_1 и Z_2, а также t. Сочетания значений маргинальных и совместных (прежде всего, ρ_{21} и ρ_{12}) числовых характеристик СВ Z_1 и Z_2 для расчетов были выбраны исходя из обеспечения условия существования связки Фарлье–Гумбеля–Моргенштерна [8]. Коэффициент линейной корреляции принят ρ_{11}= 0,25. Параметры α, p и q распределения (15) определялись с использованием метода моментов [7].

Сравнительный анализ результатов расчетов, приведенных в таблице 2, показывает, что учет приведенных совместных числовых характеристик СВ Z_1 и Z_2 – ρ_{21} и ρ_{12}, характеризующих нелинейную стохастическую зависимость, не оказывает существенного влияния на оценку параметрической надежности (изменения в третьем-четвертом знаке после запятой). Таким образом, можно сделать вывод, что в большинстве практических случаев учет отличия маргинальных распределений от нормального случая и линейной корреляции между СВ позволяет получить удовлетворительный результат при определении параметрической надежности МС.

Практическое использование нормальной связки для определения вероятности достаточности топлива ступени РН. В качестве примера покажем практическое использование нормальной связки для определения показателя вероятности достаточности топлива для ступени РН. Безаварийное функционирование ступени РН в полете в том числе предполагает нормальное выключение двигательной установки (ДУ) в конце работы ступени. Одной из причин отказа и аварии ДУ на участке завершения работы может быть преждевременное израсходование одного из компонентов топлива. В соответствии с этим, одним из показателей, определяющих безотказность и безаварийность полета ступени РН и успешность выполнения миссии, является вероятность достаточности топлива.

Раскроем подробнее суть указанного показателя. Рабочий запас топлива на борту РН обеспечивает движение РН по расчетной траектории и получение заданной конечной скорости. Различные отклонения от номинальных значений характеристик РН, параметров атмосферы и др. приводят к тому, что реальная траектория, вообще говоря, будет отличаться от расчетной. Для компенсации указанных возмущений и обеспечения выполнения полетного задания по выведению КА на каждой ступени предусматриваются гарантийные запасы топлива. Для эксплуатирующихся РН гарантийные запасы топлива определены заранее и являются постоянными и не зависящими от веса выводимого КА и траектории выведения. Таким образом, для каждого конкретного пуска необходимо оценить достаточность компонентов топлива по ступеням РН.

Таблица 2 – Значения ВБР согласно (14), полученные для нормальной связки и модифицированной связки Фарлье–Гумбеля–Моргенштерна

β_{1_1}	β_{2_1}	β_{1_2}	β_{2_2}	t	Ф-ла (13)	Формула (16)	
0,3	0,6	0,5	0,7			ρ_{21}=0,20; ρ_{12}=0,15	ρ_{21}=0,05; ρ_{12}=0,15
				-1,5	0,9037	0,9005	0,9011
				-2,0	0,9703	0,9698	0,9698
				-2,5	0,9920	0,9919	0,9919
0,7	0,2	0,5	0,7			ρ_{21}=0,25; ρ_{12}=0,15	ρ_{21}=0,1; ρ_{12}=0,05
				-1,5	0,9301	0,9282	0,9289
				-2,0	0,9858	0,9857	0,9858
				-2,5	0,9970	0,9970	0,9970
0,2	-0,5	0,5	0,7			ρ_{21}=0,2; ρ_{12}=0,25	ρ_{21}=0,1; ρ_{12}=0,15
				-1,5	0,9032	0,8997	0,9002
				-2,0	0,9774	0,9770	0,9770
				-2,5	0,9961	0,9961	0,9961
0,2	-0,5	0,2	-0,7			ρ_{21}=0,2; ρ_{12}=0,25	ρ_{21}=0,1; ρ_{12}=0,15
				-1,5	0,8984	0,8946	0,8950
				-2,0	0,9831	0,9829	0,9829
				-2,5	0,9986	0,9986	0,9986
0,7	0,2	0,7	0,2			ρ_{21}=0,2; ρ_{12}=0,25	ρ_{21}=0,1; ρ_{12}=0,15
				-1,5	0,9505	0,9492	0,9494
				-2,0	0,9968	0,9967	0,9967
				-2,5	0,9999	0,9999	0,9999

В общем случае вероятность достаточности топлива для ступени РН может быть определена следующим образом

$$P_{Дост} = Вер[(G_{ост}^{Ок} > 0) \bigcap (G_{ост}^{Г} > 0) / t = t_{отс}], \tag{16}$$

где $G_{ост}^{Ок} > 0$ и $G_{ост}^{Г} > 0$ – события, состоящие в том, что на момент отсечки двигателя ($t_{отс}$) имеются остатки окислителя ($G_{ост}^{Ок}$) и горючего ($G_{ост}^{Г}$) соответственно. СВ $G_{ост}^{Ок}$ и $G_{ост}^{Г}$ являются зависимыми. Исходя из (16) вероятность достаточности топлива можно определить так

$$P_{Дост} = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} f(G_{ост}^{Ок}, G_{ост}^{Г}) dG_{ост}^{Ок} dG_{ост}^{Г}, \tag{17}$$

где $f(G_{ост}^{Ок}, G_{ост}^{Г})$ – двумерный закон распределения СВ $G_{ост}^{Ок}$ и $G_{ост}^{Г}$. Таким образом, для оценки вероятности достаточности топлива может быть использовано соотношение (13).

Определим вероятность достаточности топлива для первой ступени РКН «Зенит-3SLБ» при выведении космического аппарата «Лыбидь». Значения числовых характеристик СВ $G_{ост}^{Ок}$ и $G_{ост}^{Г}$, полученные по результатам статистического моделирования и обработки данных по предыдущим пускам РКН «Зенит-3SL» и РКН «Зенит-3SLБ», приведены в таблице 3.

Таблица 3 – Числовые характеристики СВ $G_{ост}^{Ок}$ и $G_{ост}^{Г}$

СВ	m, кг	σ, кг	β_1	β_2	ρ_{11}
$G_{ост}^{Ок}$	1521	507	0,12	-0,26	0,205
$G_{ост}^{Г}$	562	193	0,25	0,31	

Данные, приведенные в таблице 3, показывают, что распределения СВ $G_{ост}^{Ок}$ и $G_{ост}^{Г}$ незначительно отличаются от нормального, при этом между этими СВ имеется слабая положительная корреляция. Для нормированных СВ $G_{ост}^{Ок}$ и $G_{ост}^{Г}$ параметры распределений ОЛР составляют:

$$\lambda_{1_1} = -0,22197;\ \lambda_{2_1} = 0,254162;\ \lambda_{3_1} = 0,149499;\ \lambda_{4_1} = 0,229214;$$
$$\lambda_{1_2} = -0,212099;\ \lambda_{2_2} = 0,142211;\ \lambda_{3_2} = 0,073333;\ \lambda_{4_2} = 0,109244.$$

Определение параметра θ согласно (11) с использованием пакета математических вычислений MathCAD показано на рис. 1.

$$TOL := 10^{-6}$$

$$\lambda 1_x := -0.22197 \qquad \lambda 2_x := 0.254162 \qquad \lambda 3_x := 0.149499 \qquad \lambda 4_x := 0.229214$$

$$\lambda 1_y := -0.212099 \qquad \lambda 2_y := 0.142211 \qquad \lambda 3_y := 0.073333 \qquad \lambda 4_y := 0.109244$$

$$\rho_{11} := 0.205$$

$$f_1(t_1) := \lambda 1_x + \frac{\mathrm{cnorm}(t_1)^{\lambda 3_x} - (1 - \mathrm{cnorm}(t_1))^{\lambda 4_x}}{\lambda 2_x}$$

$$f_2(t_2) := \lambda 1_y + \frac{\mathrm{cnorm}(t_2)^{\lambda 3_y} - (1 - \mathrm{cnorm}(t_2))^{\lambda 4_y}}{\lambda 2_y}$$

$$\Psi(\theta) := \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\theta^2}} \cdot \int_{-10}^{10}\int_{-10}^{10} f_1(t_1)\cdot f_2(t_2)\cdot \exp\left[\frac{-\left(t_1^{\,2} - 2\theta\cdot t_1\cdot t_2 + t_2^{\,2}\right)}{2\left(1-\theta^2\right)}\right] dt_1\, dt_2$$

$$u := \rho_{11}$$

$$\theta_0 := \mathrm{root}(\Psi(u) - \rho_{11}, u)$$

$$\theta_0 = 0.20554$$

$$\Psi(\theta_0) = 0.205$$

Рис. 1 – Листинг MathCAD документа определения параметра θ.

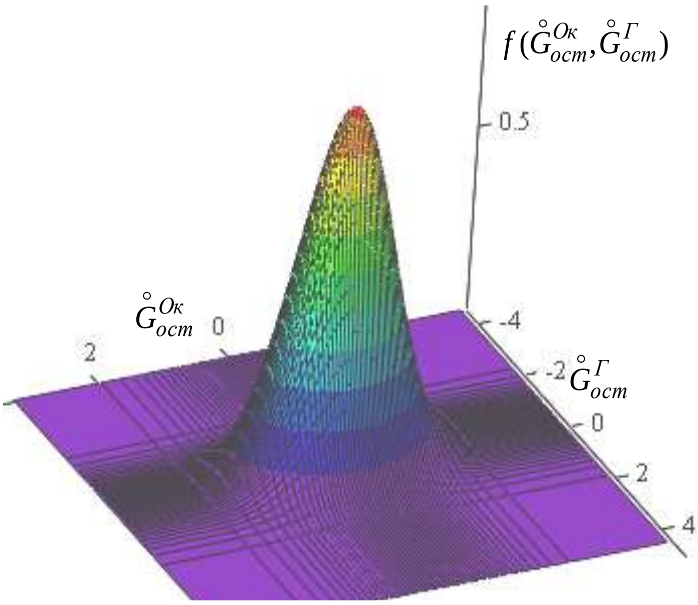

Рис. 2 – Поверхность распределения нормальной связки.

Поверхность распределения нормальной связки для нормированных СВ $G_{ост}^{Ок}$ и $G_{ост}^{Г}$ показана на рис. 2.

С использованием двумерного нормального распределения согласно (17) получается значение $P_{Дост}$ = 0,9969; для нормальной связки – $P_{Дост}$ = 0,9996. Таким образом, использование совместного распределения, которое позволяет учесть отличие маргинальных распределений от нормального случая и линейную корреляцию, дало возможность получить лучший прогноз по вероятности достаточности топлива на ступени РКН.

Заключение. Таким образом, в статье рассмотрены свойства нормальной связки, построенной на основе одномерных обобщенных лямбда распределений, а также продемонстрированы возможности ее использования для оценки параметрической надежности. Преимущество такого распределения в том, что оно позволяет учесть отличие распределений СВ от нормального случая и линейную корреляцию между ними, что позволяет получить более точные оценки параметрической надежности. Путем проведения сравнительного анализа с использованием двумерных модифицированного распределения Фарлье–Гумбеля–Маргенштерна и нормальной связки показано, что в задачах параметрической надежности учет нелинейной корреляции не приводит к значимому изменению значений параметрической надежности.

1. *Волков Е. Б., Судаков Р. С., Сырицын Т. А.* Основы теории надежности ракетных двигателей. М.: Машиностроение, 1975. 399 с.
2. *Крамер Г.* Математические методы статистики. М.: ГИИЛ, 1975. 648 с.
3. *Митропольский А. К.* Техника статистических вычислений. М., Наука, 1971. 576 с.
4. *Перлик В. И.* Методология надежности механических систем летательных аппаратов. Космическая техника. Ракетное вооружение. Дн-ск: ГКБЮ, 1995. Вып.1–2. С. 37–43.
5. *Перлик В. И., Гладкий Э. Г.* Статистический анализ многомерных выборок характеристик систем ракетно-космической техники. Космическая техника. Ракетное вооружение. Дн-ск: ГКБЮ. 2002. Вып. 2. С. 16–27.
6. *Перлик В. И., Савчук В. П.* К вопросу определения надежности технических систем методом функций работоспособности. Вероятностно-статистические методы в проектировании конструкций. Дн-ск: ДГУ, 1974. С. 29–35.
7. *Харитонова Г. Г., Перлик В. И.* Обобщение двухмерной системы распределений вероятностей для решения нелинейных задач надежности технических объектов. Надежность и долговечность машин и сооружений. К.: Наук. Думка, 1992. Вып. 21. С. 3–9.
8. *Bairamov I, Kotz S. & Bekci M.* New generalized Farlie-Gumbel-Morgenstern distributions and concomitants of order statistics. Journal of Applied Statistics. 2001. Vol. 28, Is. 5. P. 521–536.
9. *Balakrishnan N., Lai Chin-Diew* Continuous Bivariate Distributions. Springer-Verlag New York Inc., 2010. 684 p.
10. *Freimer M., Mudholkar G., Kollia G., Lin C.* A study of the generalized Tukey Lambda family, Communications in Statistics, Theory and Methods. 1988. 17(10). P. 3547–3567
11. *Jonson N.L., Kotz S.* Continuous Multivariate Distributions. N.Y.e.a. John Wiley and Sons, 1972. Vol. 2. 333 p.
12. *Karian Z., Dudewicz E.* Fitting Statistical Distributions: The Generalized Lambda Distribution and Generalized Bootstrap Methods. CRC Press, Boca Raton, 2000. 435 p.
13. *Lee L.* Generalized econometric models with selectivity. Econometrica. 1983. 51. P. 507–512.
14. *Trivedi P. K., Zimmer D. M.* Copula Modeling: An Introduction for Practitioners. Foundations and Trends in Econometrics. 2005. Vol. 1, No 1. P. 1–111.

Получено 06.06.2018,
в окончательном варианте 14.12.2018