УДК 533.21

В. И. ТИМОШЕНКО, В. П. ГАЛИНСКИЙ

АЛГОРИТМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ УСЛОВИЙ НА ОСИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ ПРИ РАСЧЕТЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СТРУЙНЫХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОГО ГАЗА

Институт технической механики
Национальной академии наук Украины и Государственного космического агентства Украины,
ул. Лешко-Попеля, 15, 49005, Днепр, Украина; e-mail: itm12@ukr.net

В роботі розглядається питання про особливість розрахунку параметрів просторової течії в багатокомпонентному надзвуковому струмені на осі циліндричної системи координат. Ця особливість пов'язана з наявністю членів типу джерела в рівняннях, в знаменнику яких міститься радіальна координата, яка звертається в нуль на осі циліндричної системи координат. Метою роботи є розробка алгоритму визначення граничних умов на осі циліндричної системи координат при розрахунку течії в надзвуковому просторовому струмені в наближенні «в'язкого шару». Для вирішення рівнянь «в'язкого шару» використовується маршовий метод розрахунку поля течії вздовж осі циліндричної системи координат. Обчислення параметрів потоку в вузлі, що розташований на осі циліндричної системи координат, здійснюється за явною скінчено-різницевою схемою в декартовій системі координат. Скінчено-різницева дискретизація рівнянь в декартовій системі координат у вузлі на осі робиться за схемою хрест з використанням параметрів потоку в вузлах, розташованих в околу осі в меридіональних площинах 0, $\pi/2$, π і $3\pi/2$. Для завдання параметрів потоку в вузлах в околу осі в меридіональних площинах, що знаходяться за межами розрахункової області, використовується заповнення параметрів потоку, виходячи з граничної умови симетрії на граничній меридіональній площині. Отримані параметри потоку на осі на новому шарі використовуються для завдання граничних умов на осі циліндричної системи координат у всіх меридіональних площинах розрахункової сітки. Запропонований підхід усунення особливості при розрахунку параметрів потоку на осі циліндричної системи координат для струменевих просторових надзвукових течій є новим. Використовуючи запропонований підхід, можна досить просто узагальнювати алгоритми розрахунку осесиметричних струменевих течій на випадок довільних просторових неосесиметричних течій в струмені. Таким чином, розроблено алгоритм розрахунку просторової несиметричної течії в струмені з використанням циліндричної системи координат. Отримані в роботі результати можуть бути легко впроваджені в алгоритми розрахунку течії в просторових струменях.

В работе рассматривается вопрос об особенности расчета параметров пространственного течения в многокомпонентой сверхзвуковой струе на оси цилиндрической системы координат. Эта особенность связана с наличием членов типа источника в уравнениях, в знаменателе которых содержится радиальная координата, которая обращается в нуль на оси цилиндрической системы координат. Целью работы является разработка алгоритма определения граничных условий на оси цилиндрической системы координат при расчете течения в сверхзвуковой пространственной струе в приближении «вязкого слоя». Для решения уравнений «вязкого слоя» используется маршевый метод расчета поля течения вдоль оси цилиндрической системы координат. Вычисление параметров потока в узле, расположенном на оси цилиндрической системы координат, осуществляется по явной конечно-разностной схеме в декартовой системе координат. Конечно-разностная дискретизация уравнений в декартовой системе координат в узле на оси производится по схеме крест с использованием параметров потока в узлах, расположенных в окрестности оси в меридиональных плоскостях 0, $\pi/2$, π и $3\pi/2$. Для задания параметров потока в узлах в окрестности оси в меридиональных плоскостях, находящихся за пределами расчетной области, используется восполнение параметров потока исходя из граничного условия симметрии на граничной меридиональной плоскости. Полученные параметры потока на оси на новом слое используются для задания граничных условий на оси цилиндрической системы координат во всех меридиональных плоскостях расчетной сетки. Предложенный подход устранения особенности при расчете параметров потока на оси цилиндрической системы координат для струйных пространственных сверхзвуковых течений является новым. Используя предложенный подход, можно достаточно просто обобщать алгоритмы расчета осесимметричных струйных течений на случай произвольных пространственных неосесимметричных течений в струе. Таким образом, разработан алгоритм расчета пространственного несимметричного течения в струе с использованием цилиндрической системы координат. Полученные в работе результаты могут быть легко внедрены в алгоритмы расчета течения в пространственных струях.

This paper addresses singularities in the calculation of 3D flow parameters in a multicomponent supersonic jet on the axis of a cylindrical coordinate system. This singularity is due to the presence of source-type terms in equations whose denominator has the radial coordinate, which becomes zero on the axis of a cylindrical coordinate system. The aim of this paper is to develop an algorithm for boundary condition determination on the axis of a cylindrical coordinate system in the calculation of a 3D supersonic jet in the "viscous layer" approximation. The "viscous layer" equations are solved by marching to give the flow field along the axis of the cylindrical coordinate system. The flow parameters at a node situated on the axis of the cylindrical coordinate system are determined by an explicit finite-difference scheme in a Cartesian coordinate system. The finite-difference discretization of the equations in the Cartesian coordinate system at a node on the axis of the cylindrical coordinate system is done by a cross scheme using the flow parameters at the nodes situated in the vicinity of the axis in the 0, $\pi/2$, π, and $3\pi/2$ meridional planes. The flow parameters at the nodes in the vicinity of the axis in the meridional planes beyond the computation region are specified using the boundary symmetry condition in the boundary meridional plane. The obtained flow parameters on the axis in the new layer are used in boundary condition specification on the axis of the cylindrical coordinate system in all the meridional planes of the computational mesh. The proposed approach to singularity elimination in the calculation of flow parameters on the axis of a cylindrical coordinate system for 3D supersonic jet flows is new. Using this approach, one can rather simply generalize axisymmetric jet flow calculation algorithms to the case of arbitrary 3D non-axisymmetric flows in a jet. So an algorithm is developed for the calculation of a 3D asymmetric flow in a jet using a cylindrical coordinate system. The results obtained in this work may easily be introduced into 3D jet flow calculation algorithms.

Ключевые слова: *цилиндрическая система координат, декартовая система координат, ось струи, особенность, пространственное течение, алгоритм, граничное условие.*

При расчете пространственных течений с использованием цилиндрической системы координат возникает особенность на оси $r=0$. Для осесимметричных течений эта особенность устранима, т. к. радиальная компонента скорости v_r равна нулю на оси симметрии. Наличие в уравнении неразрывности слагаемого, содержащего v_r/r, приводит к появлению особенности типа $0/0$, т. к. при $r\to 0$ имеем $v_r\to 0$ и отношение v_r/r заменяется производной $\partial v_r/\partial r$ при $r=0$. При расчете параметров пространственных струй с использованием уравнений газовой динамики, записанных в цилиндрической системе координат $Ozr\theta$, возникает неустранимая особенность, связанная с тем, что и радиальная v_r, и окружная v_θ компоненты скорости не равны нулю и являются функцией окружной координаты θ при $r=0$. В работах [1, 2] были проведены расчеты пространственных течений в каналах и струях, однако об устранении особенности на оси $r=0$ там ничего не сказано. Для преодоления этой особенности пространственных струй целесообразно при определении параметров струи на оси Oz цилиндрической системы координат $Ozr\theta$ использовать разностную аппроксимацию уравнений газовой динамики, записанных в декартовой системе координат $Oxyz$.

Целью данной работы является разработка алгоритма расчета параметров пространственного потока на продольной оси цилиндрической системы координат при расчете течения в струе с использованием маршевого метода расчета [3] для упрощенных уравнений Навье–Стокса в приближении «вязкого слоя».

Уравнения сверхзвукового течения вязкого газа в приближении «вязкого слоя» записываются в виде двух систем уравнений: второго и первого порядка.

Систему уравнений второго порядка можно записать в унифицированном виде в декартовой системе координат $Oxyz$ с осью Ox, направленной вдоль оси Oz цилиндрической системы координат $Ozr\theta$ [3]

$$a\frac{\partial f^k}{\partial x}+b\frac{\partial f^k}{\partial y}+c\frac{\partial f^k}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\alpha^k\frac{\partial f^k}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\alpha^k\frac{\partial f^k}{\partial z}\right)+\delta^k, \qquad (1)$$

где $f^k=\{u,v,w,H,X_k\}$ для $k=1,2,3,4,\ldots,(4+K)$; $a=\rho u$; $b=\rho v$; $c=\rho w$; α^k – коэффициенты диффузии; $\alpha^{1,2,3}=\mu$; $\alpha^4=\mu/\mathrm{Pr}$; $\alpha^{5,\ldots,K+4}=\mu/Sm$; $\delta^1=-\chi\dfrac{\partial p}{\partial x}$; $\delta^2=-\dfrac{1}{\chi}\dfrac{\partial p}{\partial y}$; $\delta^3=-\dfrac{1}{\chi}\dfrac{\partial p}{\partial z}$, $\delta^{4,\ldots,4+K}=0$; μ – коэффициент динамической молекулярной вязкости; Pr – турбулентное число Прандтля; Sm – турбулентное число Шмидта; χ – коэффициент регуляризации; u, v, w – компоненты вектора скорости в декартовой системе координат; p – давление; ρ – плотность газовой смеси; H – полная энтальпия газовой смеси; $\{X_n\}$ – компоненты газовой смеси, $n = 1,...,K$; K – количество компонент в газовой смеси.

Применим к уравнениям (1), записанным на оси Ox при $y = 0$, $z = 0$ (узел $i = 0$, $j = 0$), разностную аппроксимацию по y и по z.

При вычислении производных параметров потока в узле, лежащем на оси Ox декартовой системы координат (или оси Oz цилиндрической системы координат), используются параметры потока $f^k{}_{0,0}$ в узле на оси Ox и параметры потока $f^k_{1,0}$, $f^k_{-1,0}$, $f^k_{0,1}$, $f^k_{0,-1}$ из узлов, соседствующих с осью Ox и показанных на рис. 1.

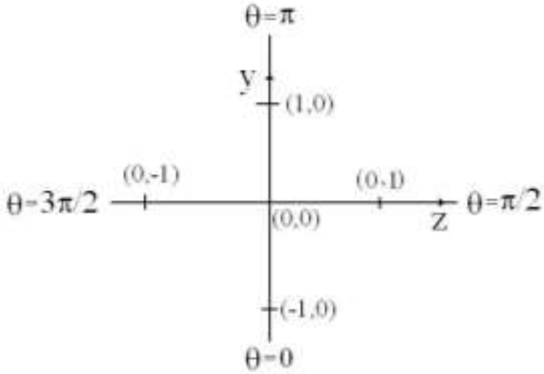

Рис. 1

Параметры потока с нижним индексом (±1, 0) выбираются из узлов с номерами $j = 2$, расположенных в меридиональных плоскостях $\theta = \pi$ и $\theta = 0$ цилиндрической системы координат, а параметры потока с нижним индексом (0, ±1) выбираются из узлов с номерами $j = 2$, расположенных в меридиональных плоскостях $\theta = \pi / 2$ и $\theta = 3\pi / 2$. Значения параметров потока в меридиональных плоскостях, лежащих за пределами расчетной области (например, в плоскости $\theta = 3\pi / 2$), восполняются исходя из условий симметрии потока относительно границ расчетной области по θ. Во всех вариантах шаг $\Delta\theta = \theta^* / (N_\theta - 1)$ вводимой расчетной сетки должен быть кратным $\pi/2$, т. е. частное от деления $\pi/2$ на $\Delta\theta$ должно быть целым числом, здесь N_θ – количество меридиональных плоскостей расчетной сетки, θ^* – максимальное граничное значение угла θ расчетной сетки. В этом случае меридиональные плоскости $\theta = \pi / 2$, $\theta = \pi$ и $\theta = 3\pi / 2$ всегда будут совпадать с лучами расчетной сетки либо их симметричными отражениями при заполнении полного сектора по θ.

Используется аппроксимация конвективных производных центральными разностями:

$$b\frac{\partial f^k}{\partial y} = b^{n-1}_{0,0}\frac{f^n{}_{1,0} - f^n{}_{-1,0}}{2\Delta y_{1/2}}; \; c\frac{\partial f^k}{\partial z} = c^{n-1}_{0,0}\frac{f^n{}_{0,1} - f^n{}_{0,-1}}{2\Delta z_{1/2}}. \qquad (2)$$

Диссипативные слагаемые также аппроксимируются центральными разностями:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\alpha^k \frac{\partial f^k}{\partial y}\right)=\frac{1}{\Delta y_{1/2}}\left\{\alpha^k_{1/2,0}\frac{f^k{}_{1,0}-f^k{}_{0,0}}{\Delta y_1}-\alpha^k_{-1/2,0}\frac{f^k{}_{0,0}-f^k{}_{-1,0}}{\Delta y_{-1}}\right\}; \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\alpha^k \frac{\partial f^k}{\partial z}\right)=\frac{1}{\Delta z_{1/2}}\left\{\alpha^k_{0,1/2}\frac{f^k{}_{0,1}-f^k{}_{0,0}}{\Delta z_1}-\alpha^k_{0,-1/2}\frac{f^k{}_{0,0}-f^k{}_{0,-1}}{\Delta z_{-1}}\right\}. \quad (4)$$

Подставив (2), (3) и (4) в (1) и приводя подобные члены, получим

$$a\frac{f^n{}_{0,0}-f^{n-1}{}_{0,0}}{\Delta x}=A^y f^k_{1,0}+B^y f^k_{0,0}+C^y f^k_{-1,0}+A^z f^k_{0,1}+B^z f^k_{0,0}+C^z f^k_{0,-1}+\delta^k{}_{0,0}\,, \quad (5)$$

где $A^y=-\frac{1}{2\Delta y_{1/2}}b^{n-1}_{0,0}+\frac{1}{\Delta y_1}\alpha^k_{1/2,0}$; $B^y=-\frac{1}{\Delta y_{1/2}}\left(\frac{\alpha^k_{1/2,0}}{\Delta y_1}+\frac{\alpha^k_{-1/2,0}}{\Delta y_{-1}}\right)$;

$C^y=\frac{1}{2\Delta y_{1/2}}b^{n-1}_{0,0}+\frac{1}{\Delta y_{-1}}\alpha^k_{-1/2,0}$; $A^z=-\frac{1}{2\Delta z_{1/2}}c^{n-1}_{0,0}+\frac{1}{\Delta z_1}\alpha^k_{0,1/2}$;

$B^z-\frac{1}{\Delta z_{1/2}}\left(\frac{\alpha^k_{0,1/2}}{\Delta z_1}+\frac{\alpha^k_{0,-1/2}}{\Delta z_{-1}}\right)$; $C^z=\frac{1}{2\Delta z_{1/2}}b^{n-1}_{0,0}+\frac{1}{\Delta z_{-1}}\alpha^k_{-1/2,0}$.

Здесь введены обозначения

$$\Delta y_1=S_{\theta=0}\Delta\eta;\ \Delta y_{-1}=S_{\theta=\pi}\Delta\eta;\ \Delta y_{1/2}=\left(\Delta y_{-1}+\Delta y_1\right)/2;$$

$$\Delta z_1=S_{\theta=\pi/2}\Delta\eta;\ \Delta z_{-1}=S_{\theta=3\pi/4}\Delta\eta;\ \Delta z_{1/2}=\left(\Delta z_{-1}+\Delta z_1\right)/2,$$

где $S_{\theta=\theta_i}$ – радиальная координата условной границы струи в меридиональной плоскости $\theta=\theta_i$; $\Delta\eta$ – шаг расчетной сетки для нормированной радиальной координаты $\eta=r/S_{\theta=\theta_i}$, $\Delta\eta=1/\left(N_\eta-1\right)$, N_η – количество узлов расчетной сетки в радиальном направлении.

Из соотношения (5) следует

$$\begin{gathered}f^n{}_{0,0}(a_{0,0}-\Delta x(B^y+B^z))=\\=a_{i0j0}f^{n-1}{}_{0,0}+\left(A^y f^k_{1,0}+C^y f^k_{-1,0}+A^z f^k_{0,1}+C^z f^k_{0,-1}+\delta^k\right)\Delta x.\end{gathered} \quad (6)$$

В плоскостях при $\theta^*=\pi$ имеем

$$v_{1,0}=\left(v_r\right)_{2,N_\theta};\ v_{-1,0}=-\left(v_r\right)_{2,1};\ v_{0,1}=\left(v_\theta\right)_{2,(N_\theta-1)/2+1};\ v_{0,-1}=-\left(v_\theta\right)_{2,(N_\theta-1)/2+1}; \quad (7)$$

$$w_{1,0}=-\left(v_\theta\right)_{2,N_\theta};\ w_{-1,0}=\left(v_\theta\right)_{2,1};\ w_{0,1}=\left(v_r\right)_{2,(N_\theta-1)/2+1};\ w_{0,-1}=-\left(v_r\right)_{2,(N_\theta-1)/2+1}.$$

В общем случае на оси цилиндрической системы координат радиальная и окружная компоненты скорости не равны нулю и определяются соотношениями

$$v_{r,1,i}=-v_{0,0}\cos\theta_i+w_{0,0}\sin\theta_i;\ v_{\theta,1,i}=v_{0,0}\sin\theta_i+w_{0,0}\cos\theta_i,$$

где $i = 1, 2, ..., N_\theta$; $\theta_i = (i-1)\Delta\theta$; $\Delta\theta = \pi/(N_\theta - 1)$.

В этой постановке при численном решении уравнений газовой динамики используется разностная аппроксимация уравнений газовой динамики, записанных в цилиндрической системе координат, при $j = 2, ..., N_\eta$, $i = 1, ..., N_\theta$. Для того чтобы координатные плоскости в декартовой системе координат $y =$ const и $z =$ const совпадали с меридиональными плоскостями $\theta = 0$, $\theta = \pi/2$, $\theta = \pi$, $\theta = 3\pi/2$, количество меридиональных плоскостей $\theta = \theta_i$ должно быть нечетным числом при $\theta^* = \pi$. Для определения параметров потока на оси цилиндрической системы координат при $j = 1$ используются соотношения (6). Эти параметры используются в качестве граничных условий в радиальном направлении в меридиональных плоскостях $\theta = \theta_i$.

В приближении «вязкого слоя» к уравнениям первого порядка относятся уравнение неразрывности и уравнения количества движения в проекциях на поперечные координатные направления, определяемые осями координат Oy и Oz.

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0; \tag{8}$$

$$\rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} + \rho w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\chi}\frac{\partial p}{\partial y}; \tag{9}$$

$$\rho u \frac{\partial w}{\partial x} + \rho v \frac{\partial w}{\partial y} + \rho w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\chi}\frac{\partial p}{\partial z}. \tag{10}$$

Используя уравнение состояния $p = F \cdot \rho$, $F = (\gamma - 1)h/\gamma$ для совершенного газа и $F = R_0 \sum_{k=1}^{K} \frac{X_k}{m_k} T$ для химически реагирующей смеси газов, будем рассматривать уравнение неразрывности (8) как уравнение относительно p

$$\frac{\partial u \cdot p / F}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0. \tag{11}$$

При решении уравнений первого порядка могут использоваться два варианта расчета.

Вариант 1. С использованием центральных разностей по y и по z разностное соотношение для уравнения (11) записывается в следующем виде

$$\begin{aligned} &(u/F)^n{}_{0,0}\, p^n{}_{0,0} = (u \cdot p / F)^{n-1}{}_{0,0} - \\ &-\left((\rho v)_{1,0} - (\rho v)_{-1,0}\right)\frac{\Delta x}{\Delta y_1 + \Delta y_{-1}} - \left((\rho w)_{0,1} - (\rho w)_{0,-1}\right)\frac{2\Delta x}{\Delta z_{1/2}}. \end{aligned} \tag{12}$$

Таким образом, в этом подходе значения всех компонент вектора скорости, полной энтальпии и концентраций компонент смеси на оси цилиндрической системы координат определяются соотношениями (6), которые вытекают из разностной аппроксимации уравнений второго порядка (1), а давление определяется из соотношения (12), которое является следствием уравнения неразрывности в виде (11).

Вариант 2. Используются три уравнения (8), (9), (10). Используя центральные разности по y и по z, запишем соответствующие разностные соотношения в следующем виде

$$\begin{aligned}&\left(u/F\right)^{n}{}_{0,0}\,p^{n}{}_{0,0}=\left(u\cdot p/F\right)^{n-1}{}_{0,0}-\\&-\left(\left(\rho v\right)_{1,0}-\left(\rho v\right)_{-1,0}\right)\frac{\Delta x}{\Delta y_{1}+\Delta y_{-1}}-\left(\left(\rho w\right)_{0,1}-\left(\rho w\right)_{0,-1}\right)\frac{2\Delta x}{\Delta z_{1/2}};\end{aligned}\tag{13}$$

$$\begin{aligned}&\left(\rho u\right)_{0,0}^{n-1}v_{0,0}^{n}=\left(\rho u\right)_{0,0}^{n-1}v_{0,0}^{n-1}-\frac{\Delta x}{\Delta y_{1/2}}\left(p_{1,0}^{n-1}-p_{-1,0}^{n-1}\right)\\&-\frac{\Delta x}{\Delta y_{1/2}}\left(\rho v\right)_{0,0}^{n-1}\left(v_{1,0}^{n-1}-v_{-1,0}^{n-1}\right)-\frac{\Delta x}{\Delta z_{1/2}}\left(\rho w\right)_{0,0}^{n-1}\left(v_{0,1}^{n-1}-v_{0,-1}^{n-1}\right);\end{aligned}\tag{14}$$

$$\begin{aligned}&\left(\rho u\right)_{0,0}^{n-1}w_{0,0}^{n}=\left(\rho u\right)_{0,0}^{n-1}w_{0,0}^{n-1}-\frac{\Delta x}{\Delta z_{1/2}}\left(p_{0,1}^{n-1}-p_{0,,-1}^{n-1}\right)-\\&-\frac{\Delta x}{\Delta y_{1/2}}\left(\rho v\right)_{0,0}^{n-1}\left(w_{1,0}^{n-1}-w_{-1,0}^{n-1}\right)-\frac{\Delta x}{\Delta z_{1/2}}\left(\rho w\right)_{0,0}^{n-1}\left(w_{0,1}^{n-1}-w_{0,-1}^{n-1}\right).\end{aligned}\tag{15}$$

Соотношения (13), (14), (15) служат для определения давления $p^{n}{}_{0,0}$ и компонент вектора скорости $v^{n}{}_{0,0}$ и $w^{n}{}_{0,0}$ на оси Oz цилиндрической системы координат. Заметим, что уравнение (13) совпадает с уравнением (12), а уравнения (14) и (15) вытекают из (6) при $\alpha^{k}=0$, то есть для

$$A^{y}=-\frac{1}{2\Delta y_{1/2}}b_{0,0}^{n-1};\ B^{y}=0;\ C^{y}=\frac{1}{2\Delta y_{1/2}}b_{0,0}^{n-1};$$

$$A^{z}=-\frac{1}{2\Delta z_{1/2}}c_{0,0}^{n-1};\ B^{z}=0;\ C^{z}=\frac{1}{2\Delta z_{1/2}}b_{0,0}^{n-1}.$$

В цилиндрической системе координат $Ozr\theta$ рассматриваются плоскости $\theta=0$, $\theta=\pi$, $\theta=\pi/2$, $\theta=3\pi/2$. В этих плоскостях, как уже отмечалось, выполняются соотношения (7).

Значения скалярных параметров (давления, плотности, энтальпии и концентраций компонент смеси), полученные в узлах в декартовой системе координат $Oxyz$, используются для расчета значений этих параметров в узлах конечно-разностной сетки в цилиндрической системе координат, прилегающих к оси Oz.

В частности, для давления имеем

$$p_{-1,0}=p_{2,1};\ p_{1,0}=p_{2,N_{\theta}};\ p_{0,1}=p_{2,(N_{\theta}-1)/2+1};\ p_{0,-1}=p_{2,(N_{\theta}-1)/2+1}.$$

На продольной оси Oz имеем $p_{1,1}=p_{0,0}$.

В общем случае на оси цилиндрической системы координат радиальная и окружная компоненты скорости не равны нулю и определяются соотношениями

$$(v_r)_{1,1} = -v_{0,0}\cos\theta + w_{0,0}\sin\theta\,;\ (v_\theta)_{1,1} = v_{0,0}\sin\theta + w_{0,0}\cos\theta\,.$$

Выводы. Разработан алгоритм расчета параметров пространственного потока на продольной оси цилиндрической системы координат при расчете течения в струе с использованием маршевого метода расчета [3] для уравнений «вязкого слоя». Используется алгоритм, в котором сначала рассчитываются параметры потока в узле на оси цилиндрической системы координат для системы уравнений, записанной в декартовой системе координат. Затем при решении уравнений «вязкого слоя» в цилиндрической системе координат полученные параметры потока на оси используются в качестве граничных значений в меридиональных плоскостях расчетной сетки.

1 *Иванов М. Я., Крайко А. Н.* Метод сквозного счета для двумерных и пространственных сверхзвуковых течений. II. Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1972. Т. 12, № 3. С. 805–813.

2 *Иванов М. Я., Назаров В. П.* Численное решение задачи о «боковом» взаимодействии нерасчетных сверхзвуковых струй идеального газа с плоскостью и друг с другом Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1974. Т. 14, № 1. С. 179–187.

3 *Тимошенко В. И., Белоцерковец И. С.* Маршевый расчет течения при взаимодействии сверхзвуковой турбулентной струи со спутным ограниченным дозвуковым потоком / Вісн. Дніпропетр. ун-ту. 2008. 1, вип. 1. С. 15–23.

Получено 10.12.2018,
в окончательном варианте 20.12.2018