УДК 621.002.56

**В. С. СЕНЬКИН, С. В. СЮТКИНА-ДОРОНИНА**

# К ВЫБОРУ МЕТОДОВ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ПРИ ОПТИМИЗАЦИИ ПРОЕКТНЫХ ПАРАМЕТРОВ И ПРОГРАММ УПРАВЛЕНИЯ РАКЕТНЫМ ОБЪЕКТОМ

*Институт технической механики*
*Национальной академии наук Украины и Государственного космического агентства Украины,*
*ул. Лешко-Попеля, 15, 49005, Днепр, Украина; e-mail: svetasut2012@gmail.com*

Проведено вибір раціональних методів для вирішення однієї з комплексних задач початкового етапу проектування, яка пов'язана з оптимізацією проектних параметрів, параметрів траєкторії, програм керування і основних характеристик одноступінчатих керованих ракетних об'єктів (КРО) з маршовими ракетними двигунами на твердому паливі. До складу параметрів, які оптимізуються, включені проектні параметри КРО, а також параметри траєкторії, які дозволяють формувати програми керування рухом КРО на різних ділянках польоту. Оптимізація параметрів проводилася з умови максимуму цільової функції дальності польоту – відстані, на яку доставляється головна частина КРО з необхідними значеннями кінематичних параметрів руху в кінці польоту. Розроблено алгоритми і програми, із застосуванням яких проведена оцінка ефективності використання детермінованих методів оптимізації при розв'язанні комплексної задачі, таких як: метод конфігурацій нульового порядку (Хука–Дживса), метод деформованого багатогранника нульового порядку (Нелдера–Міда), градієнтні методи покоординатного спуску першого і другого порядків. Показана доцільність застосування методу конфігурацій (Хука–Дживса), який знаходить вектор параметрів, що оптимізуються, найбільш наближений до глобального оптимуму цільового функціоналу. Як показали результати розрахунків, градієнтні методи покоординатного спуску першого і другого порядків і метод деформованого багатогранника нульового порядку вимагають порівняно більшої кількості ітерацій для знаходження оптимального значення вектора параметрів, які оптимізуються. Відзначено, що дальність польоту істотно залежить від значень обраних параметрів, які оптимізуються. У зв'язку з цим оптимізація обраних (та, можливо, інших) параметрів при розв'язанні конкретних цільових задач представляється необхідним етапом процесу проектування КРО. Наведені алгоритми оптимізації можуть бути без істотних доробок використані проектними організаціями на початковому етапі проектування об'єктів ракетно-космічної техніки різного призначення.

Проведен выбор рациональных методов для решения одной из комплексных задач начального этапа проектирования, связанной с оптимизацией проектных параметров, параметров траектории, программ управления и основных характеристик одноступенчатых управляемых ракетных объектов (УРО) с маршевыми ракетными двигателями на твёрдом топливе. В состав оптимизируемых параметров включены проектные параметры УРО, а также параметры траектории, позволяющие формировать программы управления движением УРО на различных участках полёта. Оптимизация параметров проводилась из условия максимума целевой функции дальности полёта – расстояния, на которое доставляется головная часть УРО с требуемыми значениями кинематических параметров движения в конце полёта. Разработаны алгоритмы и программы, с применением которых проведена оценка эффективности использования детерминированных методов оптимизации при решении комплексной задачи, таких как: метод конфигураций нулевого порядка (Хука–Дживса), метод деформируемого многогранника нулевого порядка (Нелдера–Мида), градиентные методы покоординатного спуска первого и второго порядков. Показана целесообразность использования метода конфигураций (Хука–Дживса), который определяет вектор оптимизируемых параметров, наиболее приближенный к глобальному оптимуму целевого функционала. Как показали результаты расчётов, градиентные методы покоординатного спуска первого и второго порядков и метод деформируемого многогранника нулевого порядка требуют сравнительно большего количества итераций для нахождения оптимального значения вектора оптимизируемых параметров. Отмечено, что дальность полета существенно зависит от значений выбранных оптимизируемых параметров. В связи с этим оптимизация выбранных (и, возможно, других) параметров при решении конкретных целевых задач представляется необходимым этапом процесса проектирования УРО. Рассмотренные алгоритмы оптимизации могут быть без существенных доработок использованы проектными организациями на начальном этапе проектирования объектов ракетно-космической техники различного назначения.

The aim of this work is to choose rational methods for solving the combined problem of the optimization of the design parameters, trajectory parameters, control programs, and basic characteristics of single-stage controlled rockets with solid-propellant sustainer engines at the initial design stage. The optimization parameters include rocket design parameters and trajectory parameters that allow one to form flight control programs in different flight segments. The parameters were optimized in such a way as to maximize the flight range objective function, i. e. the distance for which the rocket head is to be delivered with the required values of the kinematic parameters at the end of the flight. Algorithms and programs were developed to assess the efficiency of deterministic optimization methods, such as the Hooke–Jeeves zero-order pattern search, the Nelder–Mead zero-order polytope method, and first- and second-order coordinate gradient descent methods, in the solution of the combined problem. The use of the Hooke–Jeeves zero-order pattern search, which gives the optimization parameter vector closest to the global optimum of the objective function, was shown to be expedient. As shown by calculations, first- and second-order coordinate gradient descent methods and the zero-order polytope method require a comparatively larger number of iterations to find the optimal value of the optimization parameter vector. The flight range depends essentially on the values of the chosen optimization parameters. Because of this, the optimization of the chosen parameters (and, perhaps, other parameters too) in the solution of specific target problems seems to be an indispensable stage of controlled-rocket design. The optimization algorithms considered may be used without any significant modifications by design organizations at the initial design stage of space hardware of different purposes.

***Ключевые слова:*** *управляемый объект, маршевый ракетный двигатель, твёрдое топливо, начальный этап проектирования, проектные параметры, параметры траектории, целевой функционал, детерминированные методы оптимизации.*

**Введение.** Одной из актуальных задач, стоящих перед ракетно-космической отраслью Украины, является проектирование, разработка и создание новых управляемых ракетных объектов (УРО) [1], предназначенных для решения различных целевых задач. Проведение этих работ связано с большими затратами материальных, финансовых и технических ресурсов. Необходимость учета этих факторов при проектировании УРО предъявляет повышенные требования к качеству принимаемых проектных решений. При этом следует отметить, что неверные (нерациональные) решения, принятые на начальном этапе проектирования УРО, приводят в конечном итоге к снижению эффективности выполнения целевых задач, росту затрат на разработку и изготовление УРО, увеличению сроков его создания [1],[2] – [5].

Вопросам проектирования и разработки УРО уделено большое внимание в отечественной [1], [10] – [14] и зарубежной научно-технической литературе. В [15] приведен анализ процесса проектирования УРО, обсуждены аэродинамические методы проектирования и технологии крылатых и бескрылых конфигураций, рассмотрены методы и технологии концептуального проектирования прямоточных и турбореактивных ракетных двигателей, проанализированы методы для прогнозирования дальности действия УРО, скорости и времени полёта до цели, а также маневренности и отклонения от оси прицеливания.

Далее под управляемым ракетным объектом понимаются одноступенчатые ракеты различного назначения, предназначенные для доставки головной части в заданную точку пространства с требуемыми значениями кинематических параметров движения. В качестве силовой установки на УРО рассматривается ракетный двигатель на твердом топливе (РДТТ).

Для успешного решения задачи оптимизации проектных параметров и программ управления ракетного объекта важное значение приобретает создание современного методического обеспечения, которое позволяет оперативно с необходимой для проектных исследований точностью определять: оптимальные (рациональные) значения оптимизируемых параметров и основных характеристик, программы управления движением, с учетом особенностей целевого применения УРО.

Комплексная задача совместной оптимизации основных проектных параметров, параметров траектории, программ управления и основных характеристик УРО как задача теории оптимального управления сформулирована в [2] – [4]. Там же приведена математическая модель, позволяющая в зависимости от имеющихся исходных данных (вектор $\bar{x}$), программ управления (вектор $\bar{u}$), оптимизируемых параметров (вектор $\bar{p}$) определять значение целевого функционала – дальность полёта $L = L(\overline{x}, \overline{p}, \overline{u})$ и основные характеристики УРО. В [2] – [5] рассмотрен подход, в котором программы управления движением на всех участках полёта УРО задаются полиномами, что позволило свести задачу теории оптимального управления [8], [9] к более простой задаче нелинейного математического программирования.

Для решения комплексной задачи необходима разработка методов оптимизации, обеспечивающих в автоматическом режиме нахождение такого значения вектора оптимизируемых параметров $\overline{p} = \overline{p}_{opt}$ , при которых целевой функционал принимает оптимальное значение.

Цель статьи – выбор наиболее рациональных методов оптимизации для решения комплексной задачи начального этапа проектирования, связанной с оптимизацией проектных параметров, параметров траектории и основных характеристик управляемых ракетных объектов.

В статье приведен обзор и выбраны методы оптимизации, которые позволяют осуществлять в автоматическом режиме нахождение таких значений оптимизируемых параметров, при которых рассматриваемый целевой функционал (дальность полёта УРО) принимает оптимальное значение.

**Обзор методов оптимизации.** В статье рассмотрены детерминированные методы оптимизации, которые обеспечивают в автоматическом режиме нахождение экстремума целевого функционала, проведена оценка возможности применения этих методов для выбора проектных параметров, параметров траекторий УРО различного назначения. Поскольку задача теории оптимального управления сведена к задаче нелинейного математического программирования, в дальнейшем при анализе выбранных методов оптимизации многопараметрических функций будет использоваться термин целевая функция.

Большинство численных методов оптимизации относятся к классу итерационных, то есть порождающих последовательность векторов оптимизируемых параметров в соответствии с предписанным набором правил, включающих критерий окончания поиска экстремума целевой функции. При заданном начальном векторе оптимизируемых параметров $\overline{X}_0$ методы генерируют последовательность векторов $\overline{X}_0, \overline{X}_1, \overline{X}_2, \ldots$. Преобразование вектора оптимизируемых параметров $\overline{X}_j$ в $\overline{X}_{j+1}$ представляет собой итерацию, где $j = \overline{0, M}$ , $M$ – предельное число итераций расчёта в процессе оптимизации.

При анализе методов оптимизации рассматривается задача поиска локального максимума многоэкстремальной функции

$$f\left(\overline{X}_{opt}\right) = \max_{\overline{X} \in R^n} f\left(\overline{X}\right). \tag{1}$$

Численное решение задачи (1), как правило, связано с построением последовательности векторов оптимизируемых параметров $\left\{\overline{X}_j\right\}$, $j = \overline{0, M}$ , обладающих в случае поиска максимума целевой функции следующим свойством

$$f\left(\overline{X}_{j+1}\right) > f\left(\overline{X}_j\right), \quad j = \overline{0, M} . \tag{2}$$

Общее правило построения последовательности векторов оптимизируемых параметров $\left\{\overline{X}_j\right\}$ имеет вид

$$\overline{X}_{j+1} = \overline{X}_j + \overline{t}_j \cdot \overline{d}^j, \quad j = \overline{0,M},$$

где $\overline{X}_0$ – начальный вектор оптимизируемых параметров; $\overline{t}_j$ – множество величин шагов по всем оптимизируемым параметрам, которые необходимы для преобразования вектора $\overline{X}_j$ в вектор $\overline{X}_{j+1}$ при обеспечении выполнения условия (2); $\overline{d}^j$ – множество направлений поиска по всем оптимизируемым параметрам, которые меняются поочередно по всем оптимизируемым параметрам.

Начальный вектор $\overline{X}_0$ задается исходя из заданных диапазонов изменения оптимизируемых параметров и наличия априорной информации о положении точек экстремума целевой функции. Все величины шагов множества $\overline{t}_j$ – больше нуля и выбираются либо из условия (2), либо из условия максимума целевой функции вдоль заданного направления поиска

$$f\left(\overline{X}_j + \overline{t}_j \cdot \overline{d}^j\right) \to \max_{\overline{t}_j}. \tag{3}$$

Выбор шагов $\overline{t}_j$ из условия (3) делает оптимизацию параметров по всем направлениям $\overline{d}^j$ наискорейшей.

Последовательность $\left\{\overline{X}_j\right\}$ называется максимизирующей, если $\lim\limits_{j \to \infty} f\left(\overline{X}_j\right) = f\left(\overline{X}_{opt}\right)$ и последовательность сходится к максимуму целевой функции

$$f\left(\overline{X}_{opt}\right) = \max_{\overline{X} \in R^n} f\left(\overline{X}\right).$$

Алгоритмы методов оптимизации можно разделить на детерминированные и случайные [6], [7].

В зависимости от наивысшего порядка частных производных целевой функции $f\left(\overline{X}\right)$ по каждому оптимизируемому параметру, которые используются для формирования параметров поиска $\overline{d}^j$ и $\overline{t}_j$, $j = \overline{0,M}$, детерминированные методы оптимизации делятся на три группы:

– методы нулевого порядка, использующие только информацию о значениях целевой функции $f\left(\overline{X}\right)$;

– методы первого порядка, использующие информацию о первых частных производных целевой функции $f\left(\overline{X}\right)$ по каждому оптимизируемому параметру;

– методы второго порядка, требующие для своей реализации знания вторых производных целевой функции $f\left(\overline{X}\right)$ по каждому оптимизируемому параметру.

К детерминированным методам поиска экстремума относятся [6], [7]:

– методы нулевого порядка: метод крутого восхождения, наискорейшего спуска, метод конфигураций (Хука–Дживса), метод деформируемого многогранника (Нелдера–Мида), метод Розенброка, метод сопряженных направлений;

– градиентные методы первого порядка: метод градиентного спуска, метод покоординатного спуска, метод Гаусса–Зейделя, метод Флетчера–Ривса, метод Дэвидона–Флетчера–Пауэлла;

– градиентные методы второго порядка: метод Ньютона, метод Ньютона-Рафсона, метод Марквардта и др.

В случайных стратегиях поиска экстремума целевой функции, направления приращений оптимизируемых параметров задаются случайным образом, причем все направления равновероятны, а движение к экстремуму осуществляется в том случае, когда результат приводит к улучшению целевой функции. К этим методам относятся: случайный перебор всех возможных значений, алгоритм с эмуляцией отжига, локальный лучевой поиск, генетический алгоритм, адаптивный метод случайного поиска, метод случайного поиска с возвратом при неудачном шаге, метод наилучшей пробы и др. [6], [7].

В [5] при решении комплексной задачи выполнен сравнительный анализ метода случайного поиска с градиентным методом первого порядка. Была показана целесообразность применения на первом этапе генетического алгоритма случайного поиска, с помощью которого проводилось быстрое и полное исследование всего пространства поиска оптимального решения и находилось решение, наиболее приближенное к глобальному оптимуму целевого функционала. На последующем этапе для нахождения глобального оптимума целевой функции использовался градиентный метод покоординатного спуска в окрестности найденного на первом этапе решения.

**Выбор детерминированных методов оптимизации и их сравнительный анализ.** Анализ существующих методов оптимизации позволил выделить группу методов, которые, с нашей точки зрения, наиболее целесообразно на начальном этапе проектирования использовать при решении в автоматическом режиме комплексной задачи совместной оптимизации. В эту группу вошли: метод деформируемого многогранника нулевого порядка (Нелдера–Мида) [7], метод конфигураций нулевого порядка (метод Хука–Дживса) [7] и градиентный метод первого и второго порядков покоординатного спуска с поочередным изменением оптимизируемых параметров [7].

Следует отметить, что решение комплексной задачи с помощью градиентного метода покоординатного спуска при каждой итерации требует вычисления градиента функции методом численного дифференцирования, что значительно увеличивает количество и, как следствие, время поиска оптимального решения. При этом при малых шагах изменения каждого проектного параметра градиентный метод не всегда способен найти глобальный максимум целевой функции, поскольку может зайти в тупик, достигнув локального оптимума. При слишком больших шагах изменения каждого проектного параметра можно проскочить глобальный оптимум [5].

Использование детерминированного метода деформируемого многогранника нулевого порядка (метода Нелдера–Мида) для оптимизации параметров не требует вычисления частных производных целевой функции по каждому параметру, что значительно уменьшает количество расчетов целевой функции и, как следствие, уменьшает время поиска оптимального решения.

В основу метода деформируемого многогранника положено построение последовательности систем-многогранников из $(n+1)$ векторов оптимизируемых параметров $\overline{X}_i^j \{x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{in}\}$ $j$ -го цикла алгоритма оптимизации, где $i = \overline{1,(n+1)}$, $j = \overline{1,M}$ , $n$ – количество оптимизируемых параметров, $M$ – предельное число циклов расчёта алгоритма. Векторы оптимизируемых параметров являются вершинами выпуклого многогранника. При этом векторы системы $\overline{X}_i^{j+1}$, $i = \overline{1,(n+1)}$ на $(j+1)$-ой итерации оптимизации совпадают с векторами системы $\overline{X}_i^j$ , $i = \overline{1,(n+1)}$ $j$ -ой итерации оптимизации, кроме $i = H$ , где вектор $\overline{X}_H^j$ – наихудший в системе $\overline{X}_i^j$ , $i = \overline{1,(n+1)}$, то есть

$$f\left(\overline{X}_H^j\right) = \min_{1 \le i \le (n+1)} f\left(\overline{X}_i^j\right), \quad j = \overline{0,M} .$$

Вектор $\overline{X}_H^j$ заменяется на другой по специальным правилам алгоритма этого метода. В результате многогранник деформируется в зависимости от структуры линий уровня целевой функции, вытягиваясь вдоль длинных наклонных плоскостей, изменяя направление в изогнутых возвышениях и сжимаясь в окрестности максимума. Построение последовательности многогранников заканчивается, когда значения целевой функции в вершинах текущего многогранника отличаются от значения целевой функции в центре тяжести системы $\overline{X}_i^j$ , $i = \overline{1,(n+1)}$; $i \ne H$ не более чем на заданное малое положительное число $0 < \varepsilon < 1$ .

Использование детерминированного метода конфигураций нулевого порядка (метода Хука–Дживса) [5] для оптимизации параметров УРО также не требует вычисления частной производной целевой функции по каждому параметру, что значительно уменьшает количество расчетов целевой функции и, как следствие, уменьшает время поиска оптимального решения. Поэтому можно задавать небольшие шаги изменения каждого параметра при исследующем поиске и при этом не слишком малую величину ускоряющего множителя для поиска по образцу, что даст возможность за счет увеличения количества этапов поиска не проскочить глобальный оптимум и не зайти в тупик, достигнув локального оптимума.

Детерминированный метод конфигураций нулевого порядка представляет собой комбинацию исследующего поиска, когда поочередно изменяются оптимизируемые параметры УРО в разных направлениях, и ускоряющего поиска по образцу [7].

Исследующий поиск ориентирован на выявление локального поведения целевой функции и определение направления возрастания целевой функции вдоль «оврагов». Полученная информация используется далее для поиска по образцу при движении вдоль «оврагов».

Исследующий поиск начинается с заданного начального вектора оптимизируемых параметров, называемого старым базисом. В качестве множества направлений поиска выбирается множество оптимизируемых параметров вектора УРО. Задаются величины шагов, которые различны для каждого оптимизируемого параметра вектора УРО и являются переменными в процессе поиска.

В процессе исследующего поиска по направлению одного из оптимизируемых параметров меняется только выбранный оптимизируемый параметр, а остальные параметры остаются зафиксированными.

Поочередно выбирается один из оптимизируемых параметров, и делается шаг в сторону его увеличения. Если значение целевой функции в полученной пробной точке больше значения целевой функции в исходной точке, то шаг считается удачным. Затем необходимо вернуть изменяемый параметр в предыдущую точку и сделать шаг в противоположном направлении с последующей проверкой поведения целевой функции. Если значение целевой функции в одной из полученных пробных точек больше, чем значение целевой функции в исходной точке данного оптимизируемого параметра, то шаг по данному оптимизируемому параметру считается удачным. После поочередного перебора всех оптимизируемых параметров исследующий поиск завершается. Полученный вектор оптимизируемых параметров УРО называется новым базисом.

После исследующего поиска осуществляется поиск по образцу, который заключается в движении по направлению от старого к новому базису вектора оптимизируемых параметров. Для этого задается величина ускоряющего множителя $\lambda > 0$.

Успех поиска нового вектора оптимизируемых параметров по образцу определяется с помощью проведения исследующего поиска из полученного нового вектора параметров. Если при этом значение целевой функции в найденной с помощью исследующего поиска наилучшей точке нового значения вектора оптимизируемых параметров больше, чем значение целевой функции в точке предыдущего (старого) базиса вектора оптимизируемых параметров, то поиск по образцу удачен.

Если поиск по образцу неудачен, происходит возврат вектора оптимизируемых параметров в старый базис, где продолжается исследующий поиск с уменьшенными шагами по каждому оптимизируемому параметру. Если исследующий поиск неудачен, то значения шагов изменения параметров уменьшаются и процедура поиска продолжается. Поиск оптимального решения заканчивается, когда все текущие величины шагов по каждому оптимизируемому параметру станут меньше некоторой малой заданной величины $0 < \varepsilon < 1$.

Таким образом, детерминированный метод конфигураций нулевого порядка, являясь менее точным, требует меньшего количества расчетов целевой функции и, как следствие, меньшего времени оптимизации по сравнению с градиентным методом покоординатного спуска, который вычисляет частные производные первого или второго порядков целевой функции по каждому оптимизируемому параметру.

Алгоритм градиентного метода покоординатного спуска первого и второго порядков рассмотрен в [5].

Далее рассматриваются алгоритмы метода конфигураций (Хука–Дживса) и метода деформируемого многогранника (Нелдера–Мида); при этом оптимальные значения параметров выбираются из условия достижения максимальной дальности полёта УРО и проводится сравнение методов по полученному максимуму целевой функции.

**Алгоритм метода конфигураций нулевого порядка (Хука–Дживса).** Шаг 1. Задаются: $n$ – количество оптимизируемых параметров, диапазоны их изменения и алгоритм расчёта целевой функции $f(\overline{X})$, где $\overline{X}$ – вектор оптимизируемых параметров.

Формируется начальный вектор оптимизируемых параметров $\overline{X}_{basis}$, который включает в себя минимальные или максимальные граничные значения из диапазонов изменения оптимизируемых параметров.

Задаются следующие константы:

$\varepsilon$ – малое положительное число $0 < \varepsilon < 1$ для остановки цикла оптимизации;

$M$ – предельное число циклов расчёта оптимизации $M \geq 1$;

$\mathrm{num\_calc}$ – делитель шагов по всем оптимизируемым параметрам $\mathrm{num\_calc} > 0$;

$\lambda$ – ускоряющий множитель поиска по образцу $\lambda > 0$;

$\alpha$ – коэффициент уменьшения шагов по всем оптимизируемым параметрам при исследующем поиске $\alpha > 1$.

Шаг 2. Определяются начальные величины шагов по каждому оптимизируемому параметру вектора УРО:

$$\Delta_i = \frac{(x_i^{\max} - x_i^{\min})}{num\_calc},$$

где $x_i^{\min}, x_i^{\max}$ – минимальный и максимальный диапазоны изменения $i$-го оптимизируемого параметра вектора УРО, $i = \overline{1,n}$.

Шаг 3. Задаётся параметр цикла $j = \overline{1,M}$.

Шаг 4. Проверяется условие $j \leq M$:

а) если $j > M$, то $\overline{X}_{opt} = \overline{X}^j$, расчёт окончен;

б) если $j \leq M$, то осуществляется переход к шагу 5;

в) если $j = 1$, то присваиваются $\overline{X}^j_{basis} = \overline{X}_{basis}$, $\overline{X}^j = \overline{X}_{basis}$ и осуществляется переход к шагу 5.

Шаг 5. Задаётся $i = \overline{1,n}$.

Шаг 6. Осуществляется исследующий поиск по выбранному $i$-му оптимизируемому параметру:

а) если $f\left(x_1^j,\ldots,(x_i^j + \Delta_i),\ldots,x_n^j\right) > f\left(x_1^j,\ldots,x_i^j,\ldots,x_n^j\right)$, то шаг по $i$-му оптимизируемому параметру считается удачным, и в этом случае задаётся $x_i^{j+1} = x_i^j + \Delta_i$ и осуществляется переход к пункту б).

б) делается шаг в противоположном направлении, если $f\left(x_1^j,\ldots,(x_i^j - \Delta_i),\ldots,x_n^j\right) > f\left(x_1^j,\ldots,x_i^{j+1},\ldots,x_n^j\right)$, то шаг по $i$-му оптимизируемому параметру считается удачным, и в этом случае задаётся $x_i^{j+1} = x_i^j - \Delta_i$ и осуществляется переход к шагу 7.

в) если в пунктах а), б) шаги по $i$-му оптимизируемому параметру неудачны, то задаётся $x_i^{j+1} = x_i^j$ и осуществляется переход к шагу 7.

Шаг 7. Проверяются условия:

а) если $i < n$, то происходит переход к следующему оптимизируемому параметру, для этого задаётся $i = i + 1$ и осуществляется переход к шагу 5 (т. е. продолжается исследующий поиск по оставшимся оптимизируемым параметром).

б) если $i = n$, то проверяется успешность проведенного исследующего поиска по всем оптимизируемым параметрам:

1) если $f\left(\overline{X}^{j+1}\right) > f\left(\overline{X}^{j}_{basis}\right)$, то задаётся $\overline{X}^{j+1}_{basis} = \overline{X}^{j+1}$ и осуществляется переход к шагу 8;

2) если $f\left(\overline{X}^{j+1}\right) \le f\left(\overline{X}^{j}_{basis}\right)$, то задаётся $\overline{X}^{j+1}_{basis} = \overline{X}^{j}_{basis}$ и осуществляется переход к шагу 9;

Шаг 8. Проводится поиск по образцу:

$$\overline{X}^{j+1} = \overline{X}^{j+1}_{basis} + \lambda \cdot \left(\overline{X}^{j+1}_{basis} - \overline{X}^{j}_{basis}\right).$$

Далее задаются $j = j + 1$, $i = 1$ и осуществляется переход к шагу 3.

Шаг 9. Проверяется условие окончания процесса оптимизации:

а) если все $\Delta_i \le \varepsilon$, где $i = \overline{1,n}$, то поиск оптимального вектора параметров УРО закончен $\overline{X}_{opt} = \overline{X}^{j+1}_{basis}$;

б) для тех $i$-ых оптимизируемых параметров, для которых $\Delta_i > \varepsilon$ уменьшаются, величины их шагов $\Delta_i = \dfrac{\Delta_i}{\alpha}$. Присваиваются $\overline{X}^{j+1} = \overline{X}^{j+1}_{basis}$, $j = j + 1$, $i = 1$ и осуществляется переход к шагу 3.

**Алгоритм метода деформируемого многогранника Нелдера–Мида.**

Шаг 1. Задаются: $n$ – количество оптимизируемых параметров, диапазоны их изменения и алгоритм расчёта целевой функции $f(\overline{X})$, где $\overline{X}$ – вектор оптимизируемых параметров.

Задаются следующие константы:

$\varepsilon$ – малое положительное число $0 < \varepsilon < 1$ для остановки цикла оптимизации;

$M$ – предельное число циклов расчёта оптимизации $M \ge 1$;

$\alpha$ – коэффициент отражения, который рекомендуют использовать Нелдер, Мид и Павиани $\alpha = 1$, однако Паркинсон и Хитчинсон $\alpha = 2$;

$\beta$ – коэффициент сжатия, который рекомендуют использовать Нелдер и Мид $\beta = 0{,}5$, Павиани – $0{,}4 \le \beta \le 0{,}6$, Паркинсон и Хитчинсон – $\beta = 0{,}25$;

$\gamma$ – коэффициент растяжения, который рекомендуют использовать Нелдер и Мид $\gamma = 2$, Павиани $2{,}8 \le \gamma \le 3$, Паркинсон и Хитчинсон $\gamma = 2{,}5$;

Шаг 2. Определяются начальные координаты вершин многогранника, которые задаются как $(n+1)$ векторов $n$ –оптимизируемых параметров в массиве $mas\_top$:

$$mas\_top = \begin{pmatrix} \overline{X}^{1}_{1} \\ \overline{X}^{1}_{2} \\ \ldots \\ \overline{X}^{1}_{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}\} \\ \{x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n}\} \\ \ldots \\ \{x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in}\} \end{pmatrix},$$

где $i=\overline{1,(n+1)}$ – количество вершин многогранника, которые задаются как векторы оптимизируемых параметров.

Шаг 3. Рассчитывается целевая функция для каждого вектора параметров (вершин многогранника) $\overline{X}_i^1$, где $i=\overline{1,(n+1)}$ и сохраняется в массиве $mas\_t\arg et$:

$$mas\_top=\begin{pmatrix}\overline{X}_1^1\\ \overline{X}_2^1\\ \dots\\ \overline{X}_i^1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\{x_{11},x_{12},\dots,x_{1n}\}\\ \{x_{21},x_{22},\dots,x_{2n}\}\\ \dots\\ \{x_{i1},x_{i2},\dots,x_{in}\}\end{pmatrix}\Leftrightarrow mas\_t\arg et=\begin{pmatrix}f_1^1\\ f_2^1\\ \dots\\ f_i^1\end{pmatrix}.$$

Шаг 4. Задаётся параметр цикла $j=\overline{1,M}$.

Шаг 5. Проверяется условие $j\le M$:

а) если $j>M$, то $\overline{X}_{opt}=\overline{X}_L^j$, где $\overline{X}_L^j$ – наилучший вектор оптимизируемых параметров в соответствии с максимизацией целевой функции:

$$f\left(\overline{X}_L^j\right)=\max_{i=1,\dots,(n+1)} f\left(\overline{X}_i^j\right),$$

после этого расчёт окончен;

б) если $j\le M$, то осуществляется переход к шагу 6.

Шаг 6. Среди вершин многогранника (векторов оптимизируемых параметров массива $mas\_top$) в соответствии с максимизацией целевой функции определяются: $\overline{X}_L^j$ – наилучший вектор оптимизируемых параметров $j$-го цикла оптимизации, $\overline{X}_H^j$ – наихудший вектор оптимизируемых параметров $j$-го цикла оптимизации, а также $\overline{X}_S^j$ – вектор оптимизируемых параметров, значение целевой функции которого достигает второе по величине минимальное значение $j$-го цикла оптимизации:

$$f\left(\overline{X}_L^j\right)=\max_{i=1,\dots,(n+1)} f\left(\overline{X}_i^j\right);$$
$$f\left(\overline{X}_H^j\right)=\min_{i=1,\dots,(n+1)} f\left(\overline{X}_i^j\right);$$
$$f\left(\overline{X}_S^j\right)=\min_{\substack{i=1,\dots,(n+1)\\ i\ne H}} f\left(\overline{X}_i^j\right);$$

далее осуществляется переход к шагу 7.

Шаг 7. Находится центр тяжести всех вершин многогранника (векторов оптимизируемых параметров) за исключением наихудшей $\overline{X}_H^j$:

$$\overline{X}_{CG}^j=\frac{1}{n}\cdot\left[\left(\sum_{i=1}^{(n+1)}\overline{X}_i^j\right)-\overline{X}_H^j\right]=\frac{1}{n}\cdot\sum_{\substack{i=1\\ i\ne H}}^{(n+1)}\overline{X}_i^j,$$

далее рассчитывается значение целевой функции вектора центра тяжести $f\left(\overline{X}_{CG}^{j}\right)$ и осуществляется переход к шагу 8.

Шаг 8. Проверяется условие окончания алгоритма оптимизации, и для этой цели рассчитывается величина $\sigma$:

$$\sigma = \left[\frac{1}{(n+1)} \cdot \sum_{i=1}^{(n+1)} \left(f\left(\overline{X}_{i}^{j}\right) - f\left(\overline{X}_{CG}^{j}\right)\right)^{2}\right]^{\frac{1}{2}};$$

а) если $\sigma \le \varepsilon$, то процесс поиска завершается и в качестве приближенного решения берется наилучшая вершина (наилучший вектор оптимизируемых параметров) текущего многогранника $\overline{X}_{opt} = \overline{X}_{L}^{j}$ и тогда расчёт окончен;

б) если $\sigma > \varepsilon$, то продолжается процесс оптимизации и осуществляется переход к шагу 9.

Шаг 9. Выполняется операция отражения наихудшей вершины многогранника $\overline{X}_{H}^{j}$ через центр тяжести многогранника $\overline{X}_{CG}^{j}$:

$$\overline{X}_{mirror}^{j} = \overline{X}_{CG}^{j} + \alpha \cdot \left(\overline{X}_{CG}^{j} - \overline{X}_{H}^{j}\right),$$

затем рассчитывается значение целевой функции $f\left(\overline{X}_{mirror}^{j}\right)$ и осуществляется переход к шагу 10.

Шаг 10. Проверяется выполнение условий:

а) если $f\left(\overline{X}_{mirror}^{j}\right) \ge f\left(\overline{X}_{L}^{j}\right)$, то выполняется операция растяжения:

$$\overline{X}_{extend}^{j} = \overline{X}_{CG}^{j} + \gamma \cdot \left(\overline{X}_{mirror}^{j} - \overline{X}_{CG}^{j}\right)$$

и определяются основные вершины нового многогранника по условию:

– если $f\left(\overline{X}_{extend}^{j}\right) > f\left(\overline{X}_{L}^{j}\right)$, то наихудшая вершина многогранника $\overline{X}_{H}^{j+1}$ заменяется на $\overline{X}_{extend}^{j}$ и задаются следующие основные вершины нового многогранника: $\overline{X}_{L}^{j+1} = \overline{X}_{L}^{j}$, $\overline{X}_{S}^{j+1} = \overline{X}_{S}^{j}$, $\overline{X}_{H}^{j+1} = \overline{X}_{extend}^{j}$, далее задается $j = j + 1$ и осуществляется переход к шагу 4;

– если $f\left(\overline{X}_{extend}^{j}\right) \le f\left(\overline{X}_{L}^{j}\right)$, то наихудшая вершина многогранника $\overline{X}_{H}^{j+1}$ заменяется на $\overline{X}_{mirror}^{j}$ и задаются следующие основные вершины нового многогранник: $\overline{X}_{L}^{j+1} = \overline{X}_{L}^{j}$, $\overline{X}_{S}^{j+1} = \overline{X}_{S}^{j}$, $\overline{X}_{H}^{j+1} = \overline{X}_{mirror}^{j}$, далее задается $j = j + 1$ и происходит переход к шагу 4;

б) если $f\left(\overline{X}_{S}^{j}\right) > f\left(\overline{X}_{mirror}^{j}\right) \ge f\left(\overline{X}_{H}^{j}\right)$, то выполняется операция сжатия:

$$\overline{X}_{compress}^{j} = \overline{X}_{CG}^{j} + \beta \cdot \left(\overline{X}_{H}^{j} - \overline{X}_{CG}^{j}\right),$$

после чего наихудшая вершина многогранника $\overline{X}_{H}^{j+1}$ заменяется на $\overline{X}_{compress}^{j}$ и задаются следующие основные вершины нового многогранника:

$\overline{X}_L^{j+1}=\overline{X}_L^j$, $\overline{X}_S^{j+1}=\overline{X}_S^j$, $\overline{X}_H^{j+1}=\overline{X}_{compress}^j$, затем задается $j=j+1$ и осуществляется переход к шагу 4;

в) если $f\left(\overline{X}_L^j\right)>f\left(\overline{X}_{mirror}^j\right)\geq f\left(\overline{X}_S^j\right)$, то наихудшая вершина многогранника $\overline{X}_H^{j+1}$ заменяется на $\overline{X}_{mirror}^j$ и задаются следующие основные вершины нового многогранника: $\overline{X}_L^{j+1}=\overline{X}_L^j$, $\overline{X}_S^{j+1}=\overline{X}_S^j$, $\overline{X}_H^{j+1}=\overline{X}_{mirror}^j$, далее задается $j=j+1$ и происходит переход к шагу 4;

г) если $f\left(\overline{X}_{mirror}^j\right)<f\left(\overline{X}_H^j\right)$, то выполняется операция редукции, то есть формируется новый многогранник с уменьшенными вдвое сторонами и вершиной $\overline{X}_L^{j+1}=\overline{X}_L^j$, $i=\overline{1,(n+1)}$:

$$\overline{X}_i^{j+1}=\overline{X}_L^j+0{,}5\cdot\left(\overline{X}_i^j-\overline{X}_L^j\right),$$

далее задается $j=j+1$ и происходит переход к шагу 4.

**Иллюстративный пример.** С использованием рассмотренных методов проведена оптимизация вектора $\overline{p}$, компоненты которого включали основные проектные параметры УРО и параметры траектории. В качестве УРО рассматривался одноступенчатый управляемый ракетный объект со стартовой массой $m_0=800$ кг и массой головной части (ГЧ) $m_{гч}$ =220 кг. Оптимизируемые параметры (вектор $\overline{p}$) выбирались из условия максимума целевой функции дальности полёта $L=L(\overline{p})$ – расстояния, на которое доставляется головная часть УРО с требуемыми значениями кинематических параметров движения в конце полёта.

В качестве силовой установки на УРО использовался РДТТ со следующими характеристиками условного твёрдого ракетного топлива (ТРТ): плотность ТРТ $\rho=1730$ $кг/м^3$, температура горения ТРТ $T_g=3700$ К, показатель изоэнтропы продуктов сгорания ТРТ $k$ =1,18, газовая постоянная продуктов сгорания $R_g$ =290 Дж/(кг·К).

В расчётах принята показательная зависимость скорости горения ТРТ от давления, которая определяется соотношением [12], [13]:

$$u=u_1\cdot(p_k)^{\nu},$$

где $p_k$ – давление в камере сгорания маршевого РДТТ; $u_1$=0,002 м/с, $\nu$=0,25 – параметры, определяющие зависимость скорости горения ТРТ от давления в камере сгорания РДТТ;

При оптимизации параметров УРО и параметров траектории были приняты следующие начальные условия, при которых осуществлялся старт УРО: широта точки старта $\varphi_{ст}=40{,}0$ град., азимут пуска $\phi=40$ град., высота точки старта $H_{ст}=10$ м.

Аэродинамическая схема УРО сформирована из головной части, представляющей собой сочетание оживальной и цилиндрической форм, цилиндрической части, включающей переходный и хвостовой отсеки и корпус камеры сгорания маршевого РДТТ. На хвостовом отсеке расположены аэродинамические рули, обеспечивающие управление ракетным объектом в полёте. Полная длина ГЧ принята равной $L_{гч}$ =1,7 м, длина оживальной части ГЧ $L_{ож}$ =0,5 м, длина цилиндрической части ГЧ $L_{ц}$ =1,2 м. Камера сгорания РДТТ, переходный и хвостовой отсеки УРО выполнены из стали. Диаметр цилиндрической части корпуса УРО принят равным $D_{UO}$ =0,35 м.

В качестве оптимизируемых проектных параметров УРО рассматривались следующие параметры: коэффициент начальной тяговооружённости УРО в пустоте $\nu_p$, среднее значение давления в камере сгорания маршевого РДТТ $p_k$, диаметр среза сопла маршевого РДТТ $D_a$.

Полный запас топлива маршевого РДТТ $m_m^{\Sigma}$ и проектный параметр УРО – относительная конечная масса $\mu_k$ – вычислялись для заданных стартовой массы УРО $m_0$ и массы ГЧ $m_{гч}$ в зависимости от значений основных проектных параметров УРО $\nu_p$, $p_k$ и $D_a$.

Коэффициент начальной тяговооружённости УРО в пустоте $\nu_p$ и относительная конечная масса $\mu_k$ определялись известными соотношениями [10], [11]:

$$\nu_p = \frac{m_0 \cdot g_0}{P_n}; \qquad \mu_k = \frac{m_k}{m_0} = \frac{m_0 - m_m^{\Sigma}}{m_0},$$

где $g_0$ – ускорение свободного падения у поверхности Земли; $P_n$ – тяга маршевого РДТТ в пустоте на основном режиме работы, $m_k$ – конечная масса УРО.

В качестве оптимизируемых параметров траектории рассматривались следующие параметры: угол наклона УРО в момент старта $\varphi_{cm}$, угол тангажа в конце активного участка траектории $\varphi_{AUT}$, величина постоянного угла атаки на одном из пассивных участков траектории $\alpha_{const}$, продолжительность $t_{\varphi_c}$ разворота УРО на заданный угол тангажа $\varphi_c$ при подлёте к цели.

При оптимизации использовались: математическая модель УРО, основные элементы которой были построены на физических соотношениях; данные о прототипах, а также статистические зависимости для определения габаритных и массовых характеристик отдельных элементов и подсистем УРО, слабо влияющих на целевой функционал [2] – [4], [10] – [14].

Результаты оптимизации проектных параметров УРО и параметров траектории, полученные с использованием рассмотренных выше методов, приведены в табл. 1. Количество расчётов целевой функции при использовании каждого метода принято равным 160 – 200.

Как показали результаты расчётов, за одинаковое время работы алгоритмов оптимизации в автоматическом режиме максимальное значение дальности полета $L$ = 146,432 км получено методом конфигураций нулевого порядка (метода Хука–Дживса) без вычисления частных производных целевой функции по каждому оптимизируемому параметру. Градиентный метод покоординатного спуска первого и второго порядков и метод деформируемого многогранника нулевого порядка (метод Нелдера–Мида) требуют сравнительно большего количества итераций для нахождения вектора оптимизируемых параметров УРО, который соответствует глобальному максимуму целевой функции.

Таблица 1

Результаты оптимизации вектора проектных параметров $\bar{p}_{opt}$ с помощью детерминированных методов оптимизации

| Параметры | Диапазоны изменения | Методы оптимизации | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | Метод Хука–Дживса | Метод Нелдера–Мида | Градиентные методы | |
| | | | | первого порядка | второго порядка |
| $\nu_p$ | [0,07 – 0,12] | 0,12 | 0,1006 | 0,1187 | 0,11987 |
| $p_k$, кгс/см$^2$ | [60 – 100] | 71,25 | 84,48177 | 83,57603 | 77,67069 |
| $D_a$, м | [0,3 – 0,34] | 0,3025 | 0,32449 | 0,30044 | 0,3 |
| $\varphi_{cm}$, град. | [60 – 70] | 70,0 | 66,12044 | 67,93749 | 65,84617 |
| $\varphi_{AUT}$ ,град. | [49 – 55] | 49,0 | 52,67226 | 49,58661 | 49,76465 |
| $\alpha_{const}$ ,град. | [8 – 14] | 10,25 | 11,67224 | 9,63376 | 9,54506 |
| $t_{\varphi_c}$, с | [35 – 55] | 42,0 | 46,0 | 37,0 | 37,0 |
| $L(\vec{p}_{opt})$, км | | 146,432 | 137,184 | 143,951 | 144,419 |

**Выводы.** Результаты проведенных исследований показали, что для оперативного решения рассматриваемой комплексной задачи оптимизации целесообразно использовать метод конфигураций Хука–Дживса, который определяет оптимальное значение вектора оптимизируемых параметров за сравнительно небольшое время оптимизации.

Дальность полета $L$, как показали расчёты, существенно зависит от значений оптимизируемых параметров. В связи с этим оптимизация этих (и, возможно, других) параметров при решении конкретных целевых задач представляется необходимым этапом процесса проектирования УРО.

Приведенные алгоритмы оптимизации могут быть без существенных доработок использованы проектными организациями на начальном этапе проектирования объектов ракетно-космической техники различного назначения.

1. *Дегтярёв А. В.* Ракетная техника проблемы и перспективы. Избранные научно-технические публикации. Днепропетровск: АРТ-ПРЕСС, 2014. 420 с.
2. *Аксененко А. В., Баранов Е. Ю., Гурский А. И., Клочков А. С., Морозов А. С., Алпатов А. П., Сенькин В. С., Сюткина-Доронина С. В.* Методическое обеспечение для оптимизации на начальном этапе проектирования проектных параметров, параметров траектории и программ управления движением ракетного объекта. Космическая техника. Ракетное вооружение. 2018. № 2 (116). С. 101–116.
3. *Сенькин В. С., Сюткина-Доронина С. В.* Исследование чувствительности целевого функционала к вариациям проектных параметров управляемого ракетного объекта. Авиационно-космическая техника и технология. 2016. № 3. С. 9–17.
4. *Сенькин В. С.* К выбору программ управления движением ракетного объекта по баллистической траектории. Техническая механика. 2018. № 1. С. 48–59.
5. *Сенькин В. С., Сюткина-Доронина С. В.* Совместное применение методов случайного поиска с градиентными методами оптимизации проектных параметров и программ управления ракетным объектом. Техническая механика. 2018. № 2. С. 44–59.
6. *Рассел Стюарт, Норвиг Питер* Искусственный интеллект: современный подход. 2-е изд.: Пер. с англ. М.: Издательский дом «Вильямс», 2007. 1408 с.
7. *Пантелеев А. В., Летова Т. А.* Методы оптимизации в примерах и задачах. 2-е изд., исправл. М.: Высш. шк., 2005. 544 с.

8. *Тарасов Е. В.* Алгоритм оптимального проектирования летательного аппарата. М.: Машиностроение, 1970. 364 с.
9. *Кротов В. Ф., Гурман В. И.* Методы и задачи оптимального управления. М.: Наука, 1973. 446 с.
10. *Разумев В. Ф., Ковалев Б. К.* Основы проектирования баллистических ракет на твердом топливе. М.: Машиностроение, 1976. 356 с.
11. *Синюков А. М., Волков Л. И., Львов А. И., Шишкевич А. М.* Баллистическая ракета на твердом топливе. М.: Воениздат, 1972. 511 с.
12. *Ерохин Б. Т.* Теоретические основы проектирования РДТТ. М.: Машиностроение, 1982. 206 с.
13. *Абугов Д. И., Бобылев В. М.* Теория и расчет ракетных двигателей твердого топлива. М.: Машиностроение, 1987. 272 с.
14. *Шишков А. А.* Газодинамика пороховых ракетных двигателей. М.: Машиностроение, 1974. 156 с.
15. *Fleeman Eugene L.* Tactical missile design. Second Edition. Lilburn, Georgia: AIAA Education series, 2006. 469 p.

Получено 15.02.2019,
в окончательном варианте 04.03.2019