УДК 629.76/.78:519.25 https://doi.org/10.15407/itm2019.03.030

Л. В. КРИВОБОКОВ, Д. В. ДУНАЕВ, А. В. ДЕМЧЕНКО

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКОГО КРИТЕРИЯ ПОДОБИЯ УСЛОВИЙ ОТРАБОТКИ ТВЕРДОТОПЛИВНОГО ДВИГАТЕЛЯ

Государственное предприятие «Конструкторское бюро «Южное», ул. Криворожская 3, 49008, Днепр, Украина, e-mail: dimor9diit@gmail.com

У статті розглянуто приклад розрахунку критерію статистичної подібності умов відпрацювання твердопаливного двигуна за п'ятьма параметрами. За вихідними даними, які отримані в натурних умовах (льотні випробування) і при наземному експериментальному відпрацюванні (вогневі стендові випробування), наведено розрахунки: коваріаційних і кореляційних матриць, власних чисел цих матриць, статистичного критерію подібності умов відпрацювання твердопаливного двигуна. При отриманні вихідних даних класичний підхід вимагає виключення рядків і стовпців, які містять пропущені значення, що неприйнятно в умовах малих вибірок і вагомої вартості вимірювань, тому пропонується заміна пропущених значень параметра його середнім арифметичним значенням. Оскільки розглянутий в статті метод головних компонент найбільш ефективний, коли всі компоненти вимірюються в одних одиницях, то пропонується застосувати нормування вихідної статистики. В результаті нормування всі вихідні дані перетворюються в безрозмірні величини, але при великих розбіжностях у величинах параметрів можливе застосування ітераційних процедур (наприклад, методу Якобі). Після отримання коваріаційних і кореляційних матриць для натурних умов і наземного експериментального відпрацювання (НЕВ) обчислюються їх власні числа. Далі при побудові варіаційного ряду власних чисел обох матриць для натурних умов і НЕВ рекомендується використовувати критерій максимального значення власного числа з розглянутого ряду. Такий підхід дещо знижує вірогідність розрахунків, але цілком може бути застосовний для практичних розрахунків статистичного критерію подібності за вихідними даними твердопаливного двигуна. Результат розрахунків статистичного критерію подібності зіставляється з наведеним значенням функції бажаності Харінгтона, яке підтверджує його придатність.

Ключові слова: *статистичний критерій, еліпсоїд розсіювання, метод головних компонентів, твердопаливний двигун, коваріаційна матриця.*

В статье рассмотрен пример расчета критерия статистического подобия условий отработки твердотопливного двигателя по пяти параметрам. По исходным данным, которые получены в натурных условиях (летные испытания) и при наземной экспериментальной отработке (огневые стендовые испытания), представлены расчеты: ковариационных и корреляционных матриц, собственных чисел этих матриц, статистического критерия подобия условий отработки твердотопливного двигателя. При получении исходных данных классический подход требует исключения строк и столбцов, содержащих пропущенные значения, что неприемлемо в условиях малых выборок и высокой стоимости измерений, поэтому предлагается замена пропущенных значений параметра его средним арифметическим значением. Поскольку рассматриваемый в статье метод главных компонент наиболее эффективен, когда все компоненты измеряются в одних единицах, то предлагается применить нормировку исходной статистики. В результате нормировки все исходные данные преобразуются в безразмерные величины, но при больших размерностях параметров возможно применение итерационных процедур (например, метод Якоби). После получения ковариационных и корреляционных матриц для натурных условий и наземной экспериментальной отработки (НЭО) вычисляются их собственные числа. Далее для построения вариационного ряда собственных чисел обоих матриц для натурных условий и НЭО рекомендуется использовать критерий максимального значения собственного числа из рассматриваемого ряда. Такой подход несколько снижает достоверность расчетов, но вполне применим для практических расчетов статистического критерия подобия по исходным данным твердотопливного двигателя. Результат расчетов статистического критерия подобия сопоставляется с приведенным значением функции желаемости Харингтона, которое подтверждает его применимость.

Ключевые слова: *статистический критерий, эллипсоид рассеяния, метод главных компонент, твердотопливный двигатель, ковариационная матрица*.

This paper considers an example of calculating a statistical similarity criterion for solid-propellant engine five-parameter tryout conditions. The paper presents covariation and correlation matrices, their eigenvalues, and a statistical similarity criterion for solid-propellant engine tryout conditions calculated from the input data obtained in flight tests and ground tryout (firing bench tests). When obtaining input data, the classical approach requires the elimination of rows and columns containing missing values, which is unacceptable in the case of small samples and a high measurement cost. Because of this, it is proposed to replace the missing values of a parameter with its arithmetic mean. Since the principal components method considered in the paper is most efficient when all components are measured in the same units, it is proposed to normalize the input statistics. On normalization, all input data are converted into dimensionless quantities, but for large parameter values iterative procedures are possible (for example, the Jacobi method). After obtaining the covariance and correlation matrices for the flight tests and the ground tryout, their eigenvalues are calculated. Further, in order to construct a variation series of the eigenvalues of both matrices for the flight tests and the ground tryout, it is recommended to use the criterion of the maximum value of the eigenvalue from the series considered. This approach somewhat reduces calculation reliability, but it is quite applicable for practical calculations of a statistical similarity criterion from solid-propellant engine input data. The calculated statistical similarity criterion is compared with the value of the Harington desirability function, which confirms its applicability.

Keywords: *statistical criterion, dispersion, principal components method, solid-propellant engine, covariation matrix.*

Введение. Статья содержит пример использования критерия статистического подобия условий отработки, который представлен в статье [1], для твердотопливного двигателя. Представленные далее примеры расчетов по исходным данным позволят наглядно проследить весь алгоритм расчета критерия статистического подобия условий отработки, что является существенным для дальнейшего применения данного критерия.

Метод решения задачи. В статьях [1, 2] обоснован критерий статистического подобия условий отработки систем ракет космического назначения в виде

$$P(T_\pi) = \hat{O}\left[\frac{\lambda_{\max}\cos\theta - \lambda'_{\max}}{\sqrt{2\left(\frac{\lambda^2_{\max}}{n_{\text{Í}}}\cos\theta + \frac{(\lambda'_{\max})^2}{n_{\text{Ë}}}\right)}}\right], \qquad (1)$$

где $P(T_\pi)$ – точечное значение вероятности подобия условий отработки сравниваемых этапов $(T_\pi \geq 1)$; T_π – временной параметр сравнения длительности испытаний в различных условиях; $\hat{O}$ – функция Лапласа; $\lambda_{\text{Í}\max}$, $\lambda_{\text{Ë}\max}$ – максимальное значение собственного числа ковариационных матриц, полученных по результатам испытаний в наземных и натурных(летных) условиях соответственно; θ – угол, учитывающий расположение эллипсоидов рассеяния друг относительно друга при проектировании на плоскость; $n_{\text{Í}}$, $n_{\text{Ë}}$ – объем выборки, по которой определялись значения $\lambda_{\text{Í}\max}$, $\lambda_{\text{Ë}\max}$ соответственно; $\cos\theta = \cos\left(\arccos\frac{\lambda_{k\max}}{k-\lambda_{k\max}} - \arccos\frac{\lambda'_{k\max}}{k-\lambda'_{k\max}}\right)$; k – количество параметров системы ракеты космического назначения, входящих в исходную матрицу.

Для расчета количественного значения статистического критерия подобия воспользуемся результатами испытаний твердотопливного двигателя на этапах огневых стендовых (таблица 1) и летных (таблица 2) испытаний. В таблицах 1 и 2 приняты следующие обозначения:

X1 – время появления задержки тяги, с;

X2 – время выхода двигателя на установившийся режим, с;

X3 – время работы двигателя на участке спада давления, с;

X4 – максимальное давление в камере сгорания двигателя, кгс/см^2;

X5 – среднеинтегральная величина секундного расхода продуктов сгорания на установившемся режиме, кгс/с;

X6 – среднеинтегральная величина импульса тяги в пустоте, кгс·с/кгс.

Таблица 1

Параметр	Номер испытания													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
X1, c	0,207	0,166	0,167	0,215	0,182	0,159	0,207	0,157	0,19	0,188	0,141	0,167	0,207	0,157
X2, c	0,25	0,23	0,23	0,27	0,23	0,2	0,25	0,21	0,23	0,22	0,17	0,2	0,23	0,18
X3, c	52,6	55,3	48,2	50,2	51,9	48,6	53,6	48,3	49,1	52,6	53,1	52,2	50,9	–
X4, кгс/см^2	14,6	14,3	13,0	13,7	13,3	13,4	13,9	13,7	13,5	14,4	14,1	13,6	13,4	–
X5, кгс/с	857,5	812,8	947,2	907,6	881,2	942,8	851,7	941,3	943,8	878,1	898,3	880	903,9	–
X6, кгс·с/кгс	273,5	269,1	270,3	271	270,6	270,2	272,9	271,8	270,3	273,7	271,7	269,4	270,5	–

Таблица 2

Параметр	Номер испытания												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
X1, c	0,21	0,11	0,18	0,16	0,16	0,17	0,2	0,11	0,2	0,19	0,21	0,13	0,15
X2, c	0,23	0,2	0,21	0,21	0,21	0,2	0,25	0,16	0,25	0,24	0,23	0,16	0,2
X3, c	50,2	50,5	49,88	52,32	51,97	51,38	50,5	53,8	48,23	50,4	48,77	51,08	53,17
X4, кгс/см^2	13,58	13,5	12,6	13,34	13,98	13,5	13,57	14,05	12,54	13,17	12,67	13,19	4
X5, кгс/с	911,5	906,8	920,1	872,5	884,1	894,1	906	865,9	948,4	906,2	937,7	896,4	855,4
X6, кгс·с/кгс	272,5	–	272,4	–	273,6	273,4	273,1	–	272,6	272,4	272	272,5	270,9

В таблице 2 для параметра X6 наблюдаются пропуски значений в результатах испытаний 2, 4, 8, что при классическом подходе требует исключения столбцов этих испытаний из таблицы. Однако каждое летное испытание твердотопливного двигателя требует значительных затрат и исключение данных ухудшает статистику, поэтому, следуя рекомендациям [3], пропущенные значения заменим их средним арифметическим значением, которое оценивается по имеющимся измерениям X6. В нашем случае вместо пропусков записываем 272,54. После исключения пропусков проводим расчеты по определению статистического критерия подобия результатов стендовых и летных испытаний в соответствии с [2] на основе метода главных компонент [4], ковариационного и корреляционного анализов [4]. Для этого перейдем к безразмерным величинам путем нормировки исходных данных

$$\tilde{o}_{ij}^{\acute{\imath}} = \frac{\tilde{o}_{ij}}{\sigma_i}, \tag{2}$$

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{S}\left(x_{ij} - \bar{x}_i\right)^2}{S-1}}, \tag{3}$$

$$\bar{\tilde{o}}_i = \frac{\sum_{j=1}^{S}\tilde{o}_{ij}}{S}, \tag{4}$$

где $i = 1, N$ – количество параметров (в нашем случае $N = 6$); $j = 1, S$ – количество испытаний (в нашем случае для огневых испытаний $S = 14$, летных испытаний $S = 13$); x_{ij} – значение *i*-го параметра в *j*-ом испытании по данным таблицы 1 (таблицы 2); $\bar{x}_i$ – среднее значение *i*-го параметра; σ_i – среднеквадратическое отклонение *i*-го параметра; $\tilde{o}_{ij}^{\acute{\imath}}$ – пронормированный параметр.

В результате применения формул (2) – (4) для данных таблиц 1 и 2 получаем таблицы 3 и 4 соответственно.

Вычисляем выборочную ковариационную матрицу A и A' (для этапов наземных и натурных испытаний соответственно) по данным таблиц 3 и 4

$$A = \begin{vmatrix} \operatorname{cov}(x_1, x_1) & \dots & \operatorname{cov}(x_1, x_6) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \operatorname{cov}(x_6, x_1) & \dots & \operatorname{cov}(x_6, x_6) \end{vmatrix}, \tag{5}$$

$$A' = \begin{vmatrix} \operatorname{cov}(x_1', x_1') & \dots & \operatorname{cov}(x_1', x_6') \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \operatorname{cov}(x_6', x_1') & \dots & \operatorname{cov}(x_6', x_6') \end{vmatrix}, \tag{6}$$

Таблица 3

Параметр	Номер испытания													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
X1, с	8,84	7,09	7,13	9,18	7,77	6,79	8,84	6,71	8,11	8,03	6,02	7,13	8,84	6,7
X2, с	9,12	8,39	8,39	9,85	8,39	7,29	9,12	7,66	8,39	8,02	6,2	7,29	8,39	6,57
X3, с	24,25	25,49	22,22	23,14	23,92	22,4	24,71	22,26	22,63	24,25	24,48	24,06	23,46	23,64
X4, кгс/см^2	32,09	31,43	28,57	30,11	29,23	29,45	30,55	30,11	29,67	31,65	30,99	29,89	29,45	30,25
X5, кгс/с	21,59	20,46	23,85	22,85	22,18	23,73	21,44	23,7	23,76	22,11	22,61	22,15	22,76	22,55
X6, кгс·с/кгс	192,76	189,66	190,5	190,99	190,71	190,43	192,33	191,56	190,5	192,9	191,45	189,87	190,64	191,1

Таблица 4

Параметр	Номер испытания												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
X1, с	5,97	3,13	5,12	4,55	4,55	4,84	5,69	3,13	5,69	5,4	5,97	3,7	4,27
X2, с	7,9	6,87	7,21	7,21	7,21	6,87	8,59	5,5	8,59	8,24	7,9	5,5	6,87
X3, с	31,37	31,56	31,17	32,69	32,47	32,1	31,56	33,62	30,14	31,49	30,47	31,92	33,22
X4, кгс/см^2	5,17	5,14	4,8	5,081	5,32	5,14	5,17	5,35	4,78	5,02	4,83	5,02	1,52
X5, кгс/с	34	33,82	34,31	32,54	32,97	33,35	33,79	32,29	35,37	33,8	34,97	33,43	31,9
X6, кгс·с/кгс	413,8	413,86	413,65	413,86	415,47	415,16	414,71	413,86	413,95	413,65	413,04	413,8	411,37

где $\operatorname{cov}(x_i, x_j) = \dfrac{\sum\limits_{i,j=1}^{m} \left(x_i^* - \overline{x}_i^*\right)\left(x_j^* - \overline{x}_j^*\right)}{m-1}$, $\operatorname{cov}(x'_i, x'_p) = \dfrac{\sum\limits_{p=1}^{n} \left(x'_i - \overline{x'}_i\right)\left(x'_j - \overline{x'}_j\right)}{n-1}$,

$x^*_{i(j)} = \dfrac{1}{m} \sum\limits_{i(j)=1}^{m} x^{í}_{i(j)}$, $x'_{i(j)} = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i(j)=1}^{n} x'^{í}_{i(j)}$; $m = 14$, $n = 13$ – объем выборки, по которой определялись X и X' соответственно.

Для нашего случая получаем матрицы A и A'

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0{,}873 & 0{,}0998 & 0{,}118 & -0{,}22 & 0{,}335 \\ & 1 & 0{,}025 & 0{,}045 & -0{,}21 & 0{,}17 \\ & & 1 & 0{,}693 & -0{,}95 & 0{,}171 \\ & & & 1 & -0{,}68 & 0{,}581 \\ & & & & 1 & -0{,}15 \\ & & & & & 1 \end{vmatrix},$$

$$A' = \begin{vmatrix} 1 & 0{,}851 & -0{,}67 & 0{,}06 & 0{,}623 & 0{,}054 \\ & 1 & -0{,}667 & 0{,}044 & 0{,}604 & 0{,}082 \\ & & 1 & 0{,}844 & -0{,}982 & -0{,}093 \\ & & & 1 & -0{,}841 & 0{,}0097 \\ & & & & 1 & 0{,}156 \\ & & & & & 1 \end{vmatrix}.$$

Вводим матрицу

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} \sigma_1^2 - \lambda_1 & \operatorname{cov}(x_1, x_2) & \cdots & \operatorname{cov}(x_1, x_6) \\ \operatorname{cov}(x_2, x_1) & \sigma_2^2 - \lambda_2 & & \operatorname{cov}(x_2, x_6) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \operatorname{cov}(x_6, x_1) & \operatorname{cov}(x_6, x_2) & \cdots & \sigma_6^2 - \lambda_6 \end{vmatrix} \tag{7}$$

и точно такую же матрицу $|A' - \lambda' I|$, где λ и λ' – собственные числа матриц A_1 и A'_1 соответственно; I – единичная матрица.

Находим собственные значения λ как корни характеристического уравнения

$$\det|A - \lambda I| = 0 \tag{8}$$

и соответственно

$$\det|A' - \lambda' I| = 0. \tag{9}$$

$$\lambda_1 = 2{,}854,\ \lambda_2 = 1{,}7887,\ \lambda_3 = 1{,}0207,\ \lambda_4 = 0{,}2114,\ \lambda_5 = 0{,}1028,\ \lambda_6 = 0{,}0225. \tag{10}$$

$$\lambda'_1 = 0{,}01,\ \lambda'_2 = 0{,}127,\ \lambda'_3 = 0{,}164,\ \lambda'_4 = 0{,}642,\ \lambda'_5 = 1{,}741,\ \lambda'_6 = 3{,}317. \tag{11}$$

Для вычисления (5) и (6) используем итерационные методы, например, [0].

Вычисляем выборочную корреляционную матрицу для этапов наземной (R) и натурной (R') отработки соответственно

$$R = \begin{vmatrix} 1 & r_{12} & \cdots & r_{1k} \\ r_{21} & 1 & & r_{2k} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ r_{k1} & r_{k2} & \cdots & 1 \end{vmatrix} \text{ и } R' = \begin{vmatrix} 1 & r'_{12} & \cdots & r'_{1k} \\ r'_{21} & 1 & & r'_{2k} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ r'_{k1} & r'_{k2} & \cdots & 1 \end{vmatrix}, \qquad (12)$$

где $r_{ij} = \dfrac{\operatorname{cov}(x_i, x_j)}{\sqrt{\sigma_i \sigma_j}}$ – коэффициент корреляции случайных величин x_i, x_j.

Для нашего случая получаем матрицы R и R'

$$R = \begin{vmatrix} 1 & 0{,}871 & 0{,}01 & 0{,}117 & -0{,}224 & 0{,}334 \\ & 1 & 0{,}026 & 0{,}046 & -0{,}217 & 0{,}174 \\ & & 1 & 0{,}679 & -0{,}936 & 0{,}167 \\ & & & 1 & -0{,}664 & 0{,}57 \\ & & & & 1 & -0{,}15 \\ & & & & & 1 \end{vmatrix},$$

$$R' = \begin{vmatrix} 1 & 0{,}849 & -0{,}67 & 0{,}06 & 0{,}622 & 0{,}054 \\ & 1 & -0{,}69 & 0{,}046 & 0{,}621 & 0{,}084 \\ & & 1 & -0{,}271 & -0{,}964 & -0{,}091 \\ & & & 1 & 0{,}361 & 0{,}789 \\ & & & & 1 & 0{,}153 \\ & & & & & 1 \end{vmatrix}.$$

Вводим матрицы

$$|R - \lambda_k I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda_{k1} & r_{12} & \cdots & r_{1k} \\ r_{21} & 1-\lambda_{k2} & & r_{2k} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ r_{k1} & r_{k2} & \cdots & 1-\lambda_{kk} \end{vmatrix}, \qquad (13)$$

$$|R' - \lambda'_k I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda'_{k1} & r'_{12} & \cdots & r'_{1k} \\ r'_{21} & 1-\lambda'_{k2} & & r'_{2k} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ r'_{k1} & r'_{k2} & \cdots & 1-\lambda'_{kk} \end{vmatrix}, \qquad (14)$$

где λ_k и λ'_k – собственные числа матриц R и R' соответственно.

Находим собственные значения λ_k и λ'_k как корни характеристического уравнения

$$\det|R - \lambda_k I| = 0 \text{ и } \det|R' - \lambda'_k I| = 0, \qquad (15)$$

$$\lambda_{k1}=0{,}0334\,,\ \lambda_{k2}=0{,}1167\,,\ \lambda_{k3}=0{,}2\,,\ \lambda_{k4}=1{,}01\,,\ \lambda_{k5}=1{,}823\,,\ \lambda_{k6}=2{,}82\,. \tag{16}$$

$$\lambda'_{k1}=0{,}029\,,\ \lambda'_{k2}=0{,}13\,,\ \lambda'_{k3}=0{,}176\,,\ \lambda'_{k4}=0{,}62\,,\ \lambda'_{k5}=1{,}727\,,\ \lambda'_{k6}=3{,}318\,. \tag{17}$$

Из вариационных рядов (10), (11) и (16), (17) выбирается максимальное значение $\lambda_i=\lambda_{\max}$ и соответственно находятся значения $\lambda'_{\max}$, $\lambda_{k\max}$, $\lambda'_{k\max}$ для матриц A – 2,854, A' – 3,317, R – 2,8172 и R' – 3,218.

Вычисляем значение $\cos\theta$ по формуле

$$\cos\theta=\cos\left(\arccos\frac{2{,}8172}{6-2{,}8172}-\arccos\frac{3{,}318}{6-3{,}318}\right)=0{,}97\,.$$

Вычисляется значение критерия подобия по формуле (1)

$$P(T_\pi)=\hat{O}\left[\frac{2{,}8539^2\cos 0{,}97-3{,}317}{\sqrt{2\left(\dfrac{2{,}8539^2}{14}\cos 0{,}97+\dfrac{(3{,}317)^2}{13}\right)}}\right]=0{,}88\,.$$

Для оценки полученного результата воспользуемся функцией желаемости Харрингтона [6], значения которой, сопоставленные с соответствующей оценкой, представлены в таблице 5. Значение 0,88 попадает в диапазон от 0,8 до 1 функции желаемости Харрингтона, который соответствует оценке «отлично».

Таблица 5

Значение функции желаемости f_x	Результат
$0{,}8< f_x \le 1{,}0$	Отлично
$0{,}63< f_x \le 0{,}8$	Хорошо
$0{,}37< f_x \le 0{,}63$	Удовлетворительно
$0{,}2< f_x \le 0{,}37$	Неудовлетворительно
$0< f_x \le 0{,}2$	Плохо

Выводы. По результатам расчетов коэффициента статистического подобия условий отработки твердотопливного двигателя для испытаний в наземных и натурных условиях получено значение 0,88, что согласно функции желаемости Харрингтона квалифицируется как отличный результат.

1. *Кривобоков Л. В., Дунаев Д. В., Демченко А. В.* Установление степени адекватности условий отработки изделий ракетной техники, как сложных систем, с применением теории статистического подобия. Техническая механика. 2017. №3. С. 64–71.
2. *Кривобоков Л. В., Дунаев Д. В., Демченко А. В.* Определение подобия твердотопливного ракетного двигателя с использованием статистического критерия. Техническая механика. 2018. №4. С. 119–125.
3. *Айвазян С. А., Енюков Е. С., Мешалкин Л. Д.* Прикладная статистика. Основы моделирования и первичная обработка данных. М.: Финансы и статистика, 1983. 471 с.
4. *Кендалл М., Стьюарт А.* Многомерный статистический анализ и временные ряды. Пер. с англ. Том 3. Под ред. А. Н. Колмогорова. М.: Наука, 1976. 736 с.
5. Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений. Метод Якоби. URL: http://bigor.bmstu.ru/?cnt/?doc=Parallel/ch030203.mod (дата обращения – 18.04.19).
6. *Harrington E. C.* Industry Quality Control. 1965. 21. N 10. P. 494–498.

Получено 06.06.2019,
в окончательном варианте 23.09.2019