СТРУКТУРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР

Б.Н.Пшеничный
(г. Киев)

1. В статье рассматривается общая структура дифференциальной игры, платой в которой является время ее окончания. Подход к дифференциальным играм, развитый ниже, основан на обобщении идей Л.С.Понтрягина, изложенных применительно к линейным играм, в работе [1].

Пусть дифференциальная игра описывается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{z} = f(z, u, v) \quad , \tag{1}$$

где $z \in E^n$, $u \in E^r$, $v \in E^s$, причем u и v меняются в компактных множествах U и V. Кроме того, задано терминальное множество M. Игра заключается в том, что противник, распоряжающийся управлением U (в дальнейшем, противник U), стремится вывести фазовую точку z на множество M за минимальное время, в то время как противник V пытается помешать этому. Противник U в каждый момент времени знает лишь локальную информацию об объекте, т.е. значение фазовых координат z в текущий момент времени. Таким образом, каждая его стратегия есть некоторая функция $u(z)$.

Такова обычная постановка задачи.

К сожалению, она вызывает ряд больших трудностей. Первая из них состоит в том, что, как правило, стратегию $u(z)$ необходимо брать разрывной, после чего становится совершенно неясным вопрос о существовании решения системы (1), так как обычно теоремы существования решения нелинейных дифференциальных уравнений с разрывами могут быть доказаны лишь при определенных ограничениях на характер разрывов. Чтобы обойти эту трудность, которая в некотором смысле здесь не по существу, мы будем считать, что противник V сообщает в начальный момент времени противнику U свое управление на некотором ненулевом отрезке времени ε_1, причем (что существенно) величину $\varepsilon_1 > 0$ противник V выбирает по своему усмотрению. По этой информации противник U строит свое управление на том же отрезке времени. С истечением времени ε_1 противник V вновь сообщает интервал времени ε_2 и свое управление на нем и т.д. Таким образом, в каждый момент времени противник U знает не все будущее поведение противника V, а лишь его управление на небольшом отрезке времени. Описанные стратегии будем называть ε - стратегиями.

Будем говорить, что игра, начинающаяся из точки z_0, может быть закончена за время T, если каждый ε - стратегии противника V противник U может сопоставить свою ε - стратегию таким образом, что траектория $z(t)$ системы (1), соответствующая этим управлениям, окажется на множестве M не позднее, чем за время T.

На протяжении всей работы мы будем предполагать, что правая часть (1) непрерывно дифференцируема по z и непрерывна по u и v. Кроме того, для любых z и v множество $f(z, u, v)$ выпукло и

$$|z \cdot f(z, u, v)| \leq C(1 + |z|^2).$$

Из результатов работы [2] следует, что при этих условиях множество траекторий системы (1), начинающихся из фиксированной точки z_0 при фиксированном управлении $v(t)$ и всевозможных допустимых управлениях $u(t)$, компактно в метрике пространства непрерывных функций.

2. Определение 1. Оператор T_ε, $\varepsilon \geq 0$, ставит в соответствие каждому множеству $X \subset E^n$ множество $T_\varepsilon(X)$ точек $z \in E^n$, таких, что для каждого измеримого управления $v(t)$, $v(t) \in V$, найдется такое измеримое управление $u(t)$, $u(t) \in U$, при котором решение системы (1) с начальным условием $z(0) = z$ и $u = u(t)$, $v = v(t)$ попадет на множество X не позже, чем за время ε.

Перечислим свойства введенного оператора, которые являются почти очевидными следствиями его определения.

Свойство 1:

а) $T_\varepsilon(X) \subset T_{\varepsilon'}(X)$ при $\varepsilon' \geq \varepsilon$;

б) $T_\varepsilon(X) \subset T_\varepsilon(X')$ при $X' \supset X$;

в) $T_0(X) = X$, $T_\varepsilon(X) \supset X$.

Свойство 2. $T_{\varepsilon_1} T_{\varepsilon_2}(X) \subset T_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}(X)$.

Свойство 3. Если X – замкнуто, то и $T_\varepsilon(X)$ замкнуто; из $z \in T_\varepsilon(X)$ при $\varepsilon > \varepsilon_0$ следует, что $z \in T_{\varepsilon_0}(X)$.

Свойство 4. Если замкнутые множества X_i, $i = 1, 2, \ldots$, вложены друг в друга, т.е. $X_{i+1} \subset X_i$, то

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} T_\varepsilon(X_i) = T_\varepsilon\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} X_i\right).$$

Свойство 5. Для произвольных множеств

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} T_\varepsilon(X_i) \supset T_\varepsilon\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} X_i\right).$$

3. **Определение 2.** Рациональным разбиением ω будем называть произвольную конечную последовательность рациональных чисел τ_i, $\tau_i \leq \tau_{i+1}$,

$i = 0, 1, \ldots, n$, $\tau_0 = 0$.

Положим $|\omega| = \tau_n$. Будем говорить, что рациональное разбиение ω' тоньше разбиения ω (обозначается $\omega' < \omega$), если $|\omega'| \leqslant |\omega|$ и все числа τ_i , $\tau_i \leqslant |\omega'|$, совпадают с некоторыми из чисел τ'_j , определяющих разбиение ω' .

Пусть для данного ω $\delta_i = \tau_i - \tau_{i-1}$, $i = 1, \ldots, n$. Определим

$$T_\omega(X) = T_{\delta_n} T_{\delta_{n-1}} \ldots T_{\delta_1}(X) .$$

Лемма 1. Если $\omega' < \omega$, то $T_{\omega'}(X) \subset T_\omega(X)$.

Доказательство леммы следует из свойства 2 оператора $T_\varepsilon(X)$ и определения отношения $\omega' < \omega$.

Определение 3. $\tilde{T}_t(X) = \bigcap\limits_{|\omega| > t} T_\omega(X)$.

Очевидно, что $\tilde{T}_t(X) \subset \tilde{T}_{t'}(X')$, если $t' \geqslant t$ и $X' \supseteq X$.

Лемма 2. $\tilde{T}_{t_1+t_2}(X) = \tilde{T}_{t_1} \tilde{T}_{t_2}(X)$.

Доказательство. Будем обозначать через ω_ε такие рациональные разбиения, $|\omega_\varepsilon| > t_1 + t_2$, что для них существуют рациональные разбиения ω^1 и ω^2 , удовлетворяющие условию

$$T_{\omega^1} T_{\omega^2}(X) = T_{\omega_\varepsilon}(X) , \quad |\omega^1| > t_1 , \; |\omega^2| > t_2 . \tag{2}$$

Если $|\omega| > t_1 + t_2$, $\omega = \{\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n\}$, то найдется такое рациональное число τ , что $\tau > t_2$, $t_n - \tau > t_1$. Рассмотрим разбиение $\bar{\omega} = \{\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_i, \tau, \tau_{i+1}, \ldots, \tau_n\}$. Очевидно, что $\bar{\omega} < \omega$ и

$$T_{\omega^1} T_{\omega^2}(X) = T_{\bar{\omega}}(X) \subset T_{\omega_\varepsilon}(X) , \tag{3}$$

где $\omega^1 = \{0, \tau_{i+1} - \tau, \ldots, \tau_n - \tau\}$, $\omega^2 = \{\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_i, \tau\}$.

Таким образом, для каждого разбиения ω найдется более тонкое разбиение ω_ε. С другой стороны, любым двум разбиениям ω^1 и ω^2, $|\omega^1| > t_1$, $|\omega^2| > t_2$, можно поставить в соответствие разбиение ω_ε так, что (2) будет выполняться.

Учитывая только что сказанное, получаем

$$\begin{aligned}\tilde{T}_{t_1+t_2}(X) &= \bigcap_{|\omega|>t_1+t_2} T_\omega(X) = \bigcap_{|\omega_\varepsilon|>t_1+t_2} T_{\omega_\varepsilon}(X) = \\ &= \bigcap_{|\omega^1|>t_1}\ \bigcap_{|\omega^2|>t_2} T_{\omega^1}T_{\omega^2}(X) \supset \bigcap_{|\omega^1|>t_1} T_{\omega^1}\Big(\bigcap_{|\omega^2|>t_2} T_{\omega^2}(X)\Big) = \\ &= \tilde{T}_{t_1}\tilde{T}_{t_2}(X),\end{aligned} \tag{4}$$

где при выводе использовалось свойство 5 оператора T_ε. Так как каждое разбиение определяется набором рациональных чисел, то число разбиений ω, $|\omega| > t_2$ – счетное. Оказывается, можно построить такую последовательность ω_k, $|\omega_k| > t_2$, $k = 1, \ldots$, что $\omega_{k+1} < \omega_k$ и

$$\tilde{T}_{t_2}(X) = \bigcap_{k=1}^{\infty} T_{\omega_k}(X),$$

так что $\tilde{T}_{t_2}(X)$ образуется как пересечение вложенных друг в друга множеств.

Теперь

$$\begin{aligned}\tilde{T}_{t_1}\tilde{T}_{t_2}(X) &= \bigcap_{|\omega^1|>t_1} T_{\omega^1}\Big(\bigcap_{|\omega^2|>t_2} T_{\omega^2}(X)\Big) = \\ &= \bigcap_{|\omega^1|>t_1} T_{\omega^1}\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} T_{\omega_k}(X)\Big) = \bigcap_{|\omega^1|>t_1}\ \bigcap_{k=1}^{\infty} T_{\omega^1}T_{\omega^k}(X) \supset \\ &\supset \bigcap_{|\omega_\varepsilon|>t_1+t_2} T_{\omega_\varepsilon}(X) = \tilde{T}_{t_1+t_2}(X).\end{aligned} \tag{5}$$

Сопоставление (4) и (5) завершает доказательство леммы.

4. **Теорема.** Пусть дифференциальная игра описывается системой (1) и задано замкнутое терминальное множество M. Пусть

$$t(z_0) = \min_{z_0 \in \tilde{T}_t(M)} t.$$

Если $z_0 \bar{\in} \tilde{T}_t(M)$, $t \geqslant 0$, то $t(z_0) = +\infty$.

Тогда для того, чтобы из точки z_0 игру можно было закончить за время t_0, необходимо и достаточно, чтобы t_0 было не меньше, чем $t(z_0)$.

Укажем основную идею доказательства. Если $t_0 \geqslant t(z_0)$, то $z_0 \in \tilde{T}_{t_0}(M)$. Если известно управление $v(t)$ на отрезке $[0, \varepsilon]$, то из соотношения

$$z_0 \in \tilde{T}_{t_0}(M) = \tilde{T}_\varepsilon \tilde{T}_{t_0-\varepsilon}(M) \subset T_\varepsilon \tilde{T}_{t_0-\varepsilon}(M)$$

следует, что управление $u(t)$ можно выбрать так, что $z(\delta) \in \tilde{T}_{t_0-\varepsilon}(M)$ для некоторого δ, $0 < \delta \leqslant \varepsilon$. Продолжением этого процесса траектория системы (1) при любой ε – стратегии противника v приводится на множество M не позже, чем за время t_0, ибо $\tilde{T}_0(M) = M$.

Если $t_0 < t(z_0)$, то $z_0 \bar{\in} T_{t_0}(M)$ и существует такое разбиение ω, что $z_0 \bar{\in} T_\omega(M)$, $|\omega| > t_0$. Поэтому

$$z_0 \bar{\in} T_{\delta_n} T_{\delta_{n-1}} \ldots T_{\delta_1}(M),$$

$$\delta_n + \delta_{n-1} + \ldots + \delta_1 = |\omega| > t_0.$$

Используя теперь определение оператора T_ε, убеждаемся, что у V существует такая ε – стратегия, определяемая разбиением и управлением противника U, что как бы ни управлялся противник U, траектория системы (1) не попадет на M до момента времени t_0.

Литература

1. Л.С.Понтрягин, О линейных дифференциальных играх, 2, ДАН СССР, т. 175, № 4 (1967).

2. А.Ф.Филиппов, О некоторых вопросах оптимального управления, „Вестник Московского университета. Серия математики, механики, астрономии", № 2, 1959.

Доложено на семинаре 16.II 1968 г.