МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕКЛАССИЧЕСКИХ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

Р.И.Трухаев, В.В.Хоменюк
(г. Ленинград)

Введение

В настоящее время в отечественной и зарубежной литературе большое внимание уделяется вопросам разработки математического аппарата решения задач оптимизации и его применения к расчету оптимальных систем управления.

Однако следует отметить: практические задачи в настоящее время таковы, что часто их решение невозможно или затруднительно на базе широко известных работ по теории оптимизации – принципа максимума Понтрягина и принципа оптимальности Беллмана [1 , 2].

В связи с этим авторами в течение нескольких лет проделана значительная работа по разработке математического аппарата решения задач оптимизации в форме неклассических вариационных задач с целью создания „рабочих" алгоритмов оптимизации применительно к современным электронно-вычислительным машинам.

Эти исследования содержат ряд новых результатов по теории неклассических вариационных задач, основными из которых являются:

1) условия оптимальности в форме линеаризованного принципа максимума;

2) разработка и обоснование методов учета ограничений;

3) разработка методов получения и сглаживания операторных уравнений;

4) разработка и обоснование сходимости методов численного решения вариационных задач и связанных с ними операторных уравнений.

1. Постановка задачи

Сформулируем основную задачу неклассического вариационного исчисления в следующей форме.

Задача 1. Требуется найти вектор-функцию $\varphi^0(x) = (\varphi_1^0(x), \ldots, \varphi_n^0(x))$ из класса $\mathfrak{M}$ суммируемых с квадратом функций $\varphi(x)$, такую, что

$$V_0(\varphi^0(x)) = \min_{\substack{0 \leq \varphi(x) \leq b \\ V_i(\varphi) \leq C_i \\ (i=1,\ldots,m)}} V_0(\varphi(x)), \tag{1}$$

где функционалы V_0 и V_i являются интегральными функционалами:

$$V_i(\varphi(x)) = \int_R f_i(x, \varphi(x))dx \quad (i=0,1,\ldots,m). \tag{2}$$

При этом ограничения

$$0 \leq \varphi(x) \leq b \tag{3}$$

будем называть ограничениями первого типа, а ограничения

$$V_i(\varphi(x)) \leq C_i \quad (i=1,\ldots,m) \tag{4}$$

– ограничениями второго типа.

2. Необходимые и достаточные условия оптимальности (линеаризованный принцип максимума)

Необходимые и достаточные (в случае выпуклости функционала $V_0(\varphi)$) условия оптимальности для задачи 1 формулируются в форме [3].

Для того, чтобы $\varphi^0(x)$ было решением рассматриваемой задачи, необходимо и достаточно, чтобы

$$\min_{\substack{0 \leq \varphi(x) \leq b \\ V_i(\varphi) \leq C_i \\ (i=1,\dots,m)}} \int_R [g(\varphi^0(x)), \varphi(x) - \varphi^0(x)]\, dx = 0 , \qquad (5)$$

где

$g(\varphi^0(x))$ – градиент функционала $V_0(\varphi(x))$;

$[\cdot,\cdot]$ – скалярное произведение в E_n .

Необходимость условия (5) доказывается в следующей теореме.

Теорема 1. Пусть $\varphi^0(x)$ удовлетворяет ограничениям (3) и (4), тогда имеет место соотношение (5).

Доказательство. Докажем сначала, что справедливо неравенство

$$\int_R [g(\varphi^0(x)), \ \varphi(x) - \varphi^0(x)]\, dx \geq 0 . \qquad (6)$$

Рассмотрим квазивариацию $\varphi^\lambda(x) = \varphi^0(x) + \lambda(\varphi(x) - \varphi^0(x))$ при $\lambda \in [0,1]$. В сиду выпуклости множества векторов-функций $\varphi(x)$, удовлетворяющих неравенствам(3) и (4), получим, что $\varphi^\lambda(x)$ удовлетворяет ограничениям (3) – (4) для любого $\lambda \in [0,1]$. Кроме того, $V_0(\varphi^\lambda(x)) \geq V_0(\varphi^0(x))$.

Используя разложения Тейлора функционала $V_0(\varphi^\lambda)$, получим

$$V_0(\varphi^\lambda) = V_0(\varphi^\circ) + \lambda \int_R [g(\varphi^\circ(x)), \varphi(x) - \varphi^\circ(x)]dx + \tau(\lambda), \quad (7)$$

причем $\lim\limits_{\lambda \to 0+} \frac{\tau(\lambda)}{\lambda} = 0$.

Отсюда и из неравенства $V_0(\varphi^\lambda) \geqslant V_0(\varphi^\circ)$ следует, что квазивариация функционала $V_0(\varphi^\circ)$, равная

$$\int_R [g(\varphi^\circ(x)), \varphi(x) - \varphi^\circ(x)]dx,$$

неотрицательна. Действительно, имеем

$$\int_R [g(\varphi^\circ(x)), \varphi(x) - \varphi^\circ(x)dx + \frac{\tau(\lambda)}{\lambda} \geqslant 0 . \quad (8)$$

Переходя к пределу при $\lambda \to 0+$, получим требуемое неравенство (6).

Соотношение (5) является следствием таких двух неравенств.

Из неравенства (6) имеем

$$\min_{\substack{0 \leqslant \varphi(x) \leqslant B \\ V_i(\varphi) \leqslant C_i \\ (i = 1, \dots, m)}} \int_R [g(\varphi^\circ(x)), \varphi(x) - \varphi^\circ(x)] dx \geqslant 0 .$$

Кроме того,

$$\min_{\substack{0 \leqslant \varphi(x) \leqslant B \\ V_i(\varphi) \leqslant C_i \\ (i = 1, \dots, m)}} \int_R [g(\varphi^0(x), \varphi(x) - \varphi^0(x)] dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_R [g(\varphi^\circ(x)), \varphi(x) - \varphi^0(x)]dx \Big|_{\varphi(x) = \varphi^\circ(x)} = 0.$$

Это и доказывает условие (5).

Теорема 2. Пусть $\varphi^{\circ}(x)$ удовлетворяет условиям (3) – (5) и пусть функционал $V_0(\varphi)$ выпукл по φ; тогда $\varphi^{\circ}(x)$ – решение задачи 1.

Доказательство. Пусть $\varphi^{\circ}(x)$ такова, что выполнены условия (3) – (5). Рассмотрим $\varphi(x)$, удовлетворяющую (3) – (4); определим $\varphi^{\lambda}(x)$ при $\lambda \in [0,1]$:

$$\varphi^{\lambda}(x) = \varphi^{\circ}(x) + \lambda(\varphi(x) - \varphi^{\circ}(x)).$$

В силу выпуклости $V_0(\varphi)$ имеем из (7) (так как $\tau(\lambda) \geqslant 0$):

$$V_0(\varphi^{\lambda}) - V_0(\varphi^{\circ}) \geqslant \lambda \int_R [g(\varphi^{\circ}(x)), \varphi(x) - \varphi^{\circ}(x)]\,dx \geqslant$$

$$\geqslant \min_{\substack{0 \leqslant \varphi(x) \leqslant B \\ V_i(\varphi) \leqslant C_i \\ (i=1,\dots,m)}} \lambda \int_R [g(\varphi^{\circ}(x)), \varphi(x) - \varphi^{\circ}(x)]\,dx = 0 \qquad (9)$$

для любого $\lambda \in [0,1]$. Отсюда, в частности, при $\lambda = 1$ получим

$$V_0(\varphi(x)) \geqslant V_0(\varphi^{\circ}(x))$$

для любого $\varphi(x)$, удовлетворяющего (3) – (4), что означает оптимальность $\varphi^{\circ}(x)$.

Условие оптимальности (5) является дальнейшим обобщением условия равенства нулю первой вариации функционала V_0 в классическом вариационном исчислении и представляет собой вариационную задачу минимизации линейного функционала.

3. Методы учета ограничений первого и второго типов

Одним из основных этапов исследования аппарата решения неклассической вариационной задачи 1 является разработка и обоснование методов учета ограничений первого и второго типов.

Применение методов учета ограничений позволяет вместо этой задачи рассматривать вариационные задачи, в которых ограничения первого и второго типов либо отсутствуют, либо число их уменьшено, либо эти ограничения преобразованы в равенства или вместо исходной вариационной задачи рассматриваются задачи минимаксные.

Не останавливаясь на формальных моментах исследования этого направления, приведем новые результаты по обоснованию метода погружения [4].

Формулируемый ниже, этот метод можно назвать предельно приближенным относительно выполнения ограничений второго типа. В нем вместо задачи 1 рассматривается следующая вариационная задача.

Задача II. Требуется найти вектор-функцию $\varphi^{o}_{\psi}(x)$ из класса суммируемых с квадратом функций $\varphi(x)$, такую, что

$$V_{\psi}(\varphi^{o}_{\psi}(x)) = \min_{0 \leq \varphi(x) \leq b} V_{\psi}(\varphi(x)) , \tag{10}$$

где

$$V_{\psi}(\varphi) = V_0(\varphi) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \psi_i (V_i(\varphi) - C_i)[V_i(\varphi) - C_i + |V_i(\varphi) - C_i|]. \tag{11}$$

Второй член в первой части (11) называется функцией „штрафа".

Обоснование применения этого метода учета ограничений и способ аналитического определения коэффициентов ψ_i в функции „штрафа" проводится на основе доказательства следующей теоремы.

Теорема 3. Если для любой суммируемой с квадратом вектор-функции $\varphi(x)$, $0 \leq \varphi(x) \leq b$ выполнено условие $V_0(\varphi) \geq \bar{C} > -\infty$, то решение $\varphi^0_\psi(x)$ задачи II при $\psi_1 = \ldots = \psi_m = \psi$ $(\psi \geq \psi_\varepsilon > 0)$ удовлетворяет неравенствам:

$$V_0(\varphi^0_\psi(x)) \leq \min_{\substack{0 \leq \varphi(x) \leq b \\ V_i(\varphi) \leq C_i \\ (i=1,\ldots,m)}} V_0(\varphi); \qquad (12)$$

$$V_i(\varphi^0_\psi(x)) \leq C_i + \varepsilon \quad (i=1,\ldots,m), \qquad (13)$$

где $\varepsilon > 0$ – любое (сколь угодно малое) заданное число;

$$\psi_\varepsilon = \frac{2}{\varepsilon^2}\left(V_0(\bar{\varphi}(x)) - \bar{C}\right) > 0 \qquad (14)$$

(если $V_0(\bar{\varphi}(x)) \neq \bar{C}$, $\bar{\varphi}(x)$ – допустимое решение в смысле удовлетворения неравенств (3) – (4).

Как видно из этой теоремы, на основе метода погружения находится вектор-функция $\varphi^0_\psi(x)$ как решение задачи II, на которой функционал V_0 принимает значение меньшее, чем в задаче I. Однако подобный успех достигнут за счет неточного выполнения ограничений второго типа, которые удовлетворяются с точностью до малой величины ε.

Из теоремы 3 также следует и другой, не менее важный результат, заключающийся в выборе вместо вектора ψ одной константы ψ_ε, которую фактически можно определить до проведения численного расчета на ЭВМ.

4. Методы получения и сглаживания операторных уравнений

На основе условий оптимальности в форме линеаризованного принципа максимума и методов учета ограничений могут быть получены операторные уравнения для вектор-функции $\varphi^o(x)$, являющейся решением вариационной задачи.

Рассмотрим вариационную задачу.

Задача III. Найти вектор-функцию $\varphi^o(x)$, такую, что

$$V(\varphi^o(x)) = \min_{0 \leq \varphi(x) \leq B} V(\varphi(x)) \,. \tag{15}$$

На основе использования условий оптимальности для этой задачи операторное уравнение может быть представлено в форме:

$$\varphi_j^o(x) = \begin{cases} \Phi_j(\varphi^o(x), x), & \text{если } g^j(\varphi^o(x)) \neq 0, \\ \varphi_j^o(x) + g^j(\varphi^o(x)), & \text{если } g^j(\varphi^o(x)) = 0, \end{cases} \tag{16}$$

где $\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_m)$ – оператор из $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{M}$, причем j-я компонента оператора Φ имеет вид:

$$\Phi_j(\varphi^o(x), x) = \frac{B_j}{2}\left[1 - \operatorname{sign} g^j(\varphi^o(x))\right], \tag{17}$$
$$(j = 1, \ldots, n)$$

где $g^j(\varphi^o(x))$ – j-я компонента градиента функционала $V(\varphi)$.

Заметим, что к вариационной задаче III может быть преобразована вариационная задача I применением различных методов учета ограничений (например, метода погружения).

Из (17) следует, что полученное операторное уравнение (16) содержит негладкий оператор Φ, и поскольку при численном решении операторных уравнений часто используются условия гладкости оператора, то естественным продолжением развития аппарата неклассического вариационного исчисления является этап сглаживания операторных уравнений.

Это сглаживание может быть осуществлено в нескольких направлениях.

Первое из них основано на рассмотрении задачи 1У (ε - задачи), в которой вместо отыскания минимума исходного функционала V в задаче III ищется минимум функционала V_ε, отличающийся от V добавлением слагаемого порядка сколь угодно малой величины ε.

Рассмотрим несколько подробней полученные в этом направлении результаты.

Назовем вектор-функцию $\varphi^0_\varepsilon(x)$ ε оптимальным решением задачи III, если

$$V(\varphi^0_\varepsilon(x)) \le \min_{0\le\varphi(x)\le b} V(\varphi(x)) + \varepsilon, \quad (18)$$

где $\varepsilon > 0$ - некоторое „малое" число.

Определим вектор-функцию $\eta(x)$ из класса вектор-функций $\mathfrak{M}$, такую, что $0\le\eta(x)\le b$. Определим пару вектор-функций $\omega(x)=\{\varphi(x,\eta(x)\}$ и множество Ω вектор-функций $\omega(x)$ в виде $\Omega=\prod_{j=1}^{n}\Omega_j(x)$, где

$$\Omega_j(x)=\left\{\varphi_j(x),\eta_j(x):\left(\varphi_j(x)-\frac{b_j}{2}\right)^2+\left(\eta_j(x)-\frac{b_j}{2}\right)^2\le\frac{b_j^2}{4}, x\in R\right\}. (19)$$

Сформулируем ε - задачу следующим образом.

Задача 1У (ε - задача). Для заданного $\varepsilon>0$ найти вектор-функцию $\omega^0_\varepsilon(x)=\{\varphi^0_\varepsilon(x),\eta^0_\varepsilon(x)\}\in\Omega$ такую, что

$$V_\varepsilon(\omega^\circ_\varepsilon(x)) = \min_{\omega(x)\in\Omega} V_\varepsilon(\omega(x)) \ , \qquad (20)$$

где

$$V_\varepsilon(\omega(x)) = V(\varphi(x)) + \frac{2\varepsilon}{\mu(R)n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{b_j}\int_R \left(\eta_j(x) - \frac{b_j}{2}\right)dx, \qquad (21)$$

причем $\mu(R)$ – мера множества R .

Справедливы такие утверждения.

Теорема 4. Решение ε –задачи 1У является ε –оптимальным решением задачи III.

Теорема 5. Решение ε –задачи 1У определяется из операторного уравнения

$$\omega^\circ_\varepsilon(x) = \Phi_\varepsilon(\omega^\circ_\varepsilon(x), x) \ , \qquad (22)$$

или в развернутой форме:

$$\varphi^\circ_{\varepsilon_j}(x) = \frac{b_j}{2}\left\{1 - \frac{g^j(\varphi^\circ_\varepsilon(x))}{\sqrt{[g^j(\varphi^\circ_\varepsilon(x))]^2 + \frac{4\varepsilon^2}{n^2\mu^2(R)b_j^2}}}\right\} \ (j=1,\dots,n); \qquad (23)$$

$$\eta^\circ_{\varepsilon_j}(x) = -\frac{b_j \ \varepsilon}{2n\mu(R)\sqrt{[g^j(\varphi^\circ_\varepsilon(x))]^2 + \frac{4\varepsilon^2}{n^2\mu^2(R)b_j^2}}} \ (j=1,\dots,n). \qquad (24)$$

Из вида операторов в правых частях (23) и (24) следует их гладкость, если градиент $g(\varphi)$ функционала $V(\varphi)$ в задаче III гладкий. Кроме того, поскольку операторы в (23) и (24) не зависят от $\eta(x)$, то для дальнейших исследований можно ограничиться использованием лишь оператора в правой части (23).

Второе из этих направлений основано на рассмотрении специального класса функций, являющихся наилучшим в некотором смысле приближением для оператора Φ . Этот класс может быть построен путем использования специальных функций.

Например, при использовании функций Лапласа сглаженное операторное уравнение может иметь вид:

$$\varphi^{o}_{\varepsilon,\delta_j}(x)=\frac{b_j}{2}\left\{1-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{\sigma(\varepsilon,\delta)}\int\limits_{0}^{g^j(\varphi^o_{\varepsilon,\delta}(x))} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2(\varepsilon,\delta)}}\,dt\right\}, \quad (25)$$

которое также является гладким операторным уравнением.

5. Методы численного решения вариационных задач и связанных с ними операторных уравнений

Завершающим этапом математического исследования вариационной задачи 1 является обоснование и применение методов численного решения вариационных задач и операторных уравнений, полученных на основе условий оптимальности в форме линеаризованного принципа максимума.

Исследования этого этапа могут проводиться в нескольких направлениях:

а) разработка новых методов численного решения вариационных задач и операторных уравнений;

б) разработка возможностей и условий применения известных методов для численного решения неклассических вариационных задач и операторных уравнений;

в) обоснование доказательства сходимости и получение оценок скорости сходимости;

г) изучение эффективности различных методов численного решения (разработка критериев эффективности методов);

д) разработка классификации методов численного решения по различным признакам.

Не останавливаясь подробно на возможных исследованиях в этих направлениях, дадим краткую характеристику известных методов в случае их применения для численного решения неклассических вариационных задач и связанных с ними операторных уравнений, а также краткий анализ результатов по сходимости градиентных методов спуска и по оценкам скорости сходимости при решении задач рассматриваемого здесь типа.

Предварительно заметим, что к настоящему времени арсенал численных методов весьма богат и разнообразен. К числу таких методов можно отнести:

1) градиентные (итерационные и непрерывные) методы спуска;

2) методы дифференцирования по параметру;

3) методы Ритца, Бубнова-Галеркина, моментов, наименьших квадратов;

4) методы сеток и разложения по собственным вектор-функциям оператора;

5) метод Ньютона и его модификации;

6) методы, основанные на решении двойственной задачи, и т.д.

Рассмотрим градиентный метод условного наискорейшего спуска решения задачи III, который заключается в построении последовательности:

$$\varphi^{K+1}(x) = \varphi^K(x) + \lambda_K\,(\bar{\varphi}^K(x) - \varphi^K(x)), \qquad (26)$$

где $\bar{\varphi}^K(x)$ и λ_K определяются из условий:

$$\int_R [g(\varphi^K(x)), \bar{\varphi}^K(x)]\,dx = \min_{0\le\varphi(x)\le b} \int_R [g(\varphi^K(x)), \varphi(x)]\,dx; \qquad (27)$$

$$V(\varphi^K(x) + \lambda_K(\bar{\varphi}^K(x) - \varphi^K(x))) = \min_{\lambda\in[0,1]} V(\varphi^K(x) + \lambda(\bar{\varphi}^K(x) - \varphi^K(x))). \qquad (28)$$

Для вариационной задачи III в случае выпуклости функционала V доказывается сходимость и получена апостериорная оценка скорости сходимости на основе доказательства справедливости утверждений следующих трех теорем.

Теорема 6. Если функционал $V(\varphi)$ выпукл по φ и $\varphi^0(x)$ является решением задачи III, то для любого $K>0$

$$0 \geq V(\varphi^0(x)) - V(\varphi^K(x)) \geq \int_R [g(\varphi^K(x)), \bar{\varphi}^K(x) - \varphi^K(x)]\,dx. \quad (29)$$

Теорема 7. Имеет место соотношение

$$\lim_{K\to\infty} \int_R [g(\varphi^K(x)), \bar{\varphi}^K(x) - \varphi^K(x)]\,dx = 0 \quad . \quad (30)$$

Теорема 8. Последовательность вектор-функции $\{\varphi^K(x)\}$ – минимизирующая для задачи III, т.е.

$$\lim_{K\to+\infty} V(\varphi^K(x)) = V(\varphi^0(x)) = \min_{0\leq\varphi(x)\leq B} V(\varphi(x)) \quad . \quad (31)$$

При рассмотрении непрерывного градиентного метода спуска для решения операторного уравнения, определяемого по (23):

$$\varphi(x) = \Phi_\varepsilon(\varphi(x), x) \quad , \quad (32)$$

предположим, что существует неособый линейный положительно определенный оператор $D(\varphi(x))$ из $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{M}$, такой, что оператор

$$P_\varepsilon(\varphi(x)) = D(\varphi(x))(\varphi(x) - \Phi_\varepsilon(\varphi(x), x)) \quad (33)$$

– непрерывный и потенциальный с потенциалом, равным с точностью до постоянного слагаемого

$$\mathcal{F}_\varepsilon(\varphi(x)) = \int_0^1 [P_\varepsilon(\theta\varphi(x)), \varphi(x)]\,d\theta \quad . \quad (34)$$

Если в задаче III функционал $V(\varphi)$ выпуклый по φ, тогда

$$D(\varphi(x)) = \left\{ \frac{\partial^2 V}{\partial\varphi_\ell \partial\varphi_K} \right\}$$

и

$$\mathcal{F}_\varepsilon(\varphi(x)) = \int_R [g(\varphi(x)), \varphi(x) - \frac{b}{2}] dx - V(\varphi) + \frac{1}{2}\int_R [b, |g(\varphi(x))|] dx. \quad (35)$$

При этих предположениях имеет место эквивалентность задачи 1У следующей вариационной задаче.

Задача У. Найти вектор-функцию $\varphi_\varepsilon^o(x) \in \mathfrak{M}$, такую, что

$$\mathcal{F}_\varepsilon(\varphi_\varepsilon^o(x)) = \min_{\varphi(x)\in\mathfrak{M}} \mathcal{F}_\varepsilon(\varphi(x)) \quad . \quad (36)$$

Теперь непрерывный градиентный метод нахождения минимума функционала $\mathcal{F}_\varepsilon(\varphi)$ без ограничений заключается в решении дифференциального уравнения

$$\frac{\partial \varphi_\tau(x)}{\partial \tau} = -\alpha(\tau) P_\varepsilon(\varphi_\tau(x)), \quad (37)$$

где $\alpha(\tau)$ – суммируемая, ограниченная, скалярная неотрицательная функция.

Для этого метода сходимость доказывается в следующей теореме.

Теорема 9. В непрерывном градиентном методе:

1) $\varphi_\tau(x) \xrightarrow[\tau\to+\infty]{} \varphi_\varepsilon^o(x)$,

где $\varphi_\varepsilon^o(x)$ – точка минимума $\mathcal{F}_\varepsilon(\varphi(x))$;

2) $\mathcal{F}_\varepsilon(\varphi_\tau(x)) \xrightarrow[\tau\to+\infty]{} \mathcal{F}_\varepsilon(\varphi_\varepsilon^o(x))$,

монотонно убывая, при произвольном выборе и $\alpha(\tau)$

$0 < \alpha_0 \le \alpha(\tau) \le \alpha_1 < +\infty$, и начального приближения $\tilde{\varphi}_\tau(x) = \varphi_\tau(x)|_{\tau=0}$, для которого $\mathcal{F}_\varepsilon(\tilde{\varphi}_\tau(x)) < +\infty$.

При исследовании итерационных методов решения операторного уравнения вида (32) итерации определяются по формуле

$$\varphi^{k+1}(x) = \varphi^k(x) - \lambda_k P_\varepsilon(\varphi^k(x)), \quad (38)$$

где величина шага λ_k выбирается различным образом в зависимости от вида итерационного метода (метода условного наискорейшего спуска, метода наискорейшего спуска, метода простой итерации и метода невязок). Для этих методов справедлива следующая теорема о сходимости.

Теорема 10. Если для любых вектор-функций $\varphi(x)$ и $y(x) \in \mathfrak{M}$ выполнены условия

$$\| P_\varepsilon (\varphi(x)+y(x)) - P_\varepsilon (y(x)) \| \leq \nu \| \varphi(x) \| , \tag{39}$$

$$\| P_\varepsilon (\varphi(x)) \|^2 \geq 2p [\mathcal{F}_\varepsilon (\varphi(x)) - \mathcal{F}^\circ], \; p > 0, \tag{40}$$

то итерационные методы сходятся при выборе λ_k любым из перечисленных способом, если $\lambda_k \in [\alpha, \beta] \subset (0, \frac{2}{\nu})$ при $k = 1, 2, \ldots$; причем

$$\mathcal{F}_\varepsilon (\varphi^k(x)) - \mathcal{F}^\circ \leq q^k [\mathcal{F}_\varepsilon (\varphi^1(x)) - \mathcal{F}^\circ]; \tag{41}$$

$$\| \varphi^k(x) - \varphi^\circ_\varepsilon (x) \|^2 \leq C_0 q^k , \tag{42}$$

где

$$\mathcal{F}^\circ = \lim_{k \to +\infty} \mathcal{F}_\varepsilon (\varphi^k(x)) , \tag{43}$$

$$C_0' = \frac{\beta [\mathcal{F}_\varepsilon (\varphi^1(x)) - \mathcal{F}^\circ]}{(1 - \frac{\beta\nu}{2})(1-q)} . \tag{44}$$

На основе этой теоремы получим, что оценка скорости сходимости имеет вид (41)-(42) и, кроме того,

$$\| P_\varepsilon (\varphi^k(x)) \|^2 \leq \frac{\mathcal{F}_\varepsilon (\varphi^k(x)) - \mathcal{F}_\varepsilon (\varphi^{k+1}(x))}{\lambda_k (1 - \frac{\lambda_k \nu}{2})} . \tag{45}$$

Далее, поскольку на основе условий оптимальности в форме линеаризованного принципа максимума получены операторные уравнения, то применение методов численного решения этих операторных уравнений откроет большие перспективы для численного решения неклассических вариационных задач.

Литература

1. Л.С.Понтрягин и др., Математическая теория оптимальных процессов, Физматгиз, М., 1961.

2. Р.Беллман, Динамическое программирование, ИЛ, 1960.

3. В.В.Хоменюк, Градиентные методы оптимизации нелинейных систем автоматического регулирования, в сб. „Прикладные задачи технической кибернетики", изд-во „Советское радио", М., 1966.

4. А.Ю.Баранов, Р.И.Трухаев, В.В.Хоменюк, Обоснование метода погружения в вариационных задачах, журн. „Автоматика и телемеханика", №7, 1967.

Доложено на семинаре 15.XII 1967 г.