

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕКЛАССИЧЕСКИХ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

Р.И.Трухаев, В.В.Хоменюк
(г. Ленинград)

Введение

В настоящее время в отечественной и зарубежной литературе большое внимание уделяется вопросам разработки математического аппарата решения задач оптимизации и его применения к расчету оптимальных систем управления.

Однако следует отметить: практические задачи в настоящее время таковы, что часто их решение невозможно или затруднительно на базе широко известных работ по теории оптимизации — принципа максимума Понтрягина и принципа оптимальности Беллмана [1, 2].

В связи с этим авторами в течение нескольких лет проделана значительная работа по разработке математического аппарата решения задач оптимизации в форме неклассических вариационных задач с целью создания „рабочих“ алгоритмов оптимизации применительно к современным электронно-вычислительным машинам.

Эти исследования содержат ряд новых результатов по теории неклассических вариационных задач, основными из которых являются:

1) условия оптимальности в форме линеаризованного принципа максимума;

2) разработка и обоснование методов учета ограничений;

3) разработка методов получения и сглаживания операторных уравнений;

4) разработка и обоснование сходимости методов численного решения вариационных задач и связанных с ними операторных уравнений.

1. Постановка задачи

Сформулируем основную задачу неклассического вариационного исчисления в следующей форме.

Задача 1. Требуется найти вектор-функцию $\varphi^0(x) = (\varphi_1^0(x), \dots, \varphi_n^0(x))$ из класса \mathcal{M} суммируемых с квадратом функций $\varphi(x)$, такую, что

$$V_0(\varphi^0(x)) = \min_{\substack{0 \leq \varphi(x) \leq b \\ V_i(\varphi) \leq C_i \\ (i=1, \dots, m)}} V_0(\varphi(x)), \quad (1)$$

где функционалы V_0 и V_i являются интегральными функционалами:

$$V_i(\varphi(x)) = \int_R f_i(x, \varphi(x)) dx \quad (i=0, 1, \dots, m). \quad (2)$$

При этом ограничения

$$0 \leq \varphi(x) \leq b \quad (3)$$

будем называть ограничениями первого типа, а ограничения

$$V_i(\varphi(x)) \leq C_i \quad (i=1, \dots, m) \quad (4)$$

– ограничениями второго типа.

2. Необходимые и достаточные условия оптимальности (линеаризованный принцип максимума)

Необходимые и достаточные (в случае выпуклости функционала $V_0(\varphi)$) условия оптимальности для задачи 1 формулируются в форме [3].

Для того, чтобы $\varphi^0(x)$ было решением рассматриваемой задачи, необходимо и достаточно, чтобы

$$\min_{\substack{0 \leq \varphi(x) \leq b \\ V_i(\varphi) \leq C_i \\ (i=1, \dots, m)}} \int_R [g(\varphi^0(x), \varphi(x) - \varphi^0(x))] dx = 0, \quad (5)$$

где

$g(\varphi^0(x))$ – градиент функционала $V_0(\varphi(x))$;
 $[\cdot, \cdot]$ – скалярное произведение в E_n .

Необходимость условия (5) доказывается в следующей теореме.

Теорема 1. Пусть $\varphi^0(x)$ удовлетворяет ограничениям (3) и (4), тогда имеет место соотношение (5).

Доказательство. Докажем сначала, что справедливо неравенство

$$\int_R [g(\varphi^0(x)), \varphi(x) - \varphi^0(x)] dx \geq 0. \quad (6)$$

Рассмотрим квазивариацию $\varphi^\lambda(x) = \varphi^0(x) + \lambda(\varphi(x) - \varphi^0(x))$ при $\lambda \in [0, 1]$. В силу выпуклости множества векторов-функций $\varphi(x)$, удовлетворяющих неравенствам (3) и (4), получим, что $\varphi^\lambda(x)$ удовлетворяет ограничениям (3) – (4) для любого $\lambda \in [0, 1]$. Кроме того, $V_0(\varphi^\lambda(x)) \geq V_0(\varphi^0(x))$.

Используя разложения Тейлора функционала $V_0(\varphi^\lambda)$, получим

$$V_0(\varphi^\lambda) = V_0(\varphi^0) + \lambda \int_R [g(\varphi^0(x)), \varphi(x) - \varphi^0(x)] dx + \tau(\lambda), \quad (7)$$

причем $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\tau(\lambda)}{\lambda} = 0$.

Отсюда и из неравенства $V_0(\varphi^\lambda) \geq V_0(\varphi^0)$ следует, что квазивариация функционала $V_0(\varphi^0)$, равная

$$\int_R [g(\varphi^0(x)), \varphi(x) - \varphi^0(x)] dx,$$

неотрицательна. Действительно, имеем

$$\int_R [g(\varphi^0(x)), \varphi(x) - \varphi^0(x)] dx + \frac{\tau(\lambda)}{\lambda} \geq 0. \quad (8)$$

Переходя к пределу при $\lambda \rightarrow 0^+$, получим требуемое неравенство (6).

Соотношение (5) является следствием таких двух неравенств.

Из неравенства (6) имеем

$$\min_{\substack{0 \leq \varphi(x) \leq \beta \\ V_i(\varphi) \leq C_i \\ (i=1, \dots, m)}} \int_R [g(\varphi^0(x)), \varphi(x) - \varphi^0(x)] dx \geq 0.$$

Кроме того,

$$\min_{\substack{0 \leq \varphi(x) \leq \beta \\ V_i(\varphi) \leq C_i \\ (i=1, \dots, m)}} \int_R [g(\varphi^0(x)), \varphi(x) - \varphi^0(x)] dx \leq$$

$$\leq \int_R [g(\varphi^0(x)), \varphi(x) - \varphi^0(x)] dx \Big|_{\varphi(x) = \varphi^0(x)} = 0.$$

Это и доказывает условие (5).

Теорема 2. Пусть $\varphi^0(x)$ удовлетворяет условиям (3) - (5) и пусть функционал $V_0(\varphi)$ выпукл по φ ; тогда $\varphi^0(x)$ - решение задачи 1.

Доказательство. Пусть $\varphi^0(x)$ такова, что выполнены условия (3) - (5). Рассмотрим $\varphi(x)$, удовлетворяющую (3) - (4); определим $\varphi^\lambda(x)$ при $\lambda \in [0,1]$:

$$\varphi^\lambda(x) = \varphi^0(x) + \lambda(\varphi(x) - \varphi^0(x)).$$

В силу выпуклости $V_0(\varphi)$ имеем из (7) (так как $\tau(\lambda) \geq 0$):

$$V_0(\varphi^\lambda) - V_0(\varphi^0) \geq \lambda \int_R [g(\varphi^0(x)), \varphi(x) - \varphi^0(x)] dx \geq$$

$$\geq \min_{\substack{0 \leq \varphi(x) \leq b \\ V_i(\varphi) \leq C_i \\ (i=1, \dots, m)}} \lambda \int_R [g(\varphi^0(x)), \varphi(x) - \varphi^0(x)] dx = 0 \quad (9)$$

для любого $\lambda \in [0,1]$. Отсюда, в частности, при $\lambda = 1$ получим

$$V_0(\varphi(x)) \geq V_0(\varphi^0(x))$$

для любого $\varphi(x)$, удовлетворяющего (3) - (4), что означает оптимальность $\varphi^0(x)$.

Условие оптимальности (5) является дальнейшим обобщением условия равенства нулю первой вариации функционала V_0 в классическом вариационном исчислении и представляет собой вариационную задачу минимизации линейного функционала.

3. Методы учета ограничений первого и второго типов

Одним из основных этапов исследования аппарата решения неклассической вариационной задачи 1 является разработка и обоснование методов учета ограничений первого и второго типов.

Применение методов учета ограничений позволяет вместо этой задачи рассматривать вариационные задачи, в которых ограничения первого и второго типов либо отсутствуют, либо число их уменьшено, либо эти ограничения преобразованы в равенства или вместо исходной вариационной задачи рассматриваются задачи минимаксные.

Не останавливаясь на формальных моментах исследования этого направления, приведем новые результаты по обоснованию метода погружения [4].

Формулируемый ниже, этот метод можно назвать предельно приближенным относительно выполнения ограничений второго типа. В нем вместо задачи 1 рассматривается следующая вариационная задача.

Задача II. Требуется найти вектор-функцию $\varphi_\psi^0(x)$ из класса суммируемых с квадратом функций $\varphi(x)$, такую, что

$$V_\psi(\varphi_\psi^0(x)) = \min_{0 \leq \varphi(x) \leq b} V_\psi(\varphi(x)), \quad (10)$$

где

$$V_\psi(\varphi) = V_0(\varphi) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \psi_i (V_i(\varphi) - C_i) [V_i(\varphi) - C_i + |V_i(\varphi) - C_i|]. \quad (11)$$

Второй член в первой части (11) называется функцией „штрафа“.

Обоснование применения этого метода учета ограничений и способ аналитического определения коэффициентов ψ_i в функции „штрафа“ проводится на основе

доказательства следующей теоремы.

Теорема 3. Если для любой суммируемой с квадратом вектор-функции $\varphi(x)$, $0 \leq \varphi(x) \leq b$ выполнено условие $V_0(\varphi) \geq \bar{C} > -\infty$, то решение $\varphi_\psi^\circ(x)$ задачи II при $\psi_1 = \dots = \psi_m = \psi$ ($\psi \geq \psi_\varepsilon > 0$) удовлетворяет неравенствам:

$$V_0(\varphi_\psi^\circ(x)) \leq \min_{\substack{0 \leq \varphi(x) \leq b \\ V_i(\varphi) \leq C_i \\ (i=1, \dots, m)}} V_0(\varphi); \quad (12)$$

$$V_i(\varphi_\psi^\circ(x)) \leq C_i + \varepsilon \quad (i=1, \dots, m), \quad (13)$$

где $\varepsilon > 0$ - любое (сколь угодно малое) заданное число;

$$\psi_\varepsilon = \frac{2}{\varepsilon^2} (V_0(\bar{\varphi}(x)) - \bar{C}) > 0 \quad (14)$$

(если $V_0(\bar{\varphi}(x)) \neq \bar{C}$, $\bar{\varphi}(x)$ - допустимое решение в смысле удовлетворения неравенств (3) - (4).

Как видно из этой теоремы, на основе метода погружения находится вектор-функция $\varphi_\psi^\circ(x)$ как решение задачи II, на которой функционал V_0 принимает значение меньшее, чем в задаче I. Однако подобный успех достигнут за счет неточного выполнения ограничений второго типа, которые удовлетворяются с точностью до малой величины ε .

Из теоремы 3 также следует и другой, не менее важный результат, заключающийся в выборе вместо вектора ψ одной константы ψ_ε , которую фактически можно определить до проведения численного расчета на ЭВМ.

4. Методы получения и сглаживания операторных уравнений

На основе условий оптимальности в форме линеаризованного принципа максимума и методов учета ограничений могут быть получены операторные уравнения для вектор-функции $\varphi^0(x)$, являющейся решением вариационной задачи.

Рассмотрим вариационную задачу.

Задача III. Найти вектор-функцию $\varphi^0(x)$, такую, что

$$V(\varphi^0(x)) = \min_{0 \leq \varphi(x) \leq B} V(\varphi(x)). \quad (15)$$

На основе использования условий оптимальности для этой задачи операторное уравнение может быть представлено в форме:

$$\varphi_j^0(x) = \begin{cases} \Phi_j(\varphi^0(x), x), & \text{если } g_j^j(\varphi^0(x)) \neq 0, \\ \varphi_j^0(x) + g_j^j(\varphi^0(x)), & \text{если } g_j^j(\varphi^0(x)) = 0, \end{cases} \quad (16)$$

где $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_n)$ - оператор из \mathcal{M} в \mathcal{M} , причем j -я компонента оператора Φ имеет вид:

$$\Phi_j(\varphi^0(x), x) = \frac{\beta_j}{2} [1 - \text{sign } g_j^j(\varphi^0(x))], \quad (17)$$

$(j = 1, \dots, n)$

где $g_j^j(\varphi^0(x))$ - j -я компонента градиента функционала $V(\varphi)$.

Заметим, что к вариационной задаче III может быть преобразована вариационная задача I применением различных методов учета ограничений (например, ме-

тогда погружения).

Из (17) следует, что полученное операторное уравнение (16) содержит негладкий оператор Φ , и поскольку при численном решении операторных уравнений часто используются условия гладкости оператора, то естественным продолжением развития аппарата неклассического вариационного исчисления является этап сглаживания операторных уравнений.

Это сглаживание может быть осуществлено в нескольких направлениях.

Первое из них основано на рассмотрении задачи $IY(\epsilon)$ (задачи), в которой вместо отыскания минимума исходного функционала V в задаче III ищется минимум функционала V_ϵ , отличающийся от V добавлением слагаемого порядка сколь угодно малой величины ϵ .

Рассмотрим несколько подробнее полученные в этом направлении результаты.

Назовем вектор-функцию $\varphi_\epsilon^0(x)$ ϵ оптимальным решением задачи III, если

$$V(\varphi_\epsilon^0(x)) \leq \min_{0 \leq \varphi(x) \leq \delta} V(\varphi(x)) + \epsilon, \quad (18)$$

где $\epsilon > 0$ — некоторое „малое“ число.

Определим вектор-функцию $\eta(x)$ из класса вектор-функций \mathcal{M} , такую, что $0 \leq \eta(x) \leq \delta$. Определим пару вектор-функций $\omega(x) = \{\varphi(x), \eta(x)\}$ и множество Ω вектор-функций $\omega(x)$ в виде

$$\Omega = \prod_{j=1}^n \Omega_j(x), \quad \text{где}$$

$$\Omega_j(x) = \left\{ \varphi_j(x), \eta_j(x) : \left(\varphi_j(x) - \frac{\delta_j}{2} \right)^2 + \left(\eta_j(x) - \frac{\delta_j}{2} \right)^2 \leq \frac{\delta_j^2}{4}, x \in R \right\}. \quad (19)$$

Сформулируем ϵ — задачу следующим образом.

Задача $IY(\epsilon)$ (ϵ — задача). Для заданного $\epsilon > 0$ найти вектор-функцию $\omega_\epsilon^0(x) = \{\varphi_\epsilon^0(x), \eta_\epsilon^0(x)\} \in \Omega$ такую, что

$$V_{\varepsilon}(\omega_{\varepsilon}^{\circ}(x)) = \min_{\omega(x) \in \Omega} V_{\varepsilon}(\omega(x)) , \quad (20)$$

где

$$V_{\varepsilon}(\omega(x)) = V(\varphi(x)) + \frac{2\varepsilon}{\mu(R)n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{b_j} \int_R (\eta_j(x) - \frac{b_j}{2}) dx, \quad (21)$$

причем $\mu(R)$ - мера множества R .

Справедливы такие утверждения.

Теорема 4. Решение ε -задачи IY является ε -оптимальным решением задачи III.

Теорема 5. Решение ε -задачи IY определяется из операторного уравнения

$$\omega_{\varepsilon}^{\circ}(x) = \Phi_{\varepsilon}(\omega_{\varepsilon}^{\circ}(x), x) , \quad (22)$$

или в развернутой форме:

$$\varphi_{\varepsilon_j}^{\circ}(x) = \frac{b_j}{2} \left\{ 1 - \frac{g^j(\varphi_{\varepsilon}^{\circ}(x))}{\sqrt{[g^j(\varphi_{\varepsilon}^{\circ}(x))]^2 + \frac{4\varepsilon^2}{n^2 \mu^2(R) b_j^2}}} \right\} \quad (j=1, \dots, n); \quad (23)$$

$$\eta_{\varepsilon_j}^{\circ}(x) = - \frac{b_j \varepsilon}{2n\mu(R) \sqrt{[g^j(\varphi_{\varepsilon}^{\circ}(x))]^2 + \frac{4\varepsilon^2}{n^2 \mu^2(R) b_j^2}}} \quad (j=1, \dots, n). \quad (24)$$

Из вида операторов в правых частях (23) и (24) следует их гладкость, если градиент $g(\varphi)$ функционала $V(\varphi)$ в задаче III гладкий. Кроме того, поскольку операторы в (23) и (24) не зависят от $\eta(x)$, то для дальнейших исследований можно ограничиться использованием лишь оператора в правой части (23).

Второе из этих направлений основано на рассмотрении специального класса функций, являющихся наилучшим в некотором смысле приближением для оператора Φ . Этот класс может быть построен путем использования специальных функций.

