О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С УРАВНЕНИЯМИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

В.П.Гуленко, Ю.М.Ермольев
(г. Киев)

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Лапласа:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \ , \ u\big|_{\Gamma} = v(s) \ ; \tag{1}$$

$$a \leqslant v(s) \leqslant b \quad . \tag{2}$$

Требуется среди всех гармонических внутри области G функций указанного вида и непрерывно примыкающих к граничным значениям в точках непрерывности последних выбрать такую, которая бы доставила минимум функционалу

$$\Phi = \iint\limits_{G} f(x, y, u(x,y))\,dx\,dy \ , \tag{3}$$

где f непрерывно-дифференцируема по u и непрерывна по x и y .

Постановки задач такого рода имеются у Бутковского [1] . К задаче вида (1)-(3) приводят задачи стационарного теплового поля, потенциального течения жидкости, электрического поля стационарных зарядов, электрического поля стационарного тока [6].

Будем предполагать, что оптимальное управление $\bar{v}(s)$ поставленной задачи имеет конечное число точек разрыва непрерывности. Тогда решение $\bar{u}(x,y)$ задачи (1) единственно [6]. Ограниченность решения задачи Дирихле (1), соответствующего любому кусочно-непрерывному управлению, вытекает из известного принципа максимума для гармонических функций [4].

Пусть вторая производная f_{uu} ограничена в области $G\times[a,b]$. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема. Если $\bar{v}(s)$ реализует минимум функционала Φ, то функция $\frac{\partial\bar{\lambda}}{\partial n}(s)\cdot v(s)$, $s\in\Gamma$ при $v(s)=\bar{v}(s)$ достигает максимума, где функция $\bar{\lambda}(x,y)$ является решением следующей задачи Дирихле для уравнения Пуассона:

$$\Delta\bar{\lambda}=-\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_{(x,y,\bar{u}(x,y))},\ \bar{\lambda}\Big|_{\Gamma}=0 \qquad (4)$$

(нормаль n – внешняя).

Доказательство. Дадим оптимальному управлению $\bar{v}(s)$ произвольное допустимое конечное приращение $\delta v(s)$ и рассмотрим управление $\bar{v}(s)+\varepsilon\delta v(s)$, $0<\varepsilon\leqslant 1$, являющееся допустимым для любого $0<\varepsilon\leqslant 1$.

Соответствующее ему решение задачи (1) обозначим $\bar{u}(x,y)+\varepsilon\delta u(x,y)$. Ясно, что функция $\delta u(x,y)$ является решением задачи Дирихле для уравнения Лапласа:

$$\Delta\delta u(x,y)=0,\ \delta u\Big|_{\Gamma}=\delta v(s). \qquad (5)$$

С учетом вышесказанного и того, что функция $\bar{\lambda}(x,y)$ является решением задачи (4), по формуле Грина находим:

$$0=\iint_G\bar{\lambda}\cdot\Delta\delta u\,dx\,dy=\iint_G\Delta\bar{\lambda}\cdot\delta u\,dx\,dy+\int_\Gamma\bar{\lambda}\cdot\frac{\partial\delta u}{\partial n}ds- \qquad (6)$$
$$-\int_\Gamma\delta u\,\frac{\partial\bar{\lambda}}{\partial n}ds=-\iint_G\frac{\partial f}{\partial u}\delta u\,dx\,dy-\int_\Gamma\frac{\partial\bar{\lambda}}{\partial n}\delta v\,ds.$$

Из соотношения (6) и разложения функции $\psi(\varepsilon) = f\,(x, y, \bar{u} + \varepsilon\delta u)$ в окрестности точки $\varepsilon = 0$ получаем выражение для приращения функционала Φ в виде

$$\delta\Phi = -\varepsilon \int_{\Gamma} \frac{\partial\bar{\lambda}}{\partial n}(s)\,\delta v(s)\,ds + \varepsilon^2 K\,, \qquad (7)$$

где

$$K = \frac{1}{2} \iint_{G} \eta(x,y)(\delta u(x,y))^2\,dx\,dy. \qquad (8)$$

В силу принципа максимума для гармонических функций величина $\max\limits_{(x,y)\in G} |\delta u(x,y)| \leq$ $\leq \max\limits_{s\in\Gamma} |\delta v(s)| \leq b - a$, а величина $|\eta(x,y)| \leq L$. Поэтому для величины K получается оценка:

$$|K| \leq \frac{L}{2}\, mes\, G\,(b-a)^2\,,$$

благодаря чему из (7) легко следует утверждение теоремы.

Для линейной по переменной u функции f сформулированное выше необходимое условие оптимальности является также и достаточным, так как в этом случае $f_{uu} = 0$.

Пример. Минимизировать $\iint\limits_G x \cdot u(x,y)\,dx\,dy$, $\Delta u = 0$, $u|_{\Gamma} = v(s)$, $|v(s)| \leq 1$; Γ – окружность $x^2 + y^2 = 1$. Найдем решение $\bar{\lambda}(x,y)$ задачи Дирихле для уравнения Пуассона $\Delta\bar{\lambda} = -x$; $\bar{\lambda}|_{\Gamma} = 0$ с помощью функции Грина $G(x_0, y_0, x, y) = \ln \frac{\rho_0 \cdot r_1}{r}$:

$$\bar{\lambda}(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \iint_{G} x \cdot \ln \frac{\rho_0\, r_1}{r}\,dx\,dy.$$

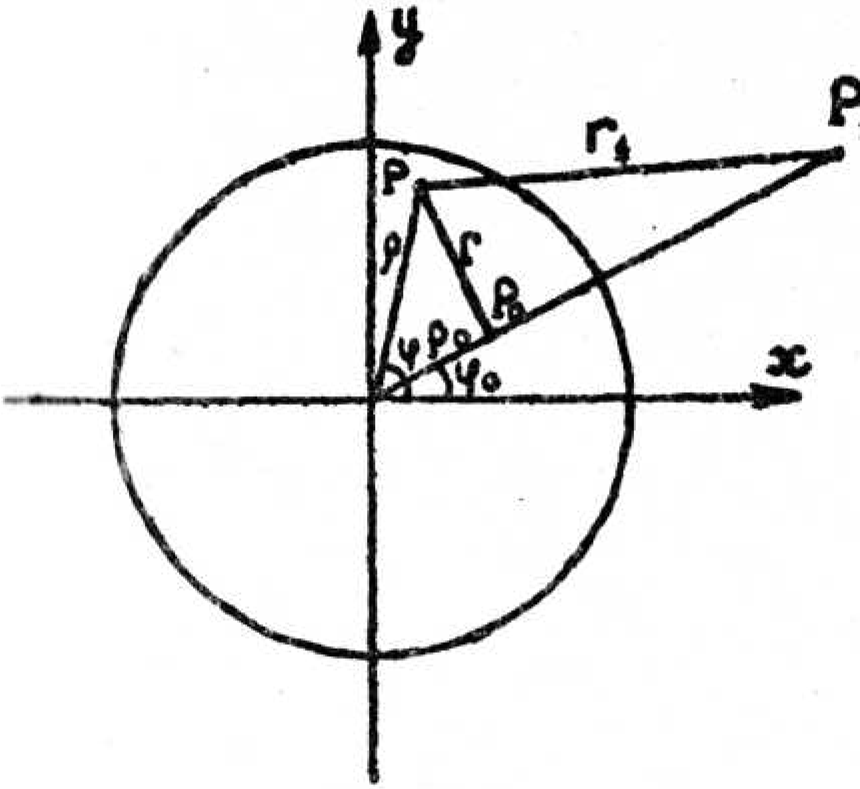

Рис.1.

Переходя к полярным координатам $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, получим

$$\bar\lambda(\rho_0,\varphi_0)=\frac{1}{4\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}\rho^2\cos\varphi\,\ln\frac{\rho^2\rho_0^2+1-2\rho\rho_0\cos(\varphi-\varphi_0)}{\rho^2+\rho_0^2-2\rho\rho_0\cos(\varphi-\varphi_0)}\,d\rho\,d\varphi.$$

Найдем нужную нам величину

$$\left.\frac{\partial\bar\lambda(\rho_0,\varphi_0)}{\partial\rho_0}\right|_{\rho_0=1}=\frac{1}{2\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}\frac{\rho^2(\rho^2-1)\cos\varphi}{1+\rho^2-2\rho\cos(\varphi-\varphi_0)}\,d\rho\,d\varphi=-\frac{\cos\varphi_0}{4}.$$

Согласно доказанному выше принципу оптимальное управление ищется из условия $\max\limits_{s\in\Gamma}\left\{\frac{\partial\bar\lambda}{\partial n}(s)\cdot v(s)\right\}$, т.е. из условия $\min\limits_{0\le\varphi_0\le2\pi}\{\cos\varphi_0\cdot v(\varphi_0)\}$. Таким образом,

$$\bar v(s)=\begin{cases}-1 & \text{на правой полуокружности,}\\ 1 & \text{на левой полуокружности.}\end{cases}$$

Соответствующее ему $\bar u(x,y)$ находим, используя интеграл Пуассона для круга и тот факт, что для $0<\rho<1$

$$\int\frac{d\theta}{1+\rho^2-2\rho\cos\theta}=\frac{1}{1-\rho^2}\left[\theta+2\operatorname{arctg}\frac{\rho\sin\theta}{1-\rho\cos\theta}\right]+C.$$

После несложных вычислений находим, что

$\bar{u}(\rho_0,\varphi_0) = -\frac{2}{\pi}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2\rho_0\cos\varphi}{1-\rho_0^2}$. Это решение непрерывно примыкает к граничным значениям в точках непрерывности последних.

С целью получения численного метода решения задачи (1)-(3) разобьем границу области Γ на n частей точками $s=0$, s_1 , ... , s_n и будем искать оптимальное управление в классе кусочно-постоянных управлений, точками разрыва которых и являются эти точки s_i , $i=0,1,\dots,n-1$. Обозначим произвольное допустимое такое управление через v_0 , v_1 , ... , v_{n-1} .

В силу (1) функционал (3) является некоторой функцией φ переменных v_0 , v_1 , ... , v_{n-1} . Из соотношения (6) находим выражение для дифференциала функции φ :

$$d\varphi(v_0,v_1,\dots,v_{n-1}) = \iint_G \frac{\partial f}{\partial u}\,\delta u\,dx\,dy = -\int_\Gamma \frac{\partial \lambda}{\partial n}\,\delta v\,ds = -\sum_{i=0}^{n-1}\Big(\int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{\partial \lambda}{\partial n}(s)\,ds\Big)\,dv_i .$$

Таким образом, градиент этой функции имеет вид:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v_i} = -\int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{\partial \lambda}{\partial n}(s)\,ds \quad , \quad i=0,1,\dots,n-1 . \qquad (9)$$

Тогда алгоритм решения задачи будет состоять в следующем. Пусть на s -м шаге получено приближение $v_0^{(s)}$, $v_1^{(s)}$, ... , $v_{n-1}^{(s)}$.

1. Находим соответствующее решение уравнения (1) $u^{(s)}(x,y)$.

2. По нему отыскиваем функцию $\lambda^{(s)}(x,y)$ из уравнения (4), а затем находим $\left.\frac{\partial \lambda^{(s)}}{\partial n}\right|_\Gamma$.

3. Вычисляем градиент функции φ согласно формул (9).

4. Новое улучшенное управление ищем по формуле

$$v_i^{(s+1)} = v_i^{(s)} + \rho_s\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v_i}\right)_{(\{v_j^{(s)}\})} ,$$

где ρ_s – величина шага спуска. Шаг спуска может выбираться различными способами. В зависимости от выбора шага возможны различные модификации градиентного метода. Об этом читатель может прочесть в статье [3].

Если класс управлений $\vartheta(s)$ задан параметрически в виде

$$\vartheta(s) = \alpha(s, a_1, \ldots, a_r), \tag{10}$$

где α – известная дифференцируемая функция своих параметров, то функция φ является функцией параметров $a_1, a_2, \ldots, a_r$, на которые могут быть наложены ограничения. Для дифференциала этой функции нетрудно получить выражение:

$$d\varphi(a_1, a_2, \ldots, a_r) = -\sum_{i=1}^{r}\left\{\int_{\Gamma} \frac{\partial\lambda}{\partial n}\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial a_i}\right\} da_i . \tag{11}$$

Вышеописанный алгоритм несущественно изменяется в случае применения к этой задаче.

Рассматриваемая здесь методика может быть применена к задачам наилучшего в каком-то смысле приближения заданной функции гармоническими функциями из заданного класса.

Заметим, что предлагаемая методика применима и для уравнений вида $\Delta u + a u = 0$, $u|_\Gamma = \vartheta(s)$, которыми описываются задачи установившихся колебаний, задачи диффузии и др. При этом функционалы (3) могут быть и более сложной природы.

Литература

1. А.Г.Бутковский, Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами, изд-во „Наука", М., 1965.

2. Ю.М.Волин, Г.М.Островский, О методе последовательных приближений расчета оптимальных режимов некоторых систем с распределенными параметрами, журн. „Автоматика и телемеханика", №7, 1965.

3. Ю.М.Ермольев, Методы решения нелинейных экстремальных задач, журн. „Кибернетика", №4, 1966.

4. И.Г.Петровский, Лекции об уравнениях с частными производными, Физматгиз, М., 1961.

5. Л.С.Понтрягин, В.Г.Болтянский, Р.В.Гамкрелидзе, Е.Ф.Мищенко, Математическая теория оптимальных процессов, Физматгиз, М., 1961.

6. А.Н.Тихонов, А.А.Самарский, Уравнения математической физики, изд-во „Наука", М., 1966.

7. Ф.Трикоми, Лекции по уравнению в частных производных, ИЛ, 1957.

Доложено на семинаре 12.Х 1968 г.