

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ РАСПРЕДЕЛИТЕЛЬНОГО ТИПА МЕТОДОМ ОБОБЩЕННОГО ГРАДИЕНТНОГО СПУСКА

Г.И.Горбач, Н.З.Шор
(г. Киев)

В Институте кибернетики АН УССР широко используется метод обобщенного градиентного спуска для решения распределительных задач линейного программирования с матрицами больших размеров. Его основные особенности:

- 1) метод удобен для программирования на ЭВМ;
- 2) рабочие массивы имеют небольшие размеры, что позволяет размещать их в оперативной памяти ЭВМ вместе с основной программой;
- 3) число итераций, необходимых для получения решения с заданной точностью, слабо зависит от объема задачи. Это свойство делает данный метод конкурентноспособным по времени счета для больших задач по сравнению с методами, приводящими к решению за конечное число шагов.

Описанный ниже метод для решения задач распределительного типа может рассматриваться как частный случай метода для решения задач блочного программирования, описанного в [1].

Рассмотрим задачу следующего вида.

Найти

$$\min \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} \quad (1)$$

при ограничениях

$$\sum_i x_{ij} \geq B_j \quad ; \quad (2)$$

$$\sum_j k_{ij}^{(\alpha)} x_{ij} \leq T_i^{(\alpha)} \quad ; \quad (3)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad . \quad (4)$$

Перейдем к вспомогательной задаче.
Найти

$$\min \left(\sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i,\alpha} u_i^{(\alpha)} (T_i^{(\alpha)} - \sum_j k_{ij}^{(\alpha)} x_{ij}) \right) \quad (5)$$

при ограничениях

$$\sum_i x_{ij} \geq B_j \quad , \quad (6)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad . \quad (7)$$

Эта задача имеет тривиальное решение

$$x_{i^*(j),j} = B_j \quad , \quad (8)$$

$$x_{ij} = 0 \quad , \quad i \neq i^* \quad ,$$

где $i^*(j)$ — один из индексов, на котором достигается

$$\min_i [c_{ij} + \sum_{\alpha} k_{ij}^{(\alpha)} u_i^{(\alpha)}] \quad .$$

В соответствии с работой [1] получаем следующий алгоритм определения оптимальных значений $\{u_i^{*(\alpha)}\}$ двойственной задачи:

1) рассматриваются произвольные начальные значения

$$u^0 = \{u_{i\alpha}^{(0)}\}; \quad u_{i\alpha}^{(0)} = 0;$$

2) последовательность $u^{(r)} = \{u_{i\alpha}^{(r)}\}$ вычисляется по следующим рекуррентным формулам:

$$u_{i\alpha}^{(r+1)} = \begin{cases} u_{i\alpha}^{(r)} + h_r \Delta_{i\alpha}, & \text{если } u_{i\alpha}^{(r)} + h_r \Delta_{i\alpha} \geq 0, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (9)$$

$$\Delta_{i\alpha} = T_i^{(\alpha)} - \sum k_{ij}^{(\alpha)} x_{ij}^{(r)} \quad (10)$$

получается как решение вспомогательной задачи (5-7) при $u_{i\alpha} = u_{i\alpha}^{(r)}$.

Из работы [2] вытекает, что последовательности $\{u_{i\alpha}^{(r)}\}$ сходятся к оптимальным значениям $\{u_{i\alpha}^*\}$ со скоростью геометрической прогрессии, если h_0 выбирается достаточно большим и последовательность $\{h_r\}$ вычисляется по формулам

$$h_{r+1} = h_r (1 - \delta),$$

где δ — достаточно малое положительное число.

Однако этот метод в чистом виде не дает нам одновременно решения прямой задачи (1-4). Для получения приближенного решения этой задачи применяется так называемая процедура ε -сглаживания (ε — заданное положительное число), которая сводится к тому, что вместо формул (8) применяются следующие формулы:

$$x_{ij} = P_{ij} B_j, \quad (11)$$

где
$$P_{ij} = \frac{\alpha_{ij}}{\sum \alpha_{ij}} ; \quad (12)$$

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } (c_{ij} + \sum_{\alpha} k_{ij}^{(\alpha)} u_{i\alpha}) - v_j > \varepsilon, \\ \varepsilon - [(c_{ij} + \sum_{\alpha} k_{ij}^{(\alpha)} u_{i\alpha}) - v_j]; & \end{cases} \quad (13)$$

в противном случае:

$$v_j = \min_i [c_{ij} + \sum_{\alpha} k_{ij}^{(\alpha)} u_{i\alpha}] . \quad (14)$$

Метод опробован на задачах по оптимальной загрузке прокатных станов. Эта работа выполнена в отделе экономической кибернетики ИК АН УССР в течение 1963-1967 гг. в содружестве с ВНИИОЧЕРМЕТОм г. Харькова.

Для формировки задачи приняты такие обозначения.

Имеется m прокатных станов (индекс стана $i = 1, \dots, m$). На всех станах производится π видов прокатной продукции ($k = 1, \dots, \pi$). На каждом из них производится часть всех видов продукции, в соответствии со специализацией каждого стана. Вся готовая продукция отправляется r потребителям (индекс потребителя $j = 1, \dots, r$).

$P_{ik} \frac{\text{тонн}}{\text{час}}$ - часовая производительность i -го стана при прокатке k -го вида продукции;

$t_{ik} = \frac{1}{P_{ik}}$ - удельное время, т.е. время, необходимое для изготовления 1 тонны k -го вида продукции на i -м стане;

B_i - план производства в тоннах всех видов продукции на i -м стане;

T_i - рабочее время в часах для планируемого периода;

$E_{i\alpha}$ - ограничение к плану производства некоторых видов продукции на i -м стане;

M_{jk} - заявки j -го района на k -й вид продукции;
 c_{ij} - расстояние (себестоимость перевозок) от i -го стана к j -му району потребления;
 c'_{ik} - расходы по пределу, приходящиеся на 1 тонну k -го вида продукции на i -м стане.

Задачу оптимального распределения заказов между прокатными станами можно ставить различными способами в зависимости от выбранного критерия и типа ограничений.

а). Критерий - минимизация объема (себестоимости) транспортных перевозок при ограничениях на план производства в тоннах B_i и горячее время T_i на каждом стане. Необходимо разместить заказы районов-потребителей между прокатными станами, учитывая удельное время (t_{ik}) обработки k -го вида продукции на i -м стане.

$$\sum_j \sum_k t_{ik} x_{ijk} \leq T_i, \quad i = 1, \dots, m; \quad (15)$$

$$\sum_j \sum_k x_{ijk} \leq B_i, \quad i = 1, \dots, m; \quad (16)$$

$$\sum_i x_{ijk} = M_{jk}, \quad j = 1, \dots, r; \quad k = 1, \dots, n; \quad (17)$$

$$x_{ijk} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, r, \quad k = 1, \dots, n; \quad (18)$$

найти

$$\min \sum_i \sum_j \sum_k c_{ij} x_{ijk}. \quad (19)$$

б). Критерий - учитывает, кроме транспортных издержек, себестоимость производства на станах. Ограничения - на горячее время на станах.

$$\sum_j \sum_k t_{ik} x_{ijk} \leq T_i; \quad (20)$$

$$\sum_i x_{ijk} = M_{jk}; \quad (21)$$

$$x_{ijk} \geq 0 \quad (22)$$

найти

$$\min \left[\sum_i c'_i \left(\sum_j \sum_k t_{ik} x_{ijk} \right) + \sum_i \sum_j \sum_k c_{ij} x_{ijk} \right] \quad (23)$$

в). Критерий – как и в задаче а). Даны ограничения на план каждого стана в тоннах и ограничения на план производства для некоторых выделенных сортов проката.

$$x_{ijk} \geq 0 ; \quad (24)$$

$$\sum_j \sum_k x_{ijk} \leq B_i, \quad i = 1, \dots, m; \quad (25)$$

$$\sum_i x_{ijk} = M_{jk}, \quad j = 1, \dots, r, \quad k = 1, \dots, n; \quad (26)$$

$$\sum_j \sum_k r_{ik\alpha} x_{ijk} \leq E_{i\alpha}, \quad (27)$$

где $r_{ik\alpha} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$ – технологический коэффициент;
 α – тип ограничений.

Если в формулировках задач (а, б, в) вместо пары индексов (j, k) применить один индекс j, то мы приходим к задачам типа (1-4). Отсюда получают следующие алгоритмы решения вышеприведенных задач по методу обобщенного градиентного спуска со сглаживанием.

Описание алгоритма решения задачи типа (а)

Переходим к двойственной задаче:

найти

$$\max \left(\sum_j \sum_k M_{jk} \lambda_{jk} - \sum_i T_i v_i - \sum_i B_i u_i \right) \quad (28)$$

при условии

$$\lambda_{jk} - t_{ik} v_i - u_i \leq c_{ij} \quad (29)$$

Отсюда в оптимальном плане:

$$\lambda_{jk} = \min_i (c_{ij} + t_{ik} v_i + u_i) \quad ; \quad (30)$$

u_i, v_i, λ_{jk} - новые переменные двойственной задачи. Начальные значения переменных u_i, v_i выбираются равными 0. ε - выбирается равной

$$\approx 1\% \max_{i,j} c_{ij}$$

Начальное значение коэффициента h рекомендуется выбирать в зависимости от исходных данных по формуле, полученной эмпирическим путем,

$$h_0 = \frac{20 \cdot \max c_{ij} \cdot m}{S \cdot \sum B_i} \quad , \quad (31)$$

S - количество итераций при постоянном шаге.

Вычисляем

$$q_{ijk} = c_{ij} + t_{ik} v_i + u_i \quad (32)$$

Определяем

$$\lambda_{jk} = \min_i (c_{ij} + t_{ik} v_i + u_i) \quad (33)$$

Находим отклонения от минимального элемента

$$q_{ijk} - \lambda_{jk} = \alpha_{ijk} \quad , \quad i = 1, \dots, m \quad (34)$$

Если полученное отклонение больше выбранного отклонения ε , тогда засылаем 0 вместо полученного результата.

Проверка этого условия:

$$\alpha_{ijk} = \varepsilon - \alpha_{ijk} = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha_{ijk} \leq 0 ; \\ \alpha_{ijk}, & \text{если } \alpha_{ijk} > 0 . \end{cases} \quad (35)$$

Определяем P_{ijk} по формуле

$$P_{ijk} = \frac{\alpha_{ijk}}{\sum_l \alpha_{ijk}} \quad (36)$$

Величина P_{ijk} представляет ту часть заказа, которая будет прикрепляться к i -му стану, а величина заказа равна $M_{jk} \cdot P_{ijk}$. Это и есть текущие значения x_{ijk} , т.е. значения неизвестных в прямой задаче, полученные на данном шаге вычислений.

Определяем величину разбалансов:

$$B_i - \sum_j M_{jk} P_{ijk} = B_i' ; \quad (37)$$

$$T_i - \sum_{j,k} M_{jk} P_{ijk} t_{ik} = T_i' . \quad (38)$$

В конце итерации по станам получаем разбалансы в тоннах B_i' и по времени T_i' . Если станы перегружены, соответствующие значения разбалансов имеют отрицательный знак; недогруженные - положительные значения разбалансов.

Потенциалы перегруженных станом повышаем пропорционально полученным разбалансам; потенциалы недогруженных - понижаем по каждому из типов ограничений.

Изменение потенциалов проводим по следующей формуле:

$$u_i^0 - h B_i' = \begin{cases} 0, & \text{если } u_i \leq 0, \\ u_i', & \text{если } u_i > 0; \end{cases} \quad (39)$$

$$v_i^0 - h T_i' \left(\frac{B_i}{T_i} \right)^2 = \begin{cases} 0, & \text{если } v_i^1 \leq 0, \\ v_i^1, & \text{если } v_i^1 > 0. \end{cases} \quad (40)$$

После каждой итерации h умножается на (1-б) либо после определенного числа итераций с постоянным h - коэффициент измельчается (уменьшается в два раза).

Задача б является упрощенной модификацией задачи а, поэтому алгоритм решения задачи б получается из алгоритма решения задачи а путем очевидных упрощений.

Описание алгоритма решения задачи(в)

Запишем двойственную задачу:

найти

$$\max \left[\sum_j \sum_k M_{jk} \lambda_{jk} - \sum_i B_i u_i - \sum_i \sum_d E_{id} v_{id} \right] \quad (41)$$

при условии

$$\lambda_{jk} - u_i - \sum_d r_{ikd} v_{id} \leq c_{ij}, \quad u_i \geq 0, \quad (42)$$

В оптимальном случае:

$$\lambda_{jk} = \min_i (c_{ij} + u_i + \sum_d r_{ikd} v_{id}). \quad (43)$$

Краткое описание алгоритма:

1. $q_{ijk} = c_{ij} + u_i + \sum_d r_{ikd} v_{id}$.
2. $\lambda_{jk} = \min_i (c_{ij} + u_i + \sum_d r_{ikd} v_{id})$.
3. $\alpha_{ijk} = q_{ijk} - \lambda_{jk}$.
4. $\max(0, \epsilon - \alpha_{ijk}) = \alpha_{ijk}$.
5. $p_{ijk} = \alpha_{ijk} / \sum_i \alpha_{ijk}$.
6. $B_i - \sum_j M_{jk} p_{ijk} = B'_i$; $E_{id} - \sum_{j,k} M_{jk} p_{ijk} r_{ikd} = E'_{id}$.
7. $u_i^{s+1} = u_i^s - h B'_i = \begin{cases} 0, & \text{если } u_i^{s+1} \leq 0, \\ u_i^{s+1}, & \text{если } u_i^{s+1} > 0. \end{cases}$
 $v_{id}^{s+1} = v_{id}^s - h_1 E'_{id} = \begin{cases} 0, & \text{если } v_{id}^{s+1} \leq 0, \\ v_{id}^{s+1}, & \text{если } v_{id}^{s+1} > 0. \end{cases}$

Кроме вышеперечисленных задач, решались задачи на максимум выпуска продукции в заданном соотношении или на минимум времени, необходимого для производства заданного количества продукции. Вторая из этих задач формулируется следующим образом:

$$\sum_i x_{ik} \geq M_k, \quad k = 1, \dots, n; \quad (44)$$

$$\sum_j t_{ij} x_{ij} = \theta T_i, \quad i = 1, \dots, m; \quad (45)$$

$$x_{ik} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, k = 1, \dots, n. \quad (46)$$

Найти

$$Z = \min \theta. \quad (47)$$

Обозначим через

$$y_{ik} = \frac{x_{ik}}{M_k} \quad (49)$$

Тогда задача (47) примет вид:

$$y_{ik} \geq 0 \quad ; \quad (49)$$

$$\sum_i y_{ik} = 1 \quad , \quad k = 1, \dots, n. \quad (50)$$

$$\sum_k \frac{t_{ik} M_k}{T_i} y_{ik} \geq \theta \quad , \quad (51)$$

$$Z = \min \theta .$$

Построим двойственную задачу:
найти

$$L = \max \left(\sum_k v_k \right) \quad (52)$$

при ограничениях

$$v_k - \frac{t_{ik} M_k}{T_i} u_i \leq 0 \quad ; \quad (53)$$

$$\sum_i u_i = 1 \quad . \quad (54)$$

В двойственной задаче переменные u_i и v_k называются потенциалами. Для решения такой задачи применяется метод обобщенного градиентного спуска в пространстве потенциалов u_i и v_k . Из неравенства (53) получаем:

$$v_k \leq \frac{t_{ik} M_k}{T_i} u_i \quad ,$$

отсюда

$$v_k = \min_i \frac{t_{ik} M_k}{T_i} u_i \quad (55)$$

Начальные значения потенциалов U_i^0 выбираем равными между собой так, чтобы выполнялось условие (54). Опыт вычислений показал, что лучшими являются

$$U_1^0 = U_2^0 = \dots = U_m^0 = \frac{1}{m}.$$

При фиксированном k определяем

$$\lambda_{ik} = \frac{M_k t_{ik}}{T_i} U_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

Находим

$$v_k = \min_i \frac{M_k t_{ik}}{T_i} U_i.$$

Определяем область сглаживания:

$$\begin{aligned} \varepsilon_k &= 0,03 v_k, \\ \varepsilon_k - \lambda_{ik} &= \Delta \varepsilon_{ik}. \end{aligned}$$

Вычисляем

$$P_{ik} = \frac{\Delta \varepsilon_{ik}}{\sum_k \Delta \varepsilon_{ik}}.$$

Находим

$$r_k = \frac{M_k t_{ik}}{T_i} P_{ik}.$$

Распространяя суммирование по всем k , получаем значение

$$\alpha_i = \sum_k \frac{M_k t_{ik}}{T_i} P_{ik}.$$

Находим среднее арифметическое по всем станам:

$$R^m = \frac{1}{m} \sum_i \sum_k \frac{M_k t_{ik}}{T_i} P_{ik}.$$

Определяем величину отклонения на каждом стане от среднего арифметического:

$$\Delta \alpha_i = \sum_k \frac{M_k t_{ik}}{T_i} P_{ik} - R^m.$$

Изменение потенциалов проводим по формуле

$$\Delta u_i = h \Delta \alpha_i ,$$
$$u_i^{s+1} = u_i^s (1 + \Delta u_i) ,$$

где s - число итераций. После определенного числа итераций h уменьшается в два раза. Значение целевой функции θ равно обратному значению среднего арифметического;

а) $u_0 < 1$ - в этом случае можно не только разместить все заказы на станах, но и получить дополнительную продукцию в том же сортаменте;

б) $u_0 = 1$ - в этом случае можно разместить все заказы, но дополнительную продукцию получить нельзя;

в) $u_0 > 1$ - разместить все заказы в этом случае нельзя, но точно известно, на сколько надо уменьшить значения M_k , чтобы можно было разместить на станах все заказы в планируемый период.

Для решения задач а, б и в, а также задачи (44-47) в отделе экономической кибернетики ИК АН УССР разработаны стандартные программы для ЭВМ М-20. С помощью этих программ проведены многочисленные экспериментальные расчеты по оптимальной загрузке прокатных станков. Максимальный объем решенных задач типа а): 8000 заказов, 116 районов потребления, 50 прокатных станков. Время счета этой задачи - 26 час., количество итераций - 500.

Аналогичные стандартные программы разработаны ВНИИОЧЕРМЕТОМ для ЭВМ „Минск-22“. С помощью этих программ в конце 1967 г. было проведено внедрение планирования оптимальной загрузки для проволочных станков в „Союзглавметалле“.

В ИК АН УССР на ЭВМ М-20 осуществлена большая серия расчетов по оптимальному распределению флота по видам перевозок и линиям движения, многие из которых внедрены в практику работы судоходства в Днепровском бассейне.

