УДК 519.8

Э.И. НЕНАХОВ

# НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ О НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧКАХ

*Изложены результаты исследования по усилению теоремы Брауэра. Элементарными средствами осуществляется доказательство уточненных теорем. Это приводит к расширению класса точечно - точечных отображений, обладающих неподвижными точками.*



Пусть $X$ – некоторое множество, и $f(x)$: $X \to X$ – отображение множества $X$ в $X$. Та особая точка $x^*$, которая переходит снова в $x^*$, называется неподвижной точкой отображения $f$. Факт существования неподвижной точки существенно зависит от топологической природы множества $X$ и отображения $f$. Весьма сильная теорема существования неподвижных точек была получена Брауэром в начале прошлого века, в период, когда топология еще только формировалась. Этой теоремой утверждается существование неподвижной точки в случае, когда $X$ – компактное выпуклое множество, а отображение $f$ непрерывно. Теореме Брауэра позднее была придана более полезная формулировка, что не только открыло возможность многочисленных приложений к экономической теории и родственным вопросам, но и стимулировало дальнейшие исследования.

Для установления теоремы существования неподвижной точки отображения, определенного на выпуклом множестве, обычно осуществляется переход от этого множества к специальной конечной $\varepsilon$- сети, в которой затем некоторым образом выбирается приближение неподвижной точки, например, с помощью леммы Шпернера, теоремы Хансена - Скарфа.

Для случая, когда непрерывное точечно-точечное отображение действует из сферы в шар, ограниченный этой сферой, усиление теоремы Брауэра установлено неэлементарными и неконструктивными методами в [1].

В данной работе приводятся уточненные теоремы о неподвижных точках, которые доказываются известными методами лишь за счет некоторого усиления аргументации. Вначале теорема Брауэра будет рассматриваться не для произвольных выпуклых множеств из $R^n$, а для симплексов, построенных на заданных линейно независимых векторах $x_i$, $i=\overline{1, m}$.

Обозначим $\Omega=\left\{x_1, x_2, \ldots, x_m\right\}$, $S_m(\Omega)=\left\{x=\sum\limits_{i=1}^{m} \xi_i x_i : \sum\limits_{i=1}^{m} \xi_i=1, \xi_i \geq 0\right\}$.

Пусть $\Omega_1, \ldots, \Omega_l$ – конечные подмножества $S_m(\Omega)$, каждое из которых содержит $m$ линейно независимых векторов.

**Определение.** Симплексы $S_m(\Omega_1), \ldots, S_m(\Omega_l)$ являются подразделением симплекса $S_m(\Omega)$, если выполнены следующие условия :

1. $\bigcup\limits_{i=1}^{l} S_m(\Omega_i)=S_m(\Omega)$.

2. Точка, являющаяся вершиной одного из симплексов подразделения, есть также вершина всех симплексов подразделения, которым эта точка принадлежит.

3. Общие точки любых двух симплексов подразделения, не являющиеся их вершинами, принадлежат их общим граням.

Далее будет использоваться процедура допустимого помечивания целыми числами от 1 до $m$ точек множества по следующим правилам :

1) вершина $x_i$ исходного симплекса помечается числом $i$ ;

2) каждая точка $x$, не принадлежащая грани симплекса $S_m(\Omega)$, помечается произвольно;

3) пометка каждой точки $x$, принадлежащей грани симплекса $S_m(\Omega)$, выбирается произвольно, но из множества пометок вершин этой грани.

**Лемма 1** [2]**.** Какое бы ни было $\varepsilon>0$, существует целое число $I_\varepsilon$ и конечные подмножества $\Omega_{i\varepsilon} \subset S_m(\Omega)$, $i=\overline{1, I_\varepsilon}$, содержащие $m$ линейно независимых векторов, такие, что симплексы $S_m(\Omega_{i\varepsilon})$ есть подразделение симплекса $S_m(\Omega)$ и $\rho\left(x_{j'}, x_{j''}\right) \leq \varepsilon$, $\forall x_{j'}, x_{j''} \in \Omega_{i\varepsilon}$, $i=\overline{1, I_\varepsilon}$.

В дальнейшем будет рассматриваться стандартный симплекс

$$S_n=\left\{x \in R_+^n : \sum_{i=1}^{n} \xi_i=1\right\}.$$

**Теорема 1 ( теорема Брауэра ).** Пусть точечно - точечное отображение $f(x)=\left(\varphi_1(x), \dots ,\varphi_n(x)\right): S_n \to S_n$ непрерывно. Тогда существует точка $x^* \in S_n$, такая, что $x^* = f(x^*)$.

**Доказательство.** Возьмем $\varepsilon = 1/k$ ($k -$ целое). В соответствии с леммой 1 существует целое число $I_\varepsilon$ и подмножества $\Omega_{i\,\varepsilon} \subset S_n$, такие, что расстояние между любыми двумя вершинами симплексов $S_m(\Omega_{i\,\varepsilon})$ не превышает $\varepsilon$ и симплексы $S_m(\Omega_{i\,\varepsilon})$ есть подразделение симплекса $S_n$. Пусть $\omega_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^{I_\varepsilon} \Omega_{i\,\varepsilon}$ и $x \in \omega_\varepsilon$. Пометим точку $x$ целым числом $j(x)=\min\left\{j \,\middle|\, \varphi_j(x) \le \xi_j,\ \xi_j > 0\right\}$.

Очевидно, что для $x$ пометка $j(x)$ существует. Так как лишь $i$ - я координата вершины $x_i = l_i$ симплекса $S_n$ отлична от нуля, то вершина $x_i$ получает пометку $i$. В силу этого каждая точка $x$, принадлежащая грани симплекса $S_n$, получит пометку одной из вершин этой грани.

Таким образом, помечивание точек $x$ множества $\omega_\varepsilon$ числами $j(x)$ - допустимо. Поэтому по лемме Шпернера существует симплекс подразделения, вершины которого имеют все пометки от 1 до $n$. Вершину этого симплекса, имеющую пометку $j$, обозначим $x^{j_k} = \left(\xi_1^{j_k}, \dots, \xi_n^{j_k}\right)$. Так как $\rho\left(x^{j'k}, x^{j''k}\right) \le 1/k$, то можно считать, что $\lim\limits_{k \to \infty} x^{j\,k} = x^*$, $\forall j$. В силу выбранного правила помечивания справедливы неравенства

$$\varphi_j(x^{j_k}) \le \xi_j^{j_k},\ j = \overline{1,n}\ . \tag{1}$$

Переходя в неравенствах (1) к пределу и учитывая непрерывность отображения $f(x)$, получаем

$$\varphi_j(x^*) \le \xi_j^*,\ j = \overline{1,n}\ . \tag{2}$$

Так как сумма левых частей неравенств (2) равна 1 и сумма правых частей этих неравенств также равна 1, то в (2) строгое неравенство невозможно, т.е. $\varphi_j(x^*) = \xi_j^*$, $j = \overline{1,n}$, или $x^* = f(x^*)$.

**Примечание.** Так как увеличением размерности пространства на единицу можно от телесного симплекса $D_n = \left\{x \in R_+^n : \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j \le 1\right\}$ перейти к стандартному симлексу $S_{n+1}$ в $R^{n+1}$, то теорема 1 верна также и для $D_n$. Кроме того, в формулировке этой теоремы $S_n$ можно заменить на $S_m(\Omega)$.

**Теорема 2.** Пусть непрерывное точечно-точечное отображение $f(x) = (\varphi_1(x),...,\varphi_n(x)):\ D_n \to R_+^n$ такое, что $f(x) \in D_n$, $\forall x \in S_n$. Тогда существует точка $x^* \in D_n$, такая, что $x^* = f(x^*)$.

**Доказательство.** Рассмотрим пространство $R^{n+1}$ векторов вида $(x; \xi_{n+1})$ и в этом пространстве стандартный симплекс $S_{n+1} = \left\{ (x; \xi_{n+1}) \in R_+^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} \xi_i = 1 \right\}$. Как и в доказательстве теоремы 1 по $\varepsilon = 1/k$ строим подразделение $S_{n+1}(\Omega_{i\,\varepsilon})$, $i = \overline{1, I_\varepsilon}$, симплекса $S_{n+1}$ и осуществляем помечивание точек $(x; \xi_{n+1})$ множества $\omega_\varepsilon$ целыми числами $j(x; \xi_{n+1})$, определяемыми формулой

$$j(x; \xi_{n+1}) = \begin{cases} n+1, \text{ не } \exists\, j, \text{ такого, что } \varphi_j(x) \le \xi_j,\ \xi_j > 0, \\ \min \left\{ j \mid \varphi_j(x) \le \xi_j,\ \xi_j > 0 \right\}, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Описанное помечивание является допустимым. Действительно, если $x \in S_n$, т.е. $\xi_{n+1} = 0$, то в силу включения $f(S_n) \subset D_n$ существует индекс $j_0$, такой, что $\varphi_{j_0}(x) \le \xi_{j_0}, \xi_{j_0} > 0$, т. е. $1 \le j(x; 0) \le n$ и $j(x; 0)$ совпадает с пометкой одной из вершин грани симплекса $S_{n+1}$, содержащей $(x; 0)$. Если же $x \overline{\in} S_n$, то $\xi_{n+1} > 0$, так что и в этом случае $j(x; \xi_{n+1})$ совпадает с пометкой одной из вершин грани симплекса $S_{n+1}$, содержащей $(x; \xi_{n+1})$. Поэтому по лемме Шпернера существует симплекс подразделения, вершины которого имеют все пометки от 1 до $n+1$. В силу выбранного правила помечивания приходим к неравенствам (1). Кроме того,

$$\varphi_j(x^{n+1\,k}) \ge \xi_j^{n+1\,k},\ j = \overline{1, n}. \tag{3}$$

Действительно, если координата $\xi_j^{n+1\,k}$ вектора $x^{n+1\,k}$ равна нулю, то для индекса $j$ неравенство (3) выполнено в силу предположения $f(x^{n+1\,k}) \ge 0$, а для остальных индексов, т. е. для индексов, соответствующих положительным координатам, — в силу правила помечивания .

Переходя в (1), (3) к пределу при $k \to \infty$, получаем

$$\varphi_j(x^*) \le \xi_j^*,\ j = \overline{1, n},\ \ \varphi_j(x^*) \ge \xi_j^*,\ j = \overline{1, n}.$$

Следовательно, $\xi_j^* = \varphi_j(x^*)$, $j = \overline{1, n}$, так что $x^* \in D_n$, $x^* = f(x^*)$.

**Теорема 3.** Пусть непрерывное точечно-точечное отображение $f(x): D_n \to R^n$ таково, что $f(x) \in D_n$, $\forall x \in \partial D_n$. Тогда существует точка $x^* \in D_n$, такая, что $x^* = f(x^*)$.

**Доказательство.** Для установления существования неподвижной точки в данном случае достаточно полностью повторить доказательство теоремы 2. При этом справедливость неравенства (3) для внутренних точек $x^{n+1\,k}$ множества $D_n$ непосредственно следует из правила помечивания, а для точек $x^{n+1\,k} \in \partial D_n$ это неравенство выполняется в силу предположения $f(\partial D_n) \subset D_n$ и правила помечивания.

**Лемма 2** [2]. Каково бы ни было выпуклое замкнутое ограниченное множество $\Omega \subset R^n$ существует гомеоморфизм $g$ и симплекс $S_m$, такие, что $g(\Omega) = S_m$, $g^{-1}(S_m) = \Omega$.

**Теорема 4.** Пусть $\Omega \subset R^n$ – выпуклое замкнутое ограниченное множество и $f(x): \Omega \to \Omega$ непрерывное точечно - точечное отображение. Тогда существует точка $y^* \in \Omega$, такая, что $y^* = f(y^*)$.

**Доказательство.** Пусть $g$ – гомеоморфизм, а $S_m$ – симплекс, существование которых обеспечивает лемма 2. Рассмотрим непрерывное на $S_m$ отображение $g(f(g^{-1}(x))): S_m \to S_m$. В силу замечания к теореме 1 существует вектор $x^* \in S_m$, такой, что $g(f(g^{-1}(x^*))) = x^*$, $f(g^{-1}(x^*)) = g^{-1}(x^*)$. Обозначим $y^* = g^{-1}(x^*)$. Очевидно, что $y^* \in \Omega$, $y^* = f(y^*)$.

Определим $\Omega = \left\{ x \in R^n : \varphi_0(x) \le 0 \right\}$, где $\varphi_0(x)$ – выпуклая функция.

**Теорема 5.** Пусть на множестве $\Omega$, удовлетворяющем условиям

а) $\Omega$ – ограничено; б) $D_n \subset \Omega$, задано непрерывное точечно - точечное отображение $f(x): \Omega \to R^n$, такое, что $f(x) \in \Omega$, $\forall x \in \partial\Omega$. Тогда существует точка $x^* \in \Omega$ такая, что $x^* = f(x^*)$.

**Доказательство.** Построим гомеоморфизм $g(x)$, переводящий выпуклое тело $\Omega$ в симплексе $D_n$ таким образом, что $S_n \subset g(\partial\Omega)$, $g^{-1}(S_n) \subset \partial\Omega$.

Очевидно, что $\tilde{x} = \left( \dfrac{1}{n+1}, \dots, \dfrac{1}{n+1} \right) \in \operatorname{int}\Omega$. Для каждой точки $y \in \partial\Omega$ определим $g(y) = \tilde{x} + \tau(y)(y - \tilde{x})$, где

$$\tau(y) = \arg\max \left\{ \tau > 0 : \tilde{x} + \tau(y - \tilde{x}) \in D_n \right\}.$$

Каждой точке $z = \tilde{x} + \tau(y - \tilde{x}), \tau > 0, z \in \Omega$, поставим в соответствие $g(z) = \tilde{x} + \tau(y)(z - \tilde{x})$. Построенное точечно - точечное отображение имеет точечно - точечное обратное отображение $g^{-1}(x)$ и $S_n \subset g(\partial\Omega)$, $g^{-1}(S_n) \subset \partial\Omega$.

Докажем непрерывность отображений $g(x)$ и $g^{-1}(x)$. Вначале докажем, что скалярная функция $\tau(y)$ непрерывна на $\partial\Omega$. Пусть $y^k \to \tilde{y} \in \partial\Omega$. Без ограничения общности можно считать, что $\lim\limits_{k\to\infty} \tau(y^k) = \tilde{\tau}$. Покажем, что $\lim\limits_{k\to\infty} \tau(y^k) = \tau(\tilde{y})$. Для этого предположим противное, т. е. $\tilde{\tau} \neq \tau(\tilde{y})$. Очевидно, что $\tilde{x} + \tilde{\tau}(\tilde{y} - \tilde{x}) \in D_n$. Поэтому из сделанного предположения следует, что $\tilde{\tau} < \tau(\tilde{y})$. Пусть $\bar{\tau} \in (\tilde{\tau}, \tau(\tilde{y}))$. Тогда выполняется $\tilde{x} + \bar{\tau}(\tilde{y} - \tilde{x}) > 0$, $\sum\limits_{i=1}^{n}(\tilde{\xi}_i + \bar{\tau}(\tilde{\eta}_i - \tilde{\xi}_i)) < 1$.

В силу сходимости $y^k$ к $\tilde{y}$ для достаточно больших $k$ приходим к справедливости неравенств $\tilde{x} + \bar{\tau}(y^k - \tilde{x}) > 0$, $\sum\limits_{i=1}^{n}(\tilde{\xi}_i + \bar{\tau}(\eta_i^k - \tilde{\xi}_i)) < 1$, из которых следует, что $\tau(y^k) > \bar{\tau}$, т. е. $\tilde{\tau} \geq \bar{\tau}$.

Полученное противоречие означает, что $\lim\limits_{k\to\infty} \tau(y^k) = \tau(\tilde{y})$, т. е. функция $\tau(y)$, непрерывна. Из ее непрерывности следует непрерывность $g(x)$ на $\partial\Omega$.

Пусть $z^k \to \tilde{z}$, $k \to \infty$, $z^k \in \Omega$, $\tilde{z} \neq \tilde{x}$ и

$\tau_k = \arg\max\left\{\tau > 0 : \tilde{x} + \tau(z^k - \tilde{x}) \in \Omega\right\} = \arg\max\left\{\tau > 0 : \varphi_0(\tilde{x} + \tau(z^k - \tilde{x})) \leq 0\right\}$.

Обозначим $\tilde{\tau} = \lim\limits_{k\to\infty} \tau_k$, тогда $\varphi_0(\tilde{x} + \tilde{\tau}(\tilde{z} - \tilde{x})) = 0$ и $\lim\limits_{k\to\infty} y^k =$ $= \lim\limits_{k\to\infty}(\tilde{x} + \tau_k(z^k - \tilde{x})) = \tilde{x} + \tilde{\tau}(\tilde{z} - \tilde{x}) = \tilde{y} \in \partial\Omega$.

Поэтому $\lim\limits_{k\to\infty} g(z^k) = \tilde{x} + \tau(\tilde{y})(\tilde{z} - \tilde{x}) = g(\tilde{z})$. Таким образом, отображение $g(x)$ непрерывно в точках $x \neq \tilde{x}$.

Остается убедиться в непрерывности $g(x)$ в точке $\tilde{x}$. Пусть $z^k \to \tilde{x}$, $k \to \infty$. Очевидно, $\left\| g(z^k) - \tilde{x} \right\| \leq \left\| z^k - \tilde{x} \right\|$. Поэтому $\lim\limits_{k\to\infty} g(z^k) = \tilde{x} =$ $= g(\tilde{x})$ и, следовательно, непрерывность $g(x)$ полностью доказана. Аналогично доказывается непрерывность $g^{-1}(x)$. Значит, отображение $g$ – гомеоморфизм.

Рассмотрим непрерывное отображение $g(f(g^{-1}(x))): D_n \to R^n$. Оно удовлетворяет условиям теоремы 3, в соответствии с которой существует вектор $z^* \in D_n$, такой, что $z^* = g(f(g^{-1}(z^*)))$. Положим $x^* = g^{-1}(z^*)$. Тогда $x^* \in \Omega$, $x^* = f(x^*)$.

При $\varphi_0(x) = \|x\| - 1$ получаем теорему, доказанную в [1] с помощью теоремы Сарда.

**Теорема 6.** Пусть $S = \left\{ x \in R^n : \|x\| = 1 \right\}$, $D = \left\{ x \in R^n : \|x\| \le 1 \right\}$ и непрерывное точечно-точечное отображение $f(x): D \to R^n$, такое, что $f(x) \in D$, $\forall x \in S$. Тогда существует точка $y^* \in D$, такая, что $y^* = f(y^*)$.

Итак, с использованием лишь леммы Шпернера доказаны теоремы 2 и 3, которые несколько уточняют теорему Брауэра. Приводится теорема 6, являющаяся следствием теоремы 3, которая уточняет теорему 4.

*Е. І. Ненахов*

ДЕЯКІ ТЕОРЕМИ ПРО НЕРУХОМІ ТОЧКИ

Викладені результати дослідження по підсиленню теореми Брауера. Елементарними засобами здійснено доведення уточнених теорем. Це призводить до розширення класу точково - точкових відображень, які мають нерухомі точки.

*E. I. Nenakhov*

SOME THEOREMS ON FIXED POINTS

The results of investigations in strehgthening Brower theorem are stated. The proof of improved theorems is realized by elementary means. This leads to extending a class of point - to - point mappings with fixed points.

1. *Брекер Т., Ландер Д.* Дифференцируемые ростки и катастрофы. — М.: Мир, 1977. — 208 с.
2. *Томпкинс Ч.* Лемма Шпернера и некоторые ее обобщения // Прикладная комбинаторная математика. — М.: Мир, 1968. — С. 243-287.

Получено 17.09.2003