Исследован метод последовательных приближений Пикара для решения интегрального уравнения восстановления (типа Вольтерра), которому удовлетворяет вероятность (не) банкротства классического процесса риска. Установлены сходимость, монотонность и скорость сходимости приближений во всей области возможных начальных значений процесса риска. Результаты проиллюстрированы численными расчетами.

УДК 519.21

Б.В. НОРКИН

О МЕТОДЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ БАНКРОТСТВА КЛАССИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА РИСКА

Введение. Классический процесс риска, описывающий эволюцию капитала страховой компании, задается соотношением [1 – 4]:

$$\xi_t = u + ct - S_t \qquad (1)$$

где t – время; u – начальный капитал страховой компании; c – интенсивность поступления премий; S_t – агрегированные выплаты к моменту t, $S_t = \sum_{k=1}^{N_t} Y_k$; Y_k – независимые одинаково распределенные случайные величины (требования) с функцией распределения $F(y)$ и средним значением μ; N_t – число выплат к моменту t (пуассоновский процесс с интенсивностью α). Теория таких процессов детально изучена [1 – 4]. Как известно функция вероятности небанкротства $\varphi(u) = \Pr\{\xi_t \geq 0 \ \ \forall t \geq 0\}$ при начальном капитале u удовлетворяет интегральному уравнению восстановления [3, с. 227]:

$$\varphi(u) = 1 - \frac{\alpha\mu}{c} + \frac{\alpha}{c}\int_0^u \varphi(u-z)\big(1-F(z)\big)\,dz\,. \qquad (2)$$

Это уравнение решается, как правило, с помощью преобразования Лапласа. Таким способом получены точные решения в случаях экспоненциальных и фиксированных требований. Для решения $\varphi(u)$ уравнения (2) известна также оценка Крамера-Лундберга $\varphi(u) \geq 1 - e^{-Ru}$, $u \geq 0$, где коэффициент Лундберга R удовлетворяет уравнению

$$\frac{\alpha}{c}\int_0^{+\infty} e^{Rz}\left[1-F(z)\right]dz = 1\,. \qquad (3)$$

Известен также ряд аппроксимаций $\varphi(u)$ для больших R (см., например, [1, 3]). Однако проблема аналитического и численного решения уравнения (2) продолжает привлекать внимание исследователей [4 - 8].

Заметим, что (2) является интегральным уравнением Вольтерра. Действительно, сделав в интеграле замену переменных $x = u - z$, вместо (2) получаем:

$$\varphi(u) = 1 - \frac{\alpha\mu}{c} + \frac{\alpha}{c}\int_0^u \varphi(x)K(x,u)dx, \tag{4}$$

где ядро $K(x,u) = 1 - F(u-x)$ – измеримая ограниченная функция. Как известно [9], правая часть уравнения Вольтерра (2) является оператором сжатия, поэтому оно имеет единственное решение, которое можно найти методом последовательных приближений. Однако уравнения (2), (4) являются уравнениями Вольтерра специального вида, поэтому их решения и последовательные приближения к решению обладают специфическими свойствами. Цель настоящей работы – изучение этих свойств.

Метод последовательных приближений. Решение уравнения (2) можно найти следующим методом последовательных приближений:

$$\varphi^{k+1}(u) = 1 - \frac{\alpha\mu}{c} + \frac{\alpha}{c}\int_0^u \varphi^k\left(u-z\right)\left[1-F\left(z\right)\right]dz, \quad k = 0,1,..., \tag{5}$$

где $\varphi^0(u)$ – некоторая начальная функция. Все функции $\varphi^k(u)$ считаются определенными на некотором интервале $[0,v]$, $v < +\infty$. Заметим, что для нахождения $\varphi^{k+1}(u)$ достаточно знать $\varphi^k(u)$ на интервале $[0,v]$. Обозначим $L_\infty\left([0,v]\right)$ – пространство непрерывных функций $f(u)$, определенных на интервале $[0,v]$ с нормой $\|f\| = \max_{u\in[0,v]}|f(u)|$. Как известно, $L_\infty\left([0,v]\right)$ - полное нормированное (Банахово) пространство для любого $v < +\infty$.

Теорема 1. Если $\frac{\alpha\mu}{c} < 1$, $\int_0^{+\infty}\left(1-F(z)\right)dz < \infty$, функция $\varphi^0(u),\ u \in [0,v]$, монотонно не убывает и удовлетворяет условию $0 \le \varphi^0(u) \le 1$, то

(i) все $\varphi^k(u)$ непрерывны и монотонно не убывают на интервале $[0,v]$, $0 \le \varphi^k(u) \le 1,\ k \ge 0$;

(ii) последовательность $\left\{\varphi^k(u)\right\}$ фундаментальна в $L_\infty\left([0,v]\right)$, и она сходится к решению исходного уравнения , причем $\left\|\varphi - \varphi^k\right\| \le \frac{p^k}{1-p}$, $p = \frac{\alpha\mu}{c} < 1$;

(iii) предельная функция $\varphi(u) = \lim_{k\to\infty}\varphi^k(u)$ непрерывна и монотонна (не убывает), кроме того, $0 \le \varphi(u) \le 1$.

Доказательство. (i). Функция $\varphi^0(u-z)\left[1-F\left(z\right)\right]$ монотонна по z, поэтому интегрируема по Риману (см. [10]), а значит $\varphi(u)$ непрерывна и монотонно не убывает. По индукции все $\varphi^k(u),\, k\le 1$, непрерывны и монотонно не убывают. Заметим, что $\mu=\int_0^{+\infty}\left(1-F(z)\right)dz$. Если $0\le\varphi^k(u)\le 1$, то справедливы неравенства:

$$1-\frac{\alpha\mu}{c}\le\varphi^{k+1}(u)\le 1-\frac{\alpha\mu}{c}+\frac{\alpha}{\mu}\int_0^u\varphi^k\left(u-z\right)\left[1-F\left(z\right)\right]dz\le 1.$$

Таким образом, по индукции следует, что $1-\alpha\mu/c\le\varphi^{k+1}(u)\le 1,\;\; k\ge 1$.

(ii). Оценим скорость сходимости процесса последовательных приближений. Справедливо

$$\varphi^{k+1}(u)=1-\frac{\alpha\mu}{c}+\frac{\alpha}{\mu}\int_0^u\varphi^k\left(u-z\right)\left[1-F\left(z\right)\right]dz,$$

$$\varphi^k(u)=1-\frac{\alpha\mu}{c}+\frac{\alpha}{\mu}\int_0^u\varphi^{k-1}\left(u-z\right)\left[1-F\left(z\right)\right]dz,\quad k=0,1,...,$$

откуда

$$\varphi^{k+1}(u)-\varphi^k(u)=\frac{\alpha}{c}\int_0^u\left(\varphi^k(u-z)-\varphi^{k-1}(u-z)\right)[1-F(z)]dz\,,$$

$$\left\|\varphi^{k+1}-\varphi^k\right\|\le\frac{\alpha}{c}\int_0^u\left\|\varphi^k-\varphi^{k-1}\right\|[1-F(z)]dz\le\frac{\alpha}{c}\int_0^{+\infty}[1-F(z)]dz\cdot\left\|\varphi^k-\varphi^{k-1}\right\|\le$$

$$\le\frac{\alpha\mu}{c}\cdot\left\|\varphi^k-\varphi^{k-1}\right\|=p\left\|\varphi^k-\varphi^{k-1}\right\|,\quad k=1,2,...$$

Тогда для $n>m$

$$\left\|\varphi^n-\varphi^m\right\|\le\sum_{k=m+1}^{n}\left\|\varphi^k-\varphi^{k-1}\right\|\le\left\|\varphi^{m+1}-\varphi^m\right\|\sum_{k=0}^{n-m-1}p^k\le$$

$$\le\frac{\left\|\varphi^{m+1}-\varphi^m\right\|}{1-p}\le\frac{\left\|\varphi^1-\varphi^0\right\|p^m}{1-p}\le\frac{p^m}{1-p}.$$

Следовательно, последовательность $\left\{\varphi^k(u)\right\}$ фундаментальна и имеет единственный непрерывный предел $\varphi(u)$ в $L_\infty\left([0,v]\right)$ при каждом конечном $v<+\infty$. Переходя в соотношении (5) к пределу по k при каждом фиксированном u, получаем, что $\varphi(u)$ удовлетворяет исходному уравнению (2). Переходя в неравенстве $\left\|\varphi^n-\varphi^m\right\|=\max_{u\in[0,v]}\left|\varphi^n(u)-\varphi^m(u)\right|\le p^m/(1-p)$ к пределу по $n\to\infty$, получаем $\left\|\varphi-\varphi^m\right\|\le p^m/(1-p)$.

(iii). Предельная функция $\varphi(u)$ непрерывна и монотонна, $0\le\varphi(u)\le1$, как предел непрерывных и монотонных функций $\varphi^k(u)$ таких, что $0\le\varphi^k(u)\le1$.

Лемма 1. (i). Если $\varphi^0(u)\equiv\varphi(0)=1-\alpha\mu/c$, то итерационная последовательность $\varphi^k(u)$ монотонно не убывает (возрастает). (ii). Если $\varphi^0(u)\equiv1$, то $\left\{\varphi^k(u)\right\}$ монотонно не возрастает (убывает).

Доказательство. (i). Для $\varphi^0(u)=1-\alpha\mu/c$ справедливо:

$$\varphi^1(u)=1-\frac{\alpha\mu}{c}+\frac{\alpha}{c}\int_0^u\varphi^0(u-z)\left[1-F(z)\right]dz=1-\frac{\alpha\mu}{c}+\frac{\alpha}{c}\int_0^u\left(1-\frac{\alpha\mu}{c}\right)\left[1-F(z)\right]dz=$$

$$=\left(1-\frac{\alpha\mu}{c}\right)\cdot\left(1+\frac{\alpha}{c}\int_0^u\left[1-F(z)\right]dz\right)\ge1-\frac{\alpha\mu}{c}=\varphi^0(u).$$

Имеет место:

$$\varphi^{k+1}(u)-\varphi^k(u)=\frac{\alpha}{c}\int_0^u\left(\varphi^k(u-z)-\varphi^{k-1}(u-z)\right)\left[1-F(z)\right]dz. \qquad (6)$$

Таким образом, очевидно, если $\varphi^k(u)\ge\varphi^{k-1}(u)\ \ \forall u\in[0,v]$, то $\varphi^{k+1}(u)\ge\varphi^k(u)\ \ \forall u\in[0,v]$. Первое утверждение доказано.

(ii). Пусть $\varphi^0(u)\equiv1$, тогда

$$\varphi^1(u)=1-\frac{\alpha\mu}{c}+\frac{\alpha}{c}\int_0^u\varphi^0(u-z)\left[1-F(z)\right]dz=1-\frac{\alpha\mu}{c}+\frac{\alpha}{c}\int_0^u\left[1-F(z)\right]dz\le$$

$$\le1-\frac{\alpha\mu}{c}+\frac{\alpha}{c}\int_0^{+\infty}\left[1-F(z)\right]dz=1=\varphi^0(u).$$

По индукции из неравенства (6) следует, что $\varphi^k(u)\ge\varphi^{k-1}(u)\ \ \forall u\in[0,v]$, $k>0$.Таким образом, при старте с начальных функций $\varphi^0(u)=1$ или $\varphi^0(u)=1-\alpha\mu/c$ итерационный процесс монотонно сходится к решению исходного интегрального уравнения.

Лемма 2. Если начальная функция $\varphi^0(u)=1$, то для всех k $\lim\limits_{u\to\infty}\varphi^k(u)=1$.

Доказательство. Представим $u=u_1+u_2,\ u_1\ge0,\ u_2\ge0$. В силу леммы 1 все $\varphi^k(u)$ монотонно не убывают, поэтому

$$\int_0^u \varphi^k(u-z)[1-F(z)]dz \ge \int_0^{u_1} \varphi^k(u_1+u_2-z)[1-F(z)]dz \ge$$

$$\ge \int_0^{u_1} \varphi^k(u_2)[1-F(z)]dz = \varphi^k(u_2)\int_0^{u_1}[1-F(z)]dz .$$

Предположим, что $\lim\limits_{u\to\infty}\varphi^k(u)=1$. Пусть $u=u_1+u_2\to\infty$ и $u_1\to\infty, u_2\to\infty$.
Тогда

$$1 \ge \lim_{u\to\infty}\varphi^{k+1}(u) = \lim_{u\to\infty}\left(1-\frac{\alpha\mu}{c}+\frac{\alpha}{c}\int_0^u \varphi^k(u-z)[1-F(z)]dz\right) \ge$$

$$\ge 1-\frac{\alpha\mu}{c}+\lim_{u\to\infty}\varphi^k(u)\cdot\lim_{u\to\infty}\frac{\alpha}{c}\int_0^u[1-F(z)]dz = 1-\frac{\alpha\mu}{c}+\frac{\alpha\mu}{c}=1,$$

отсюда по индукции следует, что $\lim\limits_{u\to\infty}\varphi^k(u)=1 \ \forall k$.

Следствие 1. Если $\varphi^0(u)\equiv 1$, то для всех k приближения $\varphi^k(u)$ являются монотонными (не убывающими) непрерывными функциями такими, что $1-\alpha\mu/c=\varphi^k(0)\le\varphi^k(u)\le 1$ и $\lim_{k\to\infty}\varphi^k(u)=1$.

Лемма 3. Если $\varphi^k(u)\ge 1-e^{-Ru}$, то и $\varphi^{k+1}(u)\ge 1-e^{-Ru}$, где R - константа Лундберга, являющаяся корнем уравнения (3).

Доказательство. Пусть $\varphi^k(u)\ge 1-e^{-Ru}$, тогда

$$\varphi^{k+1}(u)\ge 1-\frac{\alpha\mu}{c}+\frac{\alpha}{c}\int_0^u\left(1-e^{-R(u-z)}\right)\left(1-F(z)\right)dz =$$

$$=1-\frac{\alpha\mu}{c}+\frac{\alpha}{c}\int_0^u\left(1-F(z)\right)dz - e^{-Ru}\frac{\alpha}{c}\int_0^u e^{Rz}\left(1-F(z)\right)dz =$$

$$=1-\frac{\alpha\mu}{c}+\frac{\alpha}{c}\int_0^u\left(1-F(z)\right)dz+\frac{\alpha}{c}\int_u^{+\infty}e^{R(z-u)}\left(1-F(z)\right)dz - e^{-Ru}\frac{\alpha}{c}\int_0^{+\infty}e^{Rz}\left(1-F(z)\right)dz \ge$$

$$\ge 1-\frac{\alpha\mu}{c}+\frac{\alpha}{c}\int_0^u\left(1-F(z)\right)dz+\frac{\alpha}{c}\int_u^{+\infty}\left(1-F(z)\right)dz - e^{-Ru} =$$

$$=1-e^{-Ru}-\frac{\alpha\mu}{c}+\frac{\alpha}{c}\int_0^{+\infty}\left(1-F(z)\right)dz = 1-e^{-Ru}.$$

Следствие 2. Если $\varphi^0(u)\equiv 1$, то $\varphi^k(u)\ge 1-e^{-Ru} \quad \forall\, k\ge 0$.

Следствие 3. Если $\varphi^0(u) = 1 - e^{-Ru}$, то последовательность функций $\{\varphi^k(u)\}$ монотонно возрастает и сходится к решению $\varphi(u)$ уравнения (2).

Метод разложения по малому параметру. Обозначим $q = 1 - \alpha\mu/c$, тогда $\alpha/c = (1-q)/\mu$, и уравнение (2) примет вид:

$$\varphi(u) = q + \frac{1-q}{\mu}\int_0^u \varphi(u-z)\left[1 - F(z)\right]dz. \qquad (7)$$

Как показывает оценка теоремы 1 метод последовательных приближений для решения интегрального уравнения (7) работает тем лучше, чем ближе q к 1, и оценка скорости сходимости становится плохой при q близких к 0. В последнем случае целесообразно применить метод разложения решения $\varphi(u)$ по малому параметру q. Представим $\varphi(u,q) = \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi_k(u) q^k$. Так как $\varphi(u,0) \equiv 0$, то $\varphi_0(u) \equiv 0$. Подставив разложение $\varphi(u,q)$ в уравнение (7) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях q, получаем:

$$\varphi_1(u) = 1 + (1/\mu)\int_0^u \varphi_1(u-z)(1-F(z))\,dz,$$

$$\varphi_k(u) = \frac{1}{\mu}\int_0^u \varphi_k(u-z)(1-F(z))\,dz - \frac{1}{\mu}\int_0^u \varphi_{k-1}(u-z)(1-F(z))\,dz, \qquad k = 2,3,...$$

Таким образом коэффициенты разложения $\varphi_k(u)$ удовлетворяют интегральным уравнениям Вольтерра, которые могут быть последовательно решены численными методами.

Обозначим $f_0(u) \equiv 1$, $f_k(u) = -(1/\mu)\int_0^u \varphi_k(u-z)(1-F(z))\,dz$. Очевидно,

$$\varphi_k(u) = (1/\mu)\int_0^u \varphi_k(u-z)(1-F(z))\,dz + f_{k-1}(u),$$

$$\|f_0\| = 1, \quad \|f_{k-1}\| \le \max_{u\in[0,v]} \varphi_{k-1}(u)\cdot(1/\mu)\int_0^{+\infty}(1-F(z))\,dz = \|\varphi_{k-1}\|, \quad k = 1,2,....$$

Для функции $\varphi_k(u)$ с учетом того, что $0 \le 1 - F(u) \le 1$, справедлива оценка (см. [9, гл.9, §3]): $\|\varphi_k\| \le \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{v^i}{\mu^i i!}\|f_{k-1}\| = e^{v/\mu}\|f_{k-1}\| \le e^{kv/\mu}$.

Ряд $\varphi(u,q) = \sum_{k=1}^{+\infty} \varphi_k(u) q^k$ заведомо абсолютно сходится на отрезке $[0,v]$ при $qe^{v/\mu} < 1$ и является решением уравнения (7). Таким образом, при данном q последовательные приближения $\varphi^k(u,q) = \sum_{i=1}^{k} \varphi_i(u) q^i$ заведомо сходятся к решению уравнения (7) на интервале $\left[0, \mu\cdot\ln(1/q)\right]$.

Пример 1 . Пусть $F(z)=\varepsilon\left(1-\exp\left(-\varepsilon z\right)\right)+(1-\varepsilon)\left(1-\exp\left(-z\right)\right)$, $\mu=\int_0^{+\infty}\left(1-F(z)\right)dz=2-\varepsilon$.

Обозначим $q=1-\alpha\mu/c$, тогда $\alpha/c=\left(1-q\right)/\mu$, вероятность небанкроства $\varphi(u)$ зависит от начального капитала u и двух параметров q,μ. Параметр q выражается через страховую надбавку $\rho=\left(c-\alpha\mu\right)/\left(\alpha\mu\right)=c/\left(\alpha\mu\right)-1$ следующим образом: $q=\rho/\left(1+\rho\right)$. Так как реальные значения страховой надбавки могут быть близки к нулю, то и значения параметра q могут быть близки к нулю. Пусть $\varepsilon=q=0.1$. Итерационный процесс для решения уравнения (7) можно записать в виде

$$\varphi^{k+1}(u)=q+\left(\left(1-q\right)/\mu\right)\int_0^u\varphi^k\left(u-z\right)\left[1-F\left(z\right)\right]dz,\qquad k=0,1,\dots .$$

Если $\varphi^0(u)\equiv 1$, то согласно лемме 1 последовательность приближений монотонно убывает, а согласно лемме 2 $\lim_{u\to+\infty}\varphi^k(u)=1$. Ход итераций показан на рис. 1.

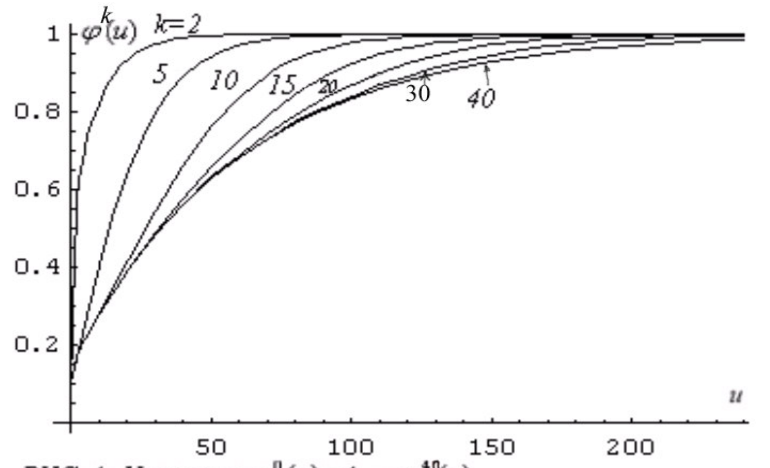

РИС. 1. Итерации $\varphi^0(u)\equiv 1,\dots,\varphi^{40}(u)$

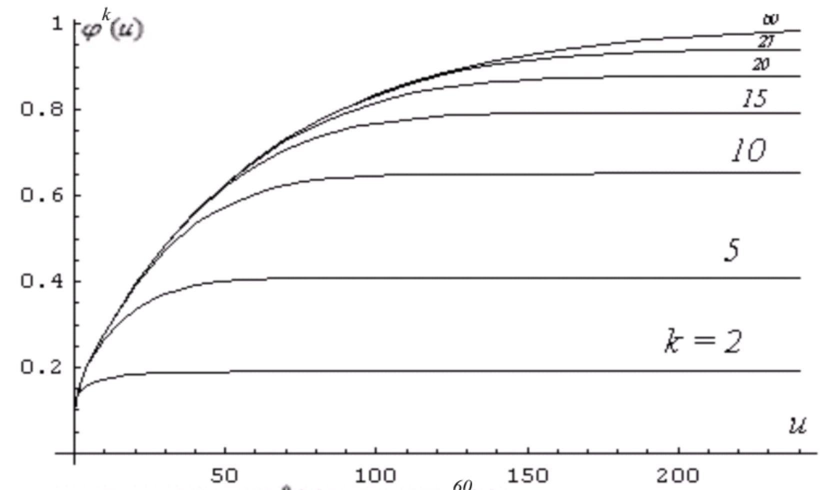

РИС. 2. Итерации $\varphi^0(u) = 0,1,\ldots, \varphi^{60}(u)$

Если $\varphi^0(u) \equiv \varphi(0) = q$, то согласно лемме 1 последовательность приближений монотонно возрастает, ход соответствующих итераций показан на рис. 2.

Согласно теореме 1 априорная оценка точности приближений имеет вид: $\max_{u\in[0,v]} \left|\varphi(u) - \varphi^k(u)\right| \le (1-q)^k / q = \delta_k$. Из расчетов следует, что реальная точность приближений значительно выше, чем указанная априорная точность, например, $\delta_{30} = 0.4239$.

Заключение. В работе детально исследованы свойства последовательных приближений для нахождения вероятности небанкротства $\varphi(u)$ классического процесса риска. Показано, что для рассматриваемого уравнения Вольтерра, которому удовлетворяет $\varphi(u)$, сжатие имеет место на каждой итерации с коэффициентом $\lambda = \dfrac{\alpha\mu}{c} < 1$ равномерно по всем $u \in [0, +\infty)$, что обеспечивает высокую скорость сходимости при всех u . Показано, что при старте из начальных функций $\varphi^0(u) \equiv 1$ и $\varphi^0(u) \equiv \varphi(0) = 1 - \dfrac{\alpha\mu}{c}$ последовательные приближения монотонно сходятся к решению $\varphi(u)$, а при старте из начальной функции $\varphi^0(u) \equiv 1$ все последовательные приближения $\varphi^k(u)$ удовлетворяют условию $\varphi^k(u) \ge 1 - e^{-Ru}$, где $R > 0$ – константа Лундберга, и таким образом выполнены граничные условия $\varphi^k(+\infty) = 1$ на каждой итерации и в пределе, $\varphi(+\infty) = 1$. Для случая малых страховых нагрузок, когда метод последовательных приближений может медленно сходиться, обоснован другой метод нахождения $\varphi(u)$, а именно, метод разложения $\varphi(u)$ по малому параметру, причем коэффициенты

разложения находятся путем решения последовательности некоторых интегральных уравнения Вольтерра, уже не содержащих малого параметра. Теоретические результаты проиллюстрированы на численном примере, в частности, показано, что асимптотическое приближение Крамера-Лундберга для вероятности банкротства может значительно отличаться от точных значений этой вероятности даже при больших значениях u .

Б.В. Норкін

ПРО МЕТОД ПОСЛІДОВНИХ НАБЛИЖЕНЬ ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ ЙМОВІРНОСТІ БАНКРУТСТВА КЛАСИЧНОГО ПРОЦЕСУ РИЗИКУ

Досліджений метод послідовних наближень Пікара для розв'язання інтегрального рівняння відновлення (Вольтерра), якому задовольняє ймовірність (не)банкрутства класичного процесу ризику. З'ясовані збіжність, монотонність та швидкість збіжності наближень у всій області можливих початкових значень процесу ризику. Результати проілюстровані чисельними розрахунками.

B.V.Norkin

ON A SUCCESIVE APPROXIMATION METHOD FOR CALCULATION OF THE RUIN PROBABILITY FOR A CLASSICAL RISK PROCESS

Probability of (non)ruin for the classical risk process is searched as a solution of a renewal (Volterra) integral equation. Picard's successive approximation method for the solution of this equation is applied. Convergence, monotonicity, and rate of convergence of approximations is explored for the whole range of the process initial values. Theoretical results are illustrated by numeral calculations.

1. *Beard R.E., Pentikäinen T., Pesonen E.* Risk Theory. The Stochastic Basis of Insurance. 3-rd edition. – London, New York: Chapman and Hall, 1984. – 408 p.
2. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. – М.: Мир, 1967. – 2. – 752с.
3. *Леоненко М.М., Мішура Ю.С., Пархоменко Я.М., Ядренко М.Й.* Теоретико-ймовірнісні та статистичні методи в економетриці та фінансовій математиці. – К.: Інформтехніка, 1995. – 380 с.
4. *Asmussen S.* Ruin Probabilities. – Singapore: World Scientific, 2000. – 385 p.
5. *Наконечный А.Н.* Оценка Монте-Карло для вероятности разорения в сложной пуассоновской модели теории риска // Кибернетика и системный анализ. – 1995. – № 6. – С.160–162.
6. *Коваленко И.Н., Наконечный А.Н., Романов А.Б.* Метод чебышевских приближений функций распределения неотрицательных случайных величин // Кибернетика и системный анализ. – 1996. – № 2. – С.73–81.
7. *Schock Petersen S.* Calculation of ruin probabilities when the premium depends on the currant reserve // Scand. Act. J. – 1989. – P.147–159.
8. *Братийчук Н.С., Гусак Д.В.* Граничные задачи для процессов с независимыми приращениями. – Киев: Наук. думка, 1990. – 264 с.
9. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1981. – 544 с.

Получено 01.06.2003