УДК 517.958.539.3

О.Н. ТОКАРЕВА

ОПТИМИЗАЦИЯ СИСТЕМ, ОПИСЫВАЕМЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМИ КРАЕВЫМИ ЗАДАЧАМИ С НЕОДНОРОДНЫМИ НЕУСТОЙЧИВЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

В развитие методов и алгоритмов на основе штрафных функций в конечномерном пространстве [1, 2] построены конструкции слабого дифференциала (дифференциала Гато) и производной Фреше по управляющим функциям для функционалов вида кратных интегралов с негладкими подинтегральными функциями в оптимизационной модели проектирования механичеких систем с операторными ограничениями в форме эллиптической краевой задачи. Неоднородные неустойчивые граничные условия последней сведены к однородным. Дана теорема существования и единственности решения сопряженных краевых задач.

В работе получила развитие техника дифференцирования функционалов по направлениям в функциональном пространстве, используемая в одномерной теории оптимального управления [3], применительно к оптимальному управлению системами с распределенными параметрами.

Рассмотрим краевую задачу

$$Au = f \text{ в } \Omega; \; u_1 = 0, \; u_2 = 0 \text{ на } \Gamma_0,$$

$$Bu = g \text{ на } \Gamma_1. \qquad (1)$$

Здесь $A = [A_1, A_2]^T$ – векторный эллиптический дифференциальный оператор порядка $2k$, $k = 1$; $B = [B_1, B_2]^T$ – векторный дифференциальный оператор первого порядка; $u = [u_1(x), u_2(x)]^T$ – вектор состояния, $x = [x_1, x_2]^T \in \Omega$,

$u \in [W_2^{(2)}(\Omega)]^2$, $W_2^{(2)}(\Omega)$ – гильбертово пространство, элементами которого служат те функции из $L_2(\Omega)$, у которых есть обобщенные производные в Ω до второго порядка включительно; $L_2(\Omega)$ – гильбертово пространство функций квадратично интегрируемых (в смысле Лебега) в области Ω; $\Omega \subset R^2$, Ω – ограниченное открытое связное множество из R^2; $f = [f_1(x), f_2(x)]^T \in [L_2(\Omega)]^2$,

$g=[g_1(x), g_2(x)]^T \in [L_2(\Gamma_1)]^2$, f – управляющая функция; Γ_0, Γ_1 – непересекающиеся открытые части липшицевой границы Γ, имеющие ненулевую размерность ($\overline{\Gamma}_0+\overline{\Gamma}_1=\Gamma$).

Построим слабый дифференциал или дифференциал Гато для функционала $\Psi[f(.)]=\int\limits_{\Omega}\left\{\left|b[u(x)]\right|-\overline{\zeta}\right\}dx$, $\zeta>0$ – константа.

Сведем краевую задачу (1) с неоднородными граничными условиями на Γ_1 к краевой задаче с однородными краевыми условиями. Предположим, что может быть найдена функция $w=w(x)\in[W_2^{(2)}(\Omega)]^2$, удовлетворяющая условию $Bw=g$ на Γ_1 и условию $Aw\in[L_2(\Omega)]^2$. Если искать решение задачи (1) в виде $u=w+z$, $z\in[W_2^{(2)}]^2$, то для функции z с учетом $Bw=g$ на Γ_1 получаются условия $Az=f+Aw$ в Ω, $z_1=0$, $z_2=0$ на Γ_0, $Bz=0$ на Γ_1. По предположению $f\in[L_2(\Omega)]^2$, $Aw\in[L_2(\Omega)]^2$, так что для функции $a=f+Aw$ также справедливо $a\in[L_2(\Omega)]^2$. Задача

$$Az=a \text{ в } \Omega,\ z_1=0,\ z_2=0 \text{ на } \Gamma_0,\ Bz=0 \text{ на } \Gamma_1 \tag{2}$$

есть краевая задача с однородными граничными условиями.

Краевая задача в вариациях для задачи (2) запишется

$$A\delta z=\delta a;\ \delta z_1=\delta z_2=0 \text{ на } \Gamma_0;\ B\delta z=0 \text{ на } \Gamma_1,$$
$$\delta z(x)=sr(x),\ \delta a(x)=\delta f(x),\ \delta f(x)=s\tau(x), \tag{3}$$

где s - любое малое неотрицательное число.

С учетом $u(x)=z(x)+w(x)$, где $w(x)$ - известная функция, перейдем от функционала $\Psi[f(.)]=\int\limits_{\Omega}\left\{\left|b[u(x)]\right|-\overline{\zeta}\right\}dx$ к функционалу $F[f(.)]=$ $=\int\limits_{\Omega}\left\{\left|\omega[z(x)]\right|-\overline{\zeta}\right\}dx.$ Разобъем область Ω на три множества $\Omega^0, \Omega^+, \Omega^-$: $x\in\Omega^0$, если $\omega[z(x)]=0$; $x\in\Omega^+(\Omega^-)$, если $\omega[z(x)]>0(<0)$. Для функционала F в точке $f(.)+s\tau(.)$ имеем

$$F[f(.)+s\tau(.)]=\int\limits_{\Omega}\left|\omega[z(x)]+s\omega_z[z(x)]r(x)\right|dx+o(s)-\int\limits_{\Omega}\overline{\zeta}\,dx=$$

$$=\int\limits_{\Omega^0}s\left|\omega_z[x]r(x)\right|dx+\int\limits_{\Omega^+}\left\{\omega[z(x)]+s\omega_z[x]r(x)\right\}dx-\int\limits_{\Omega^-}\{\omega[z(x)]+$$

$$+s\,\omega_z\,[x]\,r(x)\}\,dx+o(s)-\int\limits_{\Omega}\bar{\zeta}\,d\,x,\ \omega_z\,[x]=\partial\omega[z(x)]/\partial z. \qquad (4)$$

Дифференциал Гато функционала F вычисляется по формуле

$$DF\,[\,f\,(.)\,,\tau\,(.)\,]=\frac{d}{d\,s}F\,[\,f\,\,(.)+s\tau\,(.)\,]\Big|_{\,s\,=\,0}=\int\limits_{\Omega^0}\left|\,\omega_z\,[x]\,r\,(x)\right|d\,x+$$

$$+\int\limits_{\Omega^+}\omega_z\,[x]\,r(x)\,dx-\int\limits_{\Omega^-}\omega_z\,[x]\,r(x)\,dx. \qquad (5)$$

Для исключения функции $r(x)$ найдем функции $\xi(x),\xi(x,x')$, заданные соответственно на Ω и $\Omega\times\Omega^0$, из решения следующих краевых задач, сопряженных краевой задаче в вариациях (3):

$$A\xi(x)=\rho(x)\ \text{ в }\ \Omega\ ,\ \xi_1=\xi_2=0\ \text{ на }\ \Gamma_0,\ B\xi=0\ \text{ на }\ \Gamma_1,$$

$$\rho(x)=\left\{\omega_z\,[x],\ x\in\Omega^+;\ 0,\ x\in\Omega^0;\ -\omega_z\,[x],\ x\in\Omega^-\right\};$$

$$A\xi(x,x')=\omega_z\,[x']\delta(x_1,x_1';\,x_2,x_2'),\ \xi_1=\xi_2=0\ \text{ на }\ \Gamma_0, \qquad (6)$$

$$B\xi=0\ \text{ на }\ \Gamma_1,\ x'\in\Omega^0, \qquad (7)$$

$\delta(x_1,\,x_1';\,x_2,\,x_2')=\delta(x_1-x_1')\,\delta(x_2-x_2')$ - символическая двумерная дельта-функция для прямоугольной декартовой системы координат.

Оператор A является симметричным на линеале

$$M_A=\left\{\upsilon\in\left[W_2^{(2)}\right]^2;\ \upsilon=0\ \text{ на }\ \Gamma_0;\ B\upsilon=0\ \text{ на }\ \Gamma_1\right\}.$$

Для получения окончательной формулы для дифференциала Гато $DF[\,f(.),\tau(.)]$ умножим скалярно на $\xi\,(x)$ соотношение $A\,r(x)=\tau\,(x)$ и проинтегрируем полученное выражение по области Ω. При этом, используя (6), имеем

$$\int\limits_{\Omega^+}\omega_z\,[x]r(x)\,dx-\int\limits_{\Omega^-}\omega_z\,[x]\,r(x)\,dx=\int\limits_{\Omega}\xi(x)\,\tau\,(x)\,dx. \qquad (8)$$

Умножим скалярно $A\,r\,(x)=\tau\,(x)$ на $\xi\,(x,\,x')$ и с учетом (7), запишем

$$\omega_z\,[x']\delta(x_1,x_1';\,x_2\,,x_2'\,)\,r(x)=\xi(x,x')\,\tau(x). \qquad (9)$$

Проинтегрируем (9) по области Ω

$$\int\limits_{\Omega}\omega_z\,[x']\delta(x_1,\,x_1';\,x_2,\,x_2')\,r(x)\,dx=\int\limits_{\Omega}\xi(x,x')\,\tau\,(x)\,dx. \qquad (10)$$

На основе зависимости $\int\limits_{\Omega}\omega_z\,[x']\delta(x_1,\,x_1';\,x_2\,,\,x_2')\,r(x)\,dx=\omega_z\,[x']\,r(x')$ представим (10) в виде

$$\omega_z\,[x']\,r(x') = \int_{\Omega} \xi\,(x,x')\,\tau\,(x)\,dx. \tag{11}$$

Поскольку $\delta z(x) = s r(x)$ есть решение уравнения в вариациях (3), $r(x)$ является непрерывной функцией и интеграл вида $\int \delta(x_1, x_1'; x_2, x_2') r(x) dx$ имеет смысл.

Согласно (11)

$$\int_{\Omega^0} \left|\,\omega_z\,[x']\,r(x')\right| dx' = \int_{\Omega^0} \left| \int_{\Omega} \xi(x, x')\,\tau\,(x)\,dx \right| dx'. \tag{12}$$

Произведя в (5) замену в соответствии с (8), (12), получим формулу для дифференциала Гато функционала F в точке $f(.)$ при приращении $\tau(.)$:

$$DF\big[f(.), \tau(.)\big] = \int_{\Omega^0} \left| \int_{\Omega} \xi(x, x')\,\tau\,(x)\,dx \right| dx' + \int_{\Omega} \xi(x)\,\tau\,(x)\,dx. \tag{13}$$

Если $mes\,\Omega^0 = 0$, то функционал F дифференцируем по Фреше; его производная вычисляется после решения одной задачи (6) из соотношения

$$\partial F[\,f(.)]/\partial f(.) = \xi(x). \tag{14}$$

В качестве примера рассматриваемых задач оптимального управления системами с распределенными параметрами, описываемыми уравнениями с частными производными, в которых используется соотношение (14), приведем модель стены здания в форме поиска управляющей вектор-функции $f(x) \in \big[L_2(\Omega)\big]^2$, удовлетворяющей следующей системе ограничений

$$\Psi_1[\,f(.)] \equiv \int_{\Omega} \left\{ \left| h_1[u(x)] \right| - \overline{\Theta}_1 \right\} dx \le 0,\ \ h_1[u(x)] = u_1(x),$$

$$\Psi_2[\,f(.)] \equiv \int_{\Omega} \left\{ \left| h_2[u(x)] \right| - \overline{\Theta}_2 \right\} dx \le 0,\ \ h_2[u(x)] = u_2(x), \tag{15}$$

$$\underline{f_1} \le f_1(x) \le \overline{f_1},$$

$$\underline{f_2} \le f_2(x) \le \overline{f_2}, \tag{16}$$

$$A\,u = f \text{ в } \Omega,\ A\,u = -\big[(\lambda+\mu)\ grad\,div\,u - \mu\,\Delta u\big] = f \text{ в } \Omega,$$

$$\Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2,$$

$$u = 0 \text{ на } \Gamma_0,\ Bu = g \text{ на } \Gamma_1,\ B = \big[B_1, B_2\big]^T,$$

$$B_1 u = (\lambda + 2\mu)\,\nu_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \mu\,\nu_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \lambda\,\nu_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \mu\,\nu_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_1},$$

$$B_2 u = \mu \nu_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \lambda \nu_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \mu \nu_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1}, \tag{17}$$

где ν_1, ν_2 – компоненты вектора единичной нормали ν; $\lambda > 0$, $\mu > 0$ – приведенные коэффициенты Ламе; $u = \left[u_1(x), u_2(x)\right] \in \left[W_2^{(2)}(\Omega)\right]^2$, $u_i(x)$ – компонента вектора перемещений в направлении оси x_i. Напряженно-деформированное состояние стены здания описывается смешанной плоской задачей теории упругости с оператором A для изотропного однородного тела и неоднородными неустойчивыми граничными условиями $Bu = g$ на части границы Γ_1 области $\Omega \subset R^2$ [3]; $g \in \left[L_2(\Gamma_1)\right]^2$.

Для минимизируемого функционала $\Psi_0 = \sum_{i=1}^{2} \max\left\{0, \int_\Omega \left\{ \left| h_i [u(x)] \right| - \right.\right.$ $\left.\left. -\overline{\Theta}_i \right\} dx \right\}$ дифференциал Гато (случай $\int_\Omega \left\{ \left| h_i [u(x)] \right| - \overline{\Theta}_i \right\} dx > 0$) имеет вид

$$DF_0[f(.), \tau(.)] = \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega^{0i}} \left| \int_\Omega \xi^i (x, x') \tau(x)\, dx \right| dx' + \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \xi^i(x) \tau(x)\, dx,$$

где $F_0[f(.)] = \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \left\{ \left| q_i [z(x)] \right| - \overline{\Theta}_i \right\} dx$, $\xi^i(x)$ – решение задачи (6) с $\rho(x) = \rho^i(x) = \left\{ q_z[x], x \in \Omega^{(i)+};\ 0, x \in \Omega^{(i)0};\ -q_z[x], x \in \Omega^{(i)-} \right\}$; $\xi^i(x, x')$ – решение задачи (7) с правой частью операторного уравнения, равной $q_{iz}[x'] \, \delta(x_1, x_1';\ x_2, x_2')$.

Следующая теорема выражает факт существования и единственности решения задачи (6).

Теорема 1. Пусть заданы

(i) полное нормированное векторное пространство $V = \{v \in [W_2^{(1)}(\Omega)]^2;\ \upsilon = 0 \text{ на } \Gamma_0\}$;

(ii) непрерывная билинейная форма $\alpha(\xi, z)$: $V \times V \to R$, симметричная и V – эллиптическая, то есть $\exists\, \pi > 0$, что для $\forall\, \xi \in V$ $\pi \|\xi\|^2 \le \alpha(\xi, \xi)$;

(iii) непрерывная линейная форма $L: V \to R$.

Тогда задача минимизации функционала $\overline{F} = \frac{1}{2}\alpha(\xi, \xi) - L(\xi)$ имеет единственное решение.

Билинейная форма

$$\alpha(\xi, z) = \int_\Omega [(\lambda+2\mu)\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1}\frac{\partial z_1}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1}\frac{\partial z_2}{\partial x_2} +$$

$$\mu \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2}\frac{\partial z_1}{\partial x_2} + \mu \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2}\frac{\partial z_2}{\partial x_1} +$$

$$+\mu \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1}\frac{\partial z_1}{\partial x_2} + \mu \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1}\frac{\partial z_2}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2}\frac{\partial z_1}{\partial x_1} + (\lambda+2\mu)\frac{\partial \xi_2}{\partial x_2}\frac{\partial z_2}{\partial x_2}\Big] dx$$

получена применением формулы Грина к $\int_\Omega \xi A z \, dx$, $\xi, z \in M_A$; $L(\xi) = \int_\Omega \rho \xi \, dx$.

Минимизация функционала $\overline{F}$ на V равносильна задаче (6). Минимизация функционала $\Phi = \frac{1}{2}\alpha(z, z) - l(z)$ на V, $l(z) = \int_\Omega a z \, dx$ равносильна задаче (2), $\alpha(\xi, z) = \alpha(z, \xi)$. При этом для задачи (2) справедлива теорема, аналогичная вышеприведенной. Полученные в работе конструкции производных Гато и Фреше включены в оптимизационные модули на основе штрафных функций [1], [2], вместе с программными блоками, реализующими метод суперэлементов [4] для решения прямой и сопряженных краевых задач.

О.М. Токарєва

ОПТИМІЗАЦІЯ СИСТЕМ, ЩО ОПИСУЮТЬСЯ ЕЛІПТИЧНИМИ КРАЙОВИМИ ЗАДАЧАМИ З НЕОДНОРІДНИМИ НЕСТІЙКИМИ КРАЙОВИМИ УМОВАМИ

В розвиток методів і алгоритмів на основі штрафних функцій у скінченовимірному просторі [1, 2] побудовано конструкції слабкого диференціала (диференціала Гато) та похідної Фреше по управляючих функціях для функціоналів виду кратних інтегралів з негладкими підінтегральними функціями в оптимізаційній моделі проектування механічних систем з операторними обмеженнями у формі еліптичної крайової задачі. Неоднорідні нестійкі крайові умови останньої зведено до однорідних. Подано теорему існування та єдиності розв`язку спряжених крайових задач.

O.N. Tokareva

OPTIMISATION OF SYSTEMS DESCRIBED BY ELLIPTICAL BOUNDARY-VALUE PROBLEMS WITH HETEROGENEOUS UNSTABLE BOUNDARY CONDITIONS

Construction of weak Gato differential and Freshe derivative are created within the framework of the development of methods and algorithms based on penalty functions in a finite-dimensional space [1, 2]. This is done with respect to controllihg functions for functionals like multiple integrals with nonsmooth subintegral functions in an optimisation model of design of mechanical systems with operator constraints in the form of an elliptical boundary-value problem. Heterogeneous unstable boundary conditions of the latter are reduced to homogeneous ones. The paper presents the theorem about existence and uniqueness of a solution to conjugated boundary-value problems.

1. *Токарева О.Н.* К вопросу использования одного класса оптимизационных алгоритмов для решения задач нелинейного программирования большой размерности // Кибернетика. – 1988. – 1, № 5. – С. 70 - 77, 86; 2, № 6. – С. 47–55.
2. *Токарева О.Н.* Об одном методе конечномерной оптимизации механических конструкций в пространстве состояний // Теория и вычислительные проблемы оптимизации. - Киев: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, 1993. – С.59–63.
3. *Федоренко Р.П.* Приближенное решение задач оптимального управления. – М.: Наука, 1978. – 486 с.
4. *Репях В.В.* Применение одного варианта метода суперэлементов к решению плоской задачи теории упругости // ЖВМ и МФ. – 1986. – 26, № 11. – С.1643-1653.

Получено 15.07.2003