УДК 519.1

Г.О. ШУЛІНОК

ПРО ІЗОМОРФІЗМ НАТУРАЛЬНИХ МОДУЛЬНИХ ГРАФІВ

Досліджуються натуральні модульні графи з кількістю твірних не більше двох. Наведені необхідні та достатні умови ізоморфності двох NM-графів, а також розбиття на класи ізоморфізмів.

Вступ. Натуральні модульні графи складають цікавий клас числових графів, у яких функція суміжності задається модулем різниці на множині вершин, коди яких задаються натуральними числами. Для таких графів базові алгоритми з теорії графів можуть бути набагато менш ємні як за часом так і за пам'яттю. Тому цікавою для розгляду є проблема пошуку ізоморфних графів у класі NM-графів.

Як відомо, ізоморфні графи мають ряд параметрів, які збігаються (інваріантів), серед яких такі найпростіші: а) кількість вершин; б) кількість ребер; в) вектор степенів вершин.

У даній роботі всі визначення взяті з [1]. Розглядаються графи з кількістю твірних, що не перевищують 2. Для натуральних арифметичних графів уже виконаний перелік ізоморфізмів для випадків з кількістю твірних менше 2 в [2]. Стосовно NM-графів уже відомі деякі їх властивості, наприклад, досліджено зв'язність [3], цикломатичність [4] та інше. Ці властивості дозволять провести дослідження ізоморфізму таких графів, а також здійснити перелік ізоморфних компонент.

Спочатку розглянемо NM-графи з однією твірною. Нехай $G=(X,U)$, $X\in N$, $|X|=n$, а $U=\{u\}$. З роботи [3] витікає, що для кожної твірної $u\in U$ існує рівно $n-u$ ребер. Оскільки кількість ребер у ізоморфних графах збігається, то цю умову для NM-графів з однією твірною можна висловити у вигляді наступного твердження.

Лема 1. Два NM-графи з однією твірною $G_1=(X,u)$ та $G_2=(X,v)$ ізоморфні тоді й тільки тоді, коли $u=v$.

Таким чином можна перелічити всі неізоморфні NM-графи з n вершинами та однією твірною.

У лемі 1 [4] доведено, що NM-граф $G=(X,u)$ складається з u компонент зв'язності, серед яких $\left\lceil \frac{n}{u} \right\rceil u-n$ є ланцюгами з $\left\lceil \frac{n}{u} \right\rceil -1$ вершин кожен, а решта – ланцюги з $\left\lceil \frac{n}{u} \right\rceil$ вершин кожен. Тут $\lceil x \rceil$ – найближче ціле, не менше x. Для графів з двома твірними має місце

Лема 2. Два NM-графи з двома твірними будуть ізоморфними за умови, що сума їх твірних збігається.

Доведення. У даному випадку мова йде лише про другу умову збігання інваріантів. Справді, нехай $G_1=(X,U)$, $G_2=(X,V)$, де $U=\{u_1,u_2\}$, $V=\{v_1,v_2\}$ ізоморфні. Тоді кількість ребер у них повинно збігатись, тобто

$$(n-u_1)+(n-u_2)=(n-v_1)+(n-v_2).$$

Розкривши дужки маємо $u_1+u_2=v_1+v_2$.

Ця умова не є достатньою у загальному випадку. На рис. 1 показано графи з шістьма вершинами і твірними $U=\{2,4\}$ (рис. 1, а), $V=\{1,5\}$ (рис. 1, б). Ці графи не будуть ізоморфними, хоча їх твірні задовольняють умові леми 2. З другого боку, графи з твірними $\{3, 4\}$ та $\{2, 5\}$ будуть ізоморфні (рис. 2).

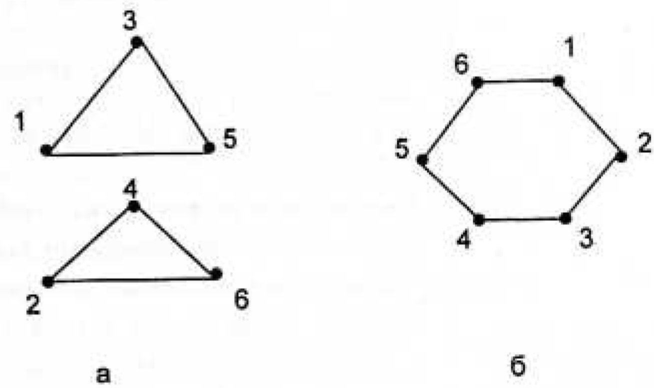

РИС. 1. Неізоморфні графи з $n=6$

Пошук достатніх умов ізоморфності більш складний ніж необхідних, хоча б тому, що однакова кількість вершин однакового степеня не гарантує ізоморфності таких графів.

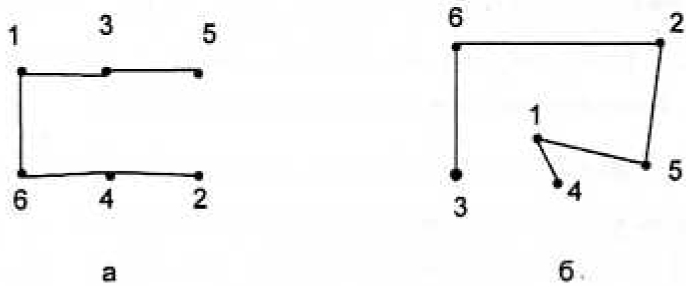

РИС. 2. Ізоморфні графи з $n = 6$

Для спрощення запису позначимо $G_n(u_1, u_2)$ – NM-граф з n вершинами та множиною твірних $U = \{u_1, u_2\}$.

Як відомо з [3] у зв'язного графа з двома твірними найбільший спільний дільник (НСД) $(u_1, u_2) = 1$, а $u_1 + u_2 \le n + 1$. Виходячи з цих умов можна довести наступне твердження.

Теорема 1. Графи $G_n(u_1, u_2)$, $G_n(v_1, v_2)$ ізоморфні, якщо

1) $u_1 + u_2 = v_1 + v_2 \in \{n, n+1\}$;

2) НСД $(u_1, u_2) =$ НСД $(v_1, v_2) = 1$

Доведення. Графи, що задовольняють цим умовам будуть, або гамільтонівським циклом ($u_1 + u_2 = n$), або гамільтонівським ланцюгом, отож їх ізоморфність очевидна.

Теорема 2. Графи $G_n(u_1, u_2)$, $G_n(v_1, v_2)$ ізоморфні, якщо $u_1 + u_2 = v_1 + v_2$, НСД $(u_1, u_2) =$ НСД $(v_1, v_2) = 1$ та $u_1 + u_2 = n - 1$.

Доведення. Графи з такими властивостями складаються з двох граней, що містять відповідно чотири вершини та $n - 1$ вершин. Накладемо менші грані одна на одну так, щоб вершини з степенем 3 одного графа (таких дві) наклались одна на такі ж другого. Залишилися ненакладеними решта $n - 4$ вершин. Однак ці вершини з'єднані у ланцюг як в одному, так і в іншому графі. Отже, наклавши ці ланцюги маємо взаємоднозначну відповідність між графами, тобто ці графи – ізоморфні.

Теорема 3. Графи з двома твірними $G_n(u_1, u_2)$, $G_n(v_1, v_2)$ не будуть ізоморфні, якщо $u_1 + u_2 = v_1 + v_2$, НСД$(u_1, u_2) =$ НСД$(v_1, v_2) = 1$ та $u_1 + u_2 < n - 1$.

Доведення. Нехай є два графи $G_n(u_1, u_2)$, $G_n(v_1, v_2)$, для яких виконуються умови теореми, і вони ізоморфні. Далі нехай $\varphi: X_1 \to X_2$ – взаємнооднозначна функція, що переводить вершини першого графа у вершини другого.

Маємо, грань довжини u_1+u_2, що складається з u_1+u_2 вершин вигляд 1, $1+u_1, 1+2u_1, \ldots, 1+ku_1=u_1+u_2$, $u_1, 2u_1, ku_1$, де k – розв'язок рівнян $(k-1)u_1=u_2-1$. Тоді в ізоморфному графі ця грань має вигляд

$$\varphi(1), \varphi(1+u_1), \varphi(1+2u_1), \ldots, \varphi(1+ku_1=u_1+u_2), \varphi(u_1), \varphi(2u_1), \varphi(ku_1).$$

Проте, ця грань у другому графі утворюється тільки тим способом, що й першому, тобто $1, 1+v_1, 1+2v_1, \ldots, 1+lv_1=v_1+v_2, v_1, 2v_1, lv_1$, де l – отримуєть аналогічно зі співвідношення $(l-1)v_1=u_2-1$. Перевіримо степені вершин, входять у грані починаючи з вершин u_1, v_1 відповідно. Степені вершин варі ються від 2 до 4, проте неважко помітити, що послідовність відповідних степе нів не збігається у зазначених послідовностях. А це суперечить тому, що граф ізоморфні. Теорема доведена.

Теорема 4. Графи з двома твірними $G_n(u_1,u_2)$, $G_n(v_1,v_2)$ не будуть ізомо фні, якщо $u_1+u_2=v_1+v_2$, НСД$(u_1,u_2)=$ НСД$(v_1,v_2)=1$ та $u_1+u_2>n+1$.

Доведення. Такі графи не будуть звязні, більш того, в таких графах не бу збігатись вектор степенів вершин, оскільки кількість вершин з степенем залежить від величини більшої твірної.

Однак не всі незвязні графи будуть неізоморфними. Для деяких з них м місце така властивість.

Теорема 5. Графи з двома твірними $G_n(u_1,u_2)$, $G_n(v_1,v_2)$ у як $u_1+u_2=v_1+v_2$, НСД$(u_1,u_2)=$ НСД$(v_1,v_2)=c>1$, ізоморфні тоді й тіль тоді, коли графи $G_{\left\lceil \frac{n}{c}\right\rceil}(\frac{u_1}{c},\frac{u_2}{c})$ та $G_{\left\lceil \frac{n}{c}\right\rceil}(\frac{v_1}{c},\frac{v_2}{c})$ ізоморфні.

Доведення. Графи, що зазначені в умові теореми, мають c компоне зв'язності. А тому ізоморфізм таких графів можливий лише за умови ізомор ності компонент, що в них входять. А ці компоненти складають $n(\mathrm{mod}\, c)$ граф з кількістю вершин $\left\lceil \frac{n}{c}\right\rceil$ та $c-n(\mathrm{mod}\, c)$ графів з кількістю вершин $\left\lfloor \frac{n}{c}\right\rfloor$. Як графи з кількістю вершин $\left\lceil \frac{n}{c}\right\rceil$ ізоморфні, то ізоморфні й графи з кількістю ве шин $\left\lfloor \frac{n}{c}\right\rfloor$, тому що останні є підграфи перших. Звідси витікає, що $G_n(u_1,u_2$

$G_n(v_1, v_2)$ ізоморфні за умови ізоморфності похідних графів $G_{\left\lceil \frac{n}{c} \right\rceil}(\frac{u_1}{c}, \frac{u_2}{c})$ та $G_{\left\lceil \frac{n}{c} \right\rceil}(\frac{v_1}{c}, \frac{v_2}{c})$.

Висновки. У даній роботі продовжено дослідження ізоморфізму числових графів. На відміну від звичайних графів, числові графи дозволяють не тільки ефективно визначати ізоморфність, а й розбити графи на класи ізоморфізмів.

Далі буде продовжене дослідження ізоморфності як для NA-графів, так і для NM-графів з довільною кількістю твірних.

Г.А. Шулинок

ОБ ИЗОМОРФИЗМЕ НАТУРАЛЬНЫХ МОДУЛЬНЫХ ГРАФОВ

Исследуются натуральные модульные графы с количеством образующих не превышающим 2. Приведены необходимые и достаточные условия изоморфности таких графов и предложен способ разбиения данных графов на классы изоморфизмов.

G.A. Shulinok

ABOUT NATURAL MODULAR GRAPHS ISOMORPHISM

Natural modular graphs with number of geneatrixes not greater then 2 are considered. Necessary and Sufficient conditions for isomorphism of two NM-graphs with two geneatrixes are listed. Divorce onto separate isomorphic classes is provided.

1. *Шулинок И.Э.* Об одном классе числовых графов // Теория и приложения методов оптимизации. – Киев: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, 1998. – С. 24–29.
2. *Донец Г.А, Шулинок Г.А.* Об изоморфизме натуральных арифметических графов // Теория оптимальных решений. – Киев: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины. – 2003. – С. 47–53.
3. *Шулинок И.Э.* О связности натуральных модульных графов // Кибернетика и системный анализ. – 1998. – № 5. – С. 50–53.
4. *Шулинок И.Э.* О связности и цикломатическом числе натуральных модульных графов // Теория оптимальных решений. – Киев: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины.– 1999. – С. 51–57.

Отримано 05.06.2004