Теорія оптимальних рішень

УДК 519.8

Ф.А. ШАРИФОВ

АЛГОРИТМЫ НАХОЖДЕНИЯ НИЖНЕЙ ОЦЕНКИ ДЛЯ ЗАДАЧИ СИНТЕЗА СЕТИ С ЗАДАННОЙ ВЕРШИННОЙ СВЯЗНОСТЬЮ

Рассматривается задача синтеза сетей с заданными вершинными связностями. Предлагаются два эффективных алгоритма для нахождения нижней оценки по функционалу для рассматриваемой задачи.

В последнее время изучаются различные постановки задачи синтеза сетей и, как правило, их математические модели относятся к труднорешаемому классу задач дискретного программирования. Интерес к этим задачам обуславливается широкими возможностями их приложений. Нахождение решения данных задач сопряжено с большими трудностями. В данной работе предлагается два эффективных алгоритма нахождения нижней оценки для следующей задачи проектирования сетей.

Пусть задан неориентированный граф $G=(V,E)$ с множеством вершин V и множеством ребер E. Заданы множество терминальных вершин или узлов $N \subseteq V$ и неотрицательные веса c_e для всех ребер e из E, а также некоторые положительные числа r_v для каждой вершины из $v \in V$. Задача проектирования сети с заданной вершинной связностью (ЗПСВ) состоит в нахождении такого подграфа G^* графа G, в котором число реберно-непересекающихся путей между парами узлов $v,w \in N$ не меньше чем $\max\{r_v,r_w\}$, и вес G^*, определяемый как сумма весов его ребер, минимальный.

Если $N=\{s,r\}$ ($|N|=2$) то ЗПСВ, эквивалентна нахождению $\max\{r_s,r_r\}$ реберно-непересекаюшихся путей, соединяющих узлы s и r, с минимальной суммой весов ребер этих путей. В этом случае решение

ЗПСВ можно найти за время $O(n^3)$ (n – число вершин сети G) путем нахождения потока минимальной стоимости на сети G с источником s и стоком r при единичных пропускных способностях всех ребер G. Если в ЗПСВ $\max\{r_v, r_w\} = 1$, то в этом случае ЗПСВ является задачей Штейнера на графе (ЗШГ) G, состоящей в нахождении такого дерева T, которое связывает все узлы из N и имеет минимальную сумму весов ребер (вес дерева T) среди всех подобных деревьев. Известно, что ЗШГ NP-полная задача и как следствие этого ЗПСВ тоже NP-полная задача.

Другими классами задач, близкими к ЗПСВ, являются задачи синтеза древовидных сетей или задачи синтеза с одним источником и многими стоками (ЗСДС) [1–4]. Для решения ЗСДС применяется общая схема метода ветвей и границ, в которой для нахождения нижней оценки методом динамической декомпозиции решается задача, являющаяся LP-релаксацией ЗСДС. В работах [1–4] предложены алгоритмы нахождения нижней оценки путем приближенного решения двойственной задачи к LP-релаксации ЗСДС. Приведены результаты численного эксперимента решения ЗСДС методом ветвей и границ, которые показывают высокую эффективность предложенных алгоритмов нахождения нижней и верхней оценок.

В случае, когда $N = V$, ЗПСВ эквивалентна задаче синтеза прочных сетей (ЗСПС) минимальной стоимости [5]. Когда G есть полный граф, и веса его ребер удовлетворяют неравенству треугольника, LP релаксации задачи коммивояжера (ЗКГ) и ЗПСВ эквивалентны [5, 6]. Поэтому при решении ЗПНС могут быть использованы методы нахождения нижних оценок для ЗКГ.

Для формулировки математической модели ЗПСВ в терминах потоковых переменных обозначим x_{ij}^{sr} – неизвестное количество потока на ребре (i, j), идущего от узла s к узлу r. Математическая модель ЗПСВ с этими переменными имеет следующий вид:

найти
$$\min \sum_{e \in E} c_e x_e \qquad (1)$$

при ограничениях

$$\sum_{j \in \delta(i)} x_{ij}^{sr} - \sum_{j \in \delta(i)} x_{ji}^{sr} = \begin{cases} n_{sr}, & \text{при} \quad i = s, \\ 0, & \text{при} \quad i \neq s, r, \ i \in V, \quad s, r \in N, \\ -n_{sr}, & \text{при} \quad i = r, \end{cases} \qquad (2)$$

$$0 \le x_{ij}^{sr} \le x_e, \ s, r \in N, \ e = (i, j) \in E, \qquad (3)$$

$$x_e \le 1, \quad e \in E, \qquad (4)$$

$$x_e = 0 \vee 1, \quad e \in E, \qquad (5)$$

где $n_{sr} = \max\{r_s, r_r\}$ для $s, r \in N$, $\delta(i)$ – множество ребер графа G с одной конечной вершиной i.

В работе [5] относительно ЗСПС доказана теорема 3, утверждающая, что если сеть представляется полным графом G, то можно считать, что веса ее ребер удовлетворяют неравенству треугольника. Отмечается, что ЗШГ и задача синтеза k-связанной сети являются частными случаями ЗСПС и поэтому то же самое верно при рассмотрении этих задач на сети G. Поэтому, если веса некоторых ребер не удовлетворяют неравенству треугольника, то их веса заменяются длинами кратчайших путей, соединяющих их конечные вершины. При этом решения вышеперечисленных задач не изменяются. Не трудно понять, что двойственная задача к (1) – (5) может быть преобразована к следующему виду:

найти
$$\max \sum_{s,r\in N} (n_{sr}(u_r^{sr} - u_s^{sr}) - \sum_{e\in E} w_e^{sr}) \qquad (6)$$

при ограничениях

$$u_j^{sr} - u_i^{sr} \le w_e^{sr}, \quad e=(i,j)\in E, \quad s,r\in N, \qquad (7)$$

$$\sum_{sr\in N} w_e^{sr} \le c_e + z_e, \quad e=(i,j)\in E, \qquad (8)$$

$$z_e \ge 0, \quad w_e^{sr} \ge 0, \quad e=(i,j)\in E, \quad s,r\in N. \qquad (9)$$

Так как ЗПСВ – NP-полная задача, то для решения применяется общая схема метода ветвей и границ. С целью улучшения эффективности метода ветвей и границ, предложим эффективные алгоритмы нахождения нижней оценки $F(lower)$ для целевой функции ЗПСВ, которую найдем путем решения задачи (6) – (9), и на базе полученной информации можно определять верхнюю оценку. В методе ветвей и границ при решении подобных задач используются различные правила ветвления для того, чтобы отбросить большое количество неперспективных ветвлений из дерева решения. Так как ЗПВС, ЗШГ, ЗКГ и ЗСДС являются родственными задачами, то при применении метода ветвей и границ для решения ЗПНС целесообразно применить правило ветвления, в котором используются идеи ветвления, рассмотренные в работах [1, 2, 6] при решении ЗШГ, ЗКГ и ЗСДС.

В задаче (6) – (9), если положить $w_e^{sr} = 0$ для всех $e\in E$, то получим двойственную задачу к LP– релаксации ЗШГ. Следовательно, можем применять правило ветвления, в котором выбирается переменная x_{ij}, соответсвующая ребру (i,j), и концевые вершины имеют максимальную степень в графе с множеством ребер $\{(i,j); x_{ij} > 0\}$. При применении этого правила ветвления получается, что текущее значение $F(lower)$ становится больше, чем найденное рекордное значение целевой функции, и дальнейшее ветвление задачи с нулевым значением переменной x_{ij} бесперспективно. Такое правило ветвления согласуется с методом штрафования вершин, применяемых для нахождения приближенного решения ЗКГ в [6], и правилом ветвления, используемым в [1, 2] при решении ЗСДС.

Для нахождения нижней оценки предложим простой, строго полиномиальный алгоритм. Сначала отметим следующее простое, но важное свойство задачи (6) – (9).

Утверждение. Существует оптимальное решение u_v^{sr}, w_{ij}^{sr}, $s,r \in N$, $(i,j) \in E$ задачи (6) – (9) для которого

$$w_{ij}^{sr} = \max\{0, u_j^{sr} - u_i^{sr}\}, \;\; s,r \in N, (i,j) \in E.$$

Доказательство. Допустим для некоторых $s,r \in N$ и $(i,j) \in E$, $u_j^{sr} - u_i^{sr} > 0$ для некоторых $s,r \in N$. В этом случае, уменьшая значение w_{ij}^{sr} до величины $u_j^{sr} - u_i^{sr}$, получаем $w_{ij}^{sr} = u_j^{sr} - u_i^{sr}$. Если $u_j^{sr} - u_i^{sr} < 0$, то положим $w_{ij}^{sr} = 0$. Ясно, что при этом значение целевой функции (6) не уменьшится. Поэтому можно предположить, что $w_{ij}^{sr} = \max\{0, u_j^{sr} - u_i^{sr}\}$ для всех $(i,j) \in E$ и $s,r \in N$.

В силу утверждения, решение задачи (6) – (9) можно найти с помощью следующего алгоритма, который весьма близкий к алгоритмам, применяемым при решении ЗСДС [1] и задач размещения, рассмотренных в [2, 3]. Алгоритм решения задачи состоит из двух этапов. В начале первого этапа работы алгоритма полагаем $w_{ij}^{sr} = 0$ для всех $(i,j) \in E$ и $s,r \in N$. Произвольным образом фиксируем вершины s,r из N. Пусть определены значения переменных w_{ij}^{sr} для всех $(i,j) \in E$ и для просматриваемой вершины s,r из N. Обозначим G_{sr} подграф G, соответствующий вершинам и дугам, лежащим на кратчайших путях, соединяющих вершину s с вершиной r, с весами ребер w_{ij}^{sr}. Сначала G_{sr} состоит из одной вершины s. В G_{sr} выделяется некоторый разрез R_{sr} (вначале $R_{sr} = \delta(s)$), отделяющий источник s от вершины, обладающий тем свойством, что $c_{ij} := c_{ij} - \sum_{v \in N \setminus s} w_{ij}^{sv}$ на ребрах разреза R_{sr}. Если для данной вершины не существует такого разреза, то вершина s исключается из множества N. Далее произвольным образом фиксируется другая вершина s_1 из N. Пусть $\delta_1 = \min\{c_{ij}; (i,j) \in R_{sr}\}$, l_{sr}-длина кратчайшего пути из s в r. Положим $\delta_2 = l'_{sr} - l_{sr}$, где l'_{sr} – длина кратчайшего пути в графе $G = (V, E \setminus R_{sr})$ с модифицированными весами c_{ij} ребер. Пусть $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Найдем новые значения

$$w_{ij}^{sr} = \begin{cases} w_{ij}^{sr} + \delta, & \text{для } (i,j) \in R_{sr} \\ w_{ij}^{sr}, & \text{для } (i,j) \notin R_{sr} \end{cases},$$

и положим $F(lower) = F(lower) + \delta$. В начале работы алгоритма $F(lower) = 0$. Если все вершины исключены из множества N, то первый этап алгоритма завершает свою работу. В противном случае фиксируется ранее не фиксированная вершина t, k из N, и этот процесс продолжается относительно разреза R_{tk} и модифицированных весов для ребер графа G.

Пусть G_0 подграф G с множеством ребер $E_0 = \{(i, j); c_{ij} = 0\}$. Во втором этапе алгоритма находим два реберно-непересекающихся минимальных путей (их длину обозначим l_1, l_2) между вершинами s и r для всех $s, r \in N$. Понятно, что $l_1 = 0$. Если $l_2 > 0$, то не все ребра второго пути принадлежат к E_0. В этом случае, положив $c_e = z_e = l_2$ для некоторого ребра e разреза R_{sr}, повторяем первый этап алгоритма $n_{sr} - 2$ раз для $s, r \in N$. Так как после каждого шага получаем $c_e = 0$ хотя бы для одного ребра $e \in E$, то число шагов алгоритма, в которых определяются значения δ, не может быть больше, чем n^2. Если после каждого шага на графе G оставлять ребра $e \in E$, для которых $c_e > 0$, то разрез R_{sr} можно построить за время n^2. Поэтому временная сложность алгоритма оценивается как $O(n^4 \mid N \mid)$.

Рассмотрим более простой алгоритм для нахождения $F(lower)$. Этим алгоритмом сначала определяются значения переменных u_v^{sr} для всех вершин $v \in V$ и для некоторых фиксированных вершин s, r из N. Согласно утверждению значения переменных w_{ij}^{sr} для всех $(i, j) \in E$ и данных просмотренных вершин s, r, определяются из равенства

$$w_{ij}^{sr} = \max\{0, u_j^{sr} - u_i^{sr}\}, \quad s, r \in N, \ (i, j) \in E.$$

Произвольным образом фиксируем некоторую вершину s, r из N. Решаем задачу нахождения потока (с величиной n_{sr}) минимальной стоимости на графе G с источником s и стоком r с единичными пропускными способностями и весами c_e для всех ребер $e \in E$. Тем самым определяем значения потенциалов y_v для вершин v из V и n_{sr} реберно-непересекающихся путей. Ясно, что $y_s = 0$ и y_r – длина последнего кратчайшего пути, соединяющего s, r. По значениям y_v находим значения переменных u_v^{sr}, w_{ij}^{sr} для всех $(i, j) \in E$ следующим образом. Сначала положим $u_s^{sr} = 0$, $u_r^{sr} = y_r$ и считаем, что вершины s, r просмотрены и проанализированы. Пусть $\delta(s)$ – множество вершин, смежных с вершиной s. Для вершины v из $\delta(s)$ определим значения переменных u_v^{sr}:

$$u_v^{sr} = u_r^{sr}, \text{ если } y_v > y_r \text{ и } u_v^{sr} = y_v, \text{ если } y_v \leq y_r.$$

Считаем, что вершины из $\delta(s) \setminus \{s, r\} = V_0$ просмотрены, но не проанализированы, а вершины из $V \setminus V_0$ не просмотрены и не проанализированы. Среди просмотренных и непроанализированных вершин находим $v \in V_0$ такую, что $u_v^{sr} = \max\{u_w^{sr}; w \in V_0\}$. Заменив s на v, вышеуказанным способом определяем значения переменных u_w^{sr} для всех вершин из $V_0 \setminus \delta(v)$. После этого считаем, что вершина v просмотрена и проанализирована, и если $V \setminus V_0 \neq \phi$ то среди просмотренных и не проанализированных снова находим вершину t, для которой $u_t^{sr} = \max\{u_w^{sr}; w \in V_0\}$, и таким же способом определяем значения переменных u_w^{sr} для всех вершин из $V \setminus \delta(v)$. Если $V \setminus V_0 = \phi$, то все вершины V являются просмотренными и анализированными. В этом случае, в силу утверждения, положим $w_{ij}^{sr} = \max\{0, u_j^{sr} - u_i^{sr}\}$, $s, r \in N$, $(i, j) \in E$.

Из теории двойственности линейного программировании ясно, что только для ребер первых $n_{sr} - 1$ кратчайших путей могут быть $c_{ij} > u_j^{sr} - u_i^{sr}$. Поэтому для ребер этих путей положим $z_{ij} = \max\{0, u_j^{sr} - u_i^{sr} - c_{ij}\}$. После чего модифицируем значения весов $c_{ij} = \max\{0, c_{ij} + w_{ij}^{sr}\}$ для всех ребер (i, j) из E. Произвольным образом выбираем ранее не фиксированные вершины t, k из N и вышеизложенным способом снова определяем значения всех переменных с индексами t, k. Если все пары вершины из N фиксированы, то алгоритм завершает свою работу. Нетрудно понять, что таким образом определенные значения переменных u_v^{sr}, w_{ij}^{sr}, $s, r \in N$, $(i, j) \in E$ удовлетворяют ограничениям задачи (6) – (9) и поэтому соответствующее значение целевой функции (6) является нижней оценкой для ЗПВС.

Трудоемкость описанного алгоритма в основном определяется трудоемкостью $O(n^2)$ построения дерева кратчайших путей в графе G с неотрицательными весами ребер при фиксированной вершине r из N. Определение значения переменных u_v^{sr}, w_{ij}^{sr} требует $O(m)$ или $O(n^2)$ времени. Поэтому временная сложность алгоритма оценивается как $O(2n^3 |N|)$.

Ф.А. Шаріфов

АЛГОРИТМИ ДЛЯ ЗНАХОДЖЕННЯ НИЖНЬОЇ ОЦІНКИ ДЛЯ ЗАДАЧІ СИНТЕЗУ МЕРЕЖІ ІЗ ЗАДАНОЮ ВЕРШИННОЮ ЗВ'ЯЗНІСТЮ

Розглядається задача синтезу мережі мінімальної вартості за умови, що між двома вершинами мережі число шляхів визначається із заданим числом зв'язності вершин. Пропонуються два алгоритми для знаходження нижньої оцінки за функціоналом для цієї задачі. Їх можна ефективно використовувати у методі галузей та кордонів.

F.A. Sharifov

ALGORITHMS FOR FINDING A LOWER BOUND FOR DESIGN NETWORK PROBLEMS WITH GIVEN NODE CONNECTIVITY.

Consider a design minimum cost network problem, with requirement that in the network to be exist at least given number paths between every pair of distinct nodes. We propose effective algorithms to computer lower bound on a objective function of this problem. These algorithms can be used to find lower and upper bounds in the branch and boundsethod .

1. *Михалевич В.С., Трубин В.А., Шор Н.З.* Оптимизационные задачи производственно-транспортного планирования. – М.: Наука, 1988. – 259 с.
2. *Трубин В.А., Шарифов Ф.А.* Общая задача размещения // Теория и вычислительные проблемы оптимизации. – Киев: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, 1993. – С. 16–20.
3. *Шарифов Ф.А., Прудкой Ю.И., Фигурская И.Л., Трубина Е.В.* Задача синтеза интегрированных цифровых сетей // Методы решения экстремальных задач. – Киев: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, 1996. – С. 10–14.
4. *Шарифов Ф.А.* Задача синтеза надежных сетей // Кибернетика и системный анализ. – 2000. –№ 4. – С. 145–156.
5. *Goemans M.X., Bertsimas D. J.* Survivable networks, linear programming relaxations and the parsimonious property // Math.Prog. – 1993. – **60**. –P. 145–166.
6. *Cook W.J., Cunningham W.H., Pulleyblank W., Schrijver S.* Combinatorial optimization. – New-York: Jonh Wiley - Sons. INC, 1998. – 338 p .

Получено 03.05.2004