Теорія оптимальних рішень

УДК 518.9

И.И. МАТИЧИН, К.А. ЧИКРИЙ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИГРЫ С ИМПУЛЬСНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

Рассматриваются дифференциальные игры с импульсным управлением обоих игроков. Для данного класса дифференциальных игр получены достаточные условия разрешимости задачи сближения. Теоретические результаты иллюстрируются на примере игры преследования с простым движением. Основой для исследования указанных задач является метод разрешающих функций.

Введение. Динамические системы с импульсным воздействием давно заинтересовали исследователей ввиду большого практического значения. Среди последних работ, посвященных вопросам управления импульсными системами, [1, 2]. В настоящей работе изучаются линейные дифференциальные игры, в которых управляющее воздействие игроков имеет импульсный характер, что выражается с помощью дельта-функции Дирака [3]. Для данного класса игр ставится задача сближения с терминальным множеством. На основе метода разрешающих функций [4, 5] получены достаточные условия разрешимости задачи сближения. Теоретические результаты иллюстрируются на примере игры преследования с простым движением.

Рассмотрим линейную управляемую динамическую систему, эволюция которой описывается уравнением

$$\dot{z} = Az + u - v, \ z \in \mathbf{R}^m. \tag{1}$$

Здесь z – фазовый вектор системы; A – квадратная матрица порядка m; $u = u(t)$ – управление игрока P (преследователя); $v = v(t)$ – управление игрока E (убегающего).

Пусть $\{\tau_i\}$, $\{\eta_j\}$ – последовательности моментов времени, пронумерованных в порядке возрастания, такие, что любой компактный отрезок $[a, b]$ содержит конечное число точек этих последовательностей.

Предположим, что управления обоих игроков, как преследователя, так и убегающего, имеют импульсный характер и представимы в виде

$$u(t)=\sum_{i=0}^{\infty}u_i\delta(t-\tau_i),\quad v(t)=\sum_{j=0}^{\infty}v_j\delta(t-\eta_j),\tag{2}$$

где $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака [3], векторы скачков преследователя u_i принадлежат компакту U, $U\subset\mathbf{R}^m$, а векторы скачков убегающего v_j – компакту V, $V\subset\mathbf{R}^m$.

Согласно [6], если управления игроков имеют вид (2), система (1) имеет единственное решение при любом начальном условии

$$z(\tau_0)=z_0,\quad \tau_0=0.\tag{3}$$

При этом данное решение является абсолютно непрерывным на интервалах между моментами скачков $\{\tau_i\}$, $\{\eta_j\}$, $i,j\in\mathbf{N}\bigcup\{0\}$ (здесь и далее $\mathbf{N}$ – множество натуральных чисел).

Задача преследователя состоит в том, чтобы определенным образом выбирая векторы скачков u_i, $u_i\in U$, за конечное время вывести траекторию системы (1) на цилиндрическое терминальное множество M^*, которое имеет вид

$$M^*=M^0+M,\tag{4}$$

где M^0 – линейное подпространство из $\mathbf{R}^m$; M – непустой компакт из ортогонального дополнения L к M^0 в пространстве $\mathbf{R}^m$.

Задача убегающего противоположна – избежать встречи с терминальным множеством M^*.

Введем обозначения $J_0=\varnothing$, $J_i=\{j\in\mathbf{N}\bigcup\{0\}:\eta_j\in[\tau_{i-1},\tau_i)\}$, $i\in\mathbf{N}$, и рассмотрим множества

$$W_i(n,\{v_j\})=\pi e^{A(\tau_n-\tau_i)}U-\sum_{j\in J_i}\pi e^{A(\tau_n-\eta_j)}v_j,\tag{5}$$

$$W_i(n)=\pi e^{A(\tau_n-\tau_i)}U\overset{*}{-}\sum_{j\in J_i}\pi e^{A(\tau_n-\eta_j)}V,\ i=0,\ldots,n.\tag{6}$$

Здесь и в дальнейшем используются следующие обозначения: π – оператор ортогонального проектирования из $\mathbf{R}^m$ на L; e^{At} – фундаментальная матрица однородной системы $\dot z=Az$.

Следующее условие представляет собой аналог требования, известного в теории дифференциальных игр как условие Понтрягина [7].

Условие 1. Множества $W_i(n)$ непусты при всех n, i, $n\in\mathbf{N}\bigcup\{0\}$, $i=0,\ldots,n$.

В силу условия 1 можно выбрать из каждого множества $W_i(n)$ некоторый элемент $w_i(n)$. Зафиксируем некоторый набор $\omega=\omega(n)=\{w_i(n)\}_{i=0}^{n}$ и положим

$$\xi(n,z,\omega)=\pi e^{A(\tau_n-\tau_0)}z+\sum_{i=0}^{n}w_i(n).$$

Введем функции

$$\tilde{\alpha}_i(n,z,\{v_j\},\omega)=\sup\{\alpha\ge 0:\alpha(M-\xi(n,z,\omega))\bigcap(W_i(n,\{v_j\})-w_i(n))\ne\varnothing\}. \quad (7)$$

Обозначим

$$k=k(n,z,\{v_j\},\omega)=\min\left\{j\in\{0,\ldots,n\}:\sum_{i=0}^{j}\tilde{\alpha}_i(n,z,\{v_j\},\omega)\ge 1\right\}, \quad (8)$$

если неравенство в фигурных скобках не выполняется ни при одном j, $j\in\{0,\ldots,n\}$, положим $k=n+1$. Определим разрешающие функции [4]

$$\alpha_i(n,z,\{v_j\},\omega)=\begin{cases}\tilde{\alpha}_i(n,z,\{v_j\},\omega), & i=0,\ldots,k-1,\\ 1-\sum_{j=0}^{k-1}\tilde{\alpha}_i(n,z,\{v_j\},\omega), & i=k,\\ 0, & i=k+1,\ldots,n.\end{cases} \quad (9)$$

Можно показать, если множества U и M выпуклы, то для определенных таким образом разрешающих функций при $n\in\mathbf{N}\bigcup\{0\}$, $i=0,\ldots,n$, $z\in\mathbf{R}^m$, $v_j\in V$, $w_i(n)\in W_i(n)$, справедливы соотношения

$$\tilde{\alpha}_i(n,z,\{v_j\},\omega)(M-\xi(n,z,\omega))\bigcap(W_i(n,\{v_j\})-w_i(n))\ne\varnothing. \quad (10)$$

Введем также функцию

$$N(z,\omega)=\min\left\{n\in\mathbf{N}\bigcup\{0\}:\sum_{i=0}^{n}\inf_{\{v_j\}}\alpha_i(n,z,\{v_j\},\omega)=1\right\}. \quad (11)$$

Если равенство в фигурных скобках не выполняется ни при одном n, положим $N(z,\omega)=+\infty$.

Теорема. Если для системы (1) при импульсном управлении игроков (2) выполнено условие 1, множества U и M выпуклы, для начального состояния z_0 и некоторого набора ω $N(z_0,\omega)<+\infty$ и при этом $\eta_j\ne\tau_{N(z_0,\omega)}$, $j\in\mathbf{N}\bigcup\{0\}$, то траектория системы (1) может быть приведена на терминальное множество (4) в момент $\tau_{N(z_0,\omega)}$.

Доказательство теоремы вытекает из представления

$$\pi z(\tau_N)=\pi e^{A(\tau_N-\tau_0)}z_0+\sum_{i=0}^{N}\left(\pi e^{A(\tau_N-\tau_i)}u_i-\sum_{j\in J_i}\pi e^{A(\tau_N-\eta_j)}v_j\right), \quad (12)$$

которое следует из формулы Коши для системы (1) и свойств дельта-функции.

Пример. Проиллюстрируем вышеизложенные результаты на примере игры с простым движением. Пусть динамика системы задается уравнением

$$\dot{z}=u-v,\ z\in\mathbf{R}^m.$$

Пусть терминальное множество состоит из одной точки $M^* = \{0\}$. Тогда $M^0 = \{0\}$, $M = \{0\}$. Поэтому $L = \mathbf{R}^m$, а π представляет собой оператор тождественного преобразования и задается единичной матрицей E. Матрица A – нулевая, поэтому $e^{At} = E$.

Предположим, что $\tau_i = iP$, $\eta_j = jQ$, где P, Q – некоторые периоды, причем $Q < P$. Управление преследователя $u = u(t)$ и убегающего $v = v(t)$ имеет вид

$$u(t) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \delta(t - iP),\ v(t) = \sum_{j=0}^{\infty} v_j \delta(t - jQ),$$

где $u_i \in U = \rho S$, $v_j \in V = \sigma S$. Здесь и далее S – замкнутый шар единичного радиуса с центром в нуле.

В данном случае $J_0 = \varnothing$, $J_i = \{ j \in \mathbf{N} \cup \{0\} : jQ \in [(i-1)P, iP)\}$, $i \in \mathbf{N}$, т.е. $|J_i| = \left[\frac{P}{Q}\right]$, $i \in \mathbf{N}$, где $[x]$ – целая часть числа x, $|J_i|$ – мощность множества J_i.

Согласно (5), (6) имеем

$$W_0(n, \{v_j\}) = W_0(n) = W_0 = \rho S,\ W_i(n, \{v_j\}) = \rho S - \sum_{j \in J_i} v_j,$$

$$W_i(n) = W_i = \rho S \overset{*}{-} \sum_{j \in J_i} \sigma S = \rho S \overset{*}{-} |J_i| \sigma S = \rho S \overset{*}{-} \left[\frac{P}{Q}\right] \sigma S,\ i = 1, \ldots, n.$$

Таким образом, условие 1 будет выполнено, если справедливо неравенство $\rho \geq \left[\frac{P}{Q}\right]\sigma$. При этом $W_0(n) = \rho S$, $W_i(n) = \left(\rho - \left[\frac{P}{Q}\right]\sigma\right) S$, $i = 1, \ldots, n$, и множества $W_i(n)$ содержат нулевой вектор при всех n, i, $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, $i = 0, \ldots, n$. Положим $w_i(n) \equiv 0$ для всех i, n. Тогда

$$\xi(n, z, \omega) = z.$$

Обозначим $\Psi_0 = 0$, $\Psi_i = \sum_{j \in J_i} v_j$, $i \in \mathbf{N}$, и найдем, чему равны разрешающие функции:

$$\tilde{\alpha}_i(n, z, \{v_j\}, \omega) = \sup\{\alpha \geq 0 : -\alpha z \in \rho S - \Psi_i\}. \tag{13}$$

Функции (13) могут быть найдены в явном виде из уравнений

$$\|\Psi_i - \alpha z\| = \rho,$$

решая которые получим

$$\tilde{\alpha}_i(n,z,\{v_j\},\omega)=\frac{(z,\Psi_i)+\sqrt{(z,\Psi_i)^2+\|z\|^2(\rho^2-\|\Psi_i\|^2)}}{\|z\|^2}.$$

Нетрудно видеть, что

$$\inf_{\{v_j\}}\tilde{\alpha}_0(n,z,\{v_j\},\omega)=\frac{\rho}{\|z\|},$$

$$\inf_{\{v_j\}}\tilde{\alpha}_i(n,z,\{v_j\},\omega)=\frac{\rho-[\frac{P}{Q}]\sigma}{\|z\|},\ i=1,\dots,n, \tag{14}$$

причем минимум достигается при $\Psi_i=-\sigma\left[\frac{P}{Q}\right]\frac{z}{\|z\|}$, т. е. в случае, когда $v_j=-\sigma\frac{z}{\|z\|}$ для всех j.

Из формул (11), (14) следует, что при $\|z\|\le\rho$

$$N(z,\omega)=0,$$

а при $\|z\|>\rho$

$$N(z,\omega)=N(z)=\begin{cases}\dfrac{\|z\|-\rho}{\rho-[\frac{P}{Q}]\sigma}, & \dfrac{\|z\|-\rho}{\rho-[\frac{P}{Q}]\sigma}\in\mathbf{N},\\ \left[\dfrac{\|z\|-\rho}{\rho-[\frac{P}{Q}]\sigma}\right]+1, & \dfrac{\|z\|-\rho}{\rho-[\frac{P}{Q}]\sigma}\notin\mathbf{N},\end{cases}$$

и поимка происходит в момент $\tau_{N(z_0)}$, если только $\eta_{N(z_0)}\ne\tau_{N(z_0)}$.

Заключение. Полученные результаты показывают, что метод разрешающих функций может эффективно применяться для изучения дифференциальных игр с импульсным управлением.

Развитие данной работы будет направлено на исследование дифференциальных игр с участием групп игроков, обладающих импульсным управлением.

І.І. Матичин, К.А. Чикрій

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ІГРИ З ІМПУЛЬСНИМ КЕРУВАННЯМ

Розглядаються диференціальні ігри з імпульсним керуванням обох гравців. Для цього класу диференціальних ігор отримано достатні умови розв'язності задачі зближення. Теоретичні результати ілюструються на прикладі гри переслідування з простим рухом. Основою для дослідження зазначених задач є метод розв'язувальних функцій.

I.I. Matychyn, K.A.Chikrii

DIFFERENTIAL GAMES WITH IMPULSE CONTROL

Differential games with impulse control of both players are treated in the paper. For this class of games the sufficient conditions for solvability of the approach problem are derived. The basis for the research of these problems is the Method of Resolving Functions. The result is supported by a model example with simple motion.

1. *Aubin J.-P.* Impulse differential inclusions and hybrid systems: A Viability Approach, Lecture Notes. – Berkeley: University of California, 1999. – 129 p.
2. *Branicky M.S., Borkar V.S., Mitter S.* A unified framework for hybrid control: Background, model and theory // IEEE Trans. Autom. Control. – 1998. – N 43. – P. 31 – 45
3. *Микусинский Я., Сикорский Р.* Элементарная теория обобщенных функций. – М.: Иностр. лит-ра, 1959. – 79 с.
4. *Чикрий А.А.* Конфликтно управляемые процессы. – Киев: Наук. думка, 1992. – 384 с.
5. *Чикрий А.А., Эйдельман С.Д.* Обобщенные матричные функции Миттаг – Леффлера в игровых задачах для эволюционных уравнений дробного порядка // Кибернетика и системный анализ. – 2000.– № 3.– С. 3 – 32.
6. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. – М.: Наука, 1985. – 224 с.
7. *Понтрягин Л.С.* Избранные научные труды. – М.: Наука, 1988. – **2**. – 576 с.

Получено 25.05.2004