Рассматривается и сравнивается применение двух методов субградиентного типа ("простого" и r-алгоритма) для получения оценок в алгоритме решения дискретной задачи размещения с новыми видами скидок в целевой функции. Приводится модель и кратко излагаются алгоритмы решения этой задачи. Приводятся результаты вычислительных экспериментов.

УДК 519.8

В.Н. КУЗЬМЕНКО, Б.И. ГОЛЬДЕНГОРИН, М. ТСО,
П.И. СТЕЦЮК

СРАВНЕНИЕ ДВУХ СУБГРАДИЕНТНЫХ МЕТОДОВ ПРИ НАХОЖДЕНИИ ОЦЕНОК ДЛЯ ЗАДАЧ РАЗМЕЩЕНИЯ

Введение. Задачи размещения изучались на протяжении многих лет, но интерес к ним сохраняется в связи с появлением новых вариантов постановок и их практической востребованностью [1-5].

Один из подходов к решению таких задач основан на лагранжевой релаксации и использовании субградиентных методов негладкой оптимизации. Эти методы используются для нахождения нижних оценок минимизируемой функции. Нижней оценкой является решение двойственной максиминной задачи, которая появляется в результате лагранжевой релаксации исходной задачи по выбранной группе ограничений. По двойственным переменным задача является, как правило, негладкой и имеет небольшое (по сравнению с исходной задачей) количество переменных.

Для решения задачи по двойственным переменным могут применяться различные субградиентые методы. "Простые" субградиентные методы обладают медленной скоростью сходимости. В то же время, если субградиентный метод достаточно быстро сходится, то за этим, как правило, стоят более сложные вычисления на итерации.

Цель данной работы – сравнение двух методов субградиентного типа – "простого" [6] и более трудоемкого [7] r-алгоритма при решении дискретных задач размещения с новыми видами целевых функций.

Постановка задачи. Рассматриваются коммерческие отношения между энергогенерирующими, энергораспределяющей компаниями и потребителями. Энергораспределяющая компания на основании договоров, заключенных с потребителями, составляет агрегированные потребности в электроэнергии и пытается оптимально распределить агрегированные заказы по энергогенерирующим компаниям. Энергогенерирующие компании выходят на рынок электроэнергии, предоставляя определенные скидки в цене, которые зависят от объемов заказов, выражаемых в денежной форме, и других факторов. Возможна интерпретация рассматриваемой постановки задачи с точки зрения электронной коммерции.

Рассматривается три вида скидок, которые вступают в силу при достижении определенных сумм заказа: A - уменьшение фиксированной доплаты; B - уменьшение платы за часть заказа выше определенной суммы; совместное применение скидок типа A и B.

Рассматриваемые варианты скидок показаны на рисунке.

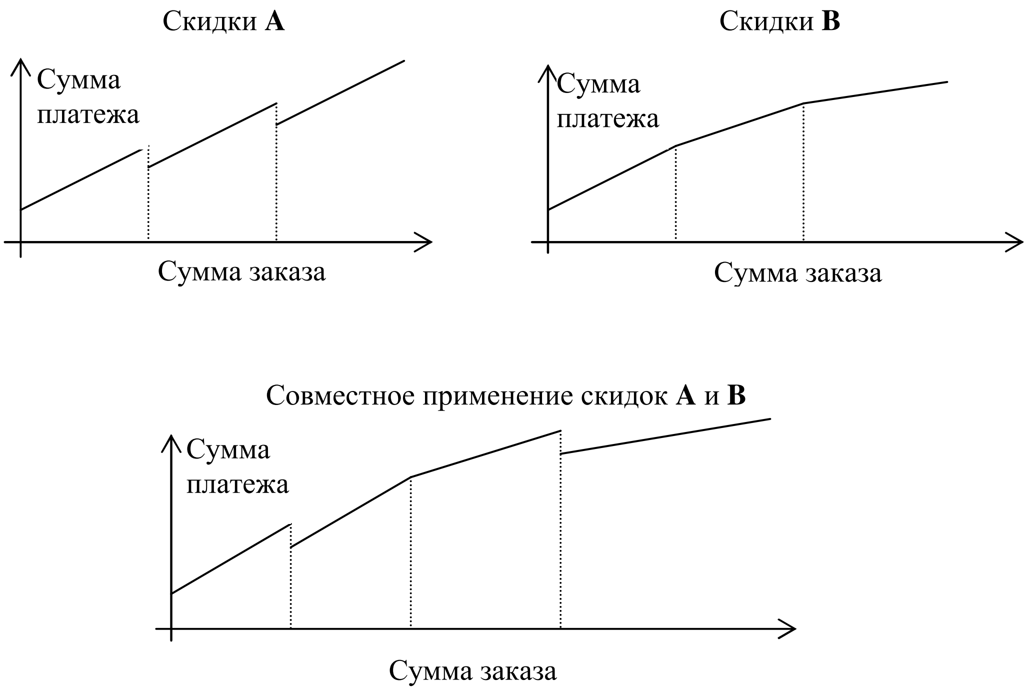

Рисунок. Возможные виды целевых функций оптовых поставщиков

Особенностью рассматриваемых целевых функций является то, что при наличии скидок типа A они разрывны, т. е. не выпуклы и не вогнуты. При этом рост функций вправо от любой точки происходит не быстрее, чем на линейном отрезке, содержащем эту точку.

Математическая модель. Один из способов построения математической модели этой задачи – это представление каждого линейного отрезка целевой функции поставщика (далее исходного поставщика) как целевой функции некоторого псевдопоставщика с ограниченными сверху и снизу объемами поставок и введение дополнительных ограничений, приводящих к выбору не более одного псевдопоставщика для каждого исходного поставщика [9].
Математическая постановка задачи при этом будет такой:

$$\min_{y_i, x_{ij}} \left\{ \sum_{i=1}^{n} f_i y_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i c_{ij} x_{ij} \right\}, \tag{1}$$

при ограничениях

$$L_i y_i \le \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \le U_i y_i, \quad i = 1,...,n, \tag{2}$$

$$\sum_{i \in I_{i_0}^d} y_i \le 1, \quad i_0 = 1,...,n_0, \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \ge b_j, \quad j = 1,...,m, \tag{4}$$

$$y_i \in \{0, 1\}; \quad 0 \le x_{ij} \le \bar{x}_{ij} \text{ или } x_{ij} \text{ - целое.} \tag{5}$$

Параметры $f_i, \alpha_i, c_{ij}, L_i, U_i, b_j, \bar{x}_{ij}$ вычисляются исходя из конкретной рассматриваемой модели; константы $\bar{x}_{ij}$ являются границами поставок от i к j; $I_0 = \{1,...,n_0\}$ - множество исходных поставщиков; $I_{i_0}^d$ - множество псевдопоставщиков, соответствующих исходному поставщику i_0. Объединение всех множеств $I_{i_0}^d$, где $i_0 \in I_0$, образует полное множество псевдопоставщиков $I = \{1,...,n\}$. При заданных i_0, j коэффициенты c_{ij} для всех $i \in I_{i_0}^d$ одинаковы, а множители α_i, соответствующие скидкам типа B, образуют последовательность, такую, что $1 = \alpha_{i_1} \ge \alpha_{i_2} \ge ... \ge \alpha_{i_t}$.

Алгоритм решения. Для решения задачи (1) - (5) разработан алгоритм, основанный на предложенном ранее подходе для решения простейшей задачи размещения [8], и состоящий в следующем.

Методом верхнего уровня является метод ветвей и границ. В каждой вершине дерева ветвления вычисляется нижняя оценка путем решения двойственной задачи субградиентным методом. Двойственная задача получается в результате лагранжевой релаксации исходной задачи по ограничениям (4). В процессе решения двойственной задачи при каждых получаемых значениях двойственных переменных проверяется возможность зафиксировать значения еще неопределенных переменных y_i, а также определяются наиболее узкие границы P_L, P_U, такие, что $P_L \le \sum_{i=1}^{n} y_i^* \le P_U$, где y_i^* - оптимальные значения переменных y_i. В процессе работы алгоритма генерируются различные допустимые решения, соответствующие текущему значению двойственных переменных и вершине дерева ветвления.

Сделанные фиксации переменных y_i и дополнительное ограничение в виде $P_L \le \sum_{i=1}^{n} y_i \le P_U$ учитываются при формулировке двойственных задач в последующих вершинах дерева ветвления. Это увеличивает нижние оценки и сужает область поиска оптимального решения методом ветвей и границ.

Для нахождения нижней оценки необходимо решить следующую задачу.

Найти

$$\Phi(P_L, P_U, K_0, K_1) = \max_{\lambda_j \ge 0} F(\lambda), \tag{6}$$

где значение двойственной функции

$$F(\lambda) = \min_{y_i, x_{ij}} \left\{ \sum_{i=1}^{n} f_i y_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (\alpha_i c_{ij} - \lambda_j) x_{ij} + \sum_{j=1}^{m} b_j \lambda_j \right\} \tag{7}$$

при ограничениях

$$L_i y_i \le \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \le U_i y_i, \quad i = 1, \dots, n, \tag{8}$$

$$0 \le x_{ij} \le \bar{x}_{ij}, \quad x_{ij} \in R \text{ или } x_{ij} \in Z, \tag{9}$$

$$\sum_{i \in I_{i_0}^d} y_i \le 1, \quad i_0 = 1, \dots, n_0, \tag{10}$$

$$P_L \le \sum_{i=1}^{n} y_i \le P_U, \tag{11}$$

$$y_i \in \{0, 1\}, i \in I \setminus (K_0 \cup K_1); \quad y_i = 0, i \in K_0; \quad y_i = 1, i \in K_1, \tag{12}$$

где K_0, K_1 - множества зафиксированных переменных в текущей вершине дерева ветвления.

Сравниваемые субградиентные методы. Для решения задачи (6) используются обобщенные градиентные методы: "простой" и r-алгоритм. Значение функции $F(\lambda)$ и ее суперградиент находятся в результате решения задачи (7) - (12), которая распадается на блоки, связанные единственным ограничением (11). Для каждого блока решается одномерная задача о рюкзаке по переменным x. Ограничение (11) учитывается путем решения одной задачи о рюкзаке с целочисленными ограниченями по переменным y.

Суперградиент в точке λ вычисляется по формуле $g_F(\lambda) = b_j - \sum_{j=1}^{m} x_{ij}^*$, где x_{ij}^* - елементы решения задачи (7) - (12).

Ниже приведены псевдокоды двух сравниваемых методов.

"Простой" метод

Procedure Dual_S;
begin
 $0 < q < 1$ - *параметр*;
 Ф=-∞;
 $k = 0$; $\pi_0 = 2$;
 $\lambda_j^0 = \min_{i \in I \setminus K_0} c_{ij}$, $j = 1,...,m$;
 repeat
  Вычислить $F(\lambda^k)$, g_k;
  Ф= max{ $F(\lambda^k)$, Ф};
  $h_k = \pi_k (Z_{UB} - F(\lambda^k)) / \|g_k\|^2$;
  $\lambda^{k+1} = \lambda^k + h_k g_k$;
  $\lambda_j^{k+1} = \min\{0, \lambda_j^{k+1}\}$ $j = 1,...,m$;
  $\pi_{k+1} = \pi_k \cdot q$;
  $k = k + 1$;
 until
  $\|g_k\| \le \varepsilon_g$ или
  $\|\lambda^k - \lambda^{k-1}\| \le \varepsilon_\lambda$ или
  $k > k_{\max}$ или
  $F(\lambda^k) \ge Z_{UB}$;
end;

r-алгоритм

Procedure Dual_r;
begin
 $2 < \alpha < 4$ - *параметр*;
 Ф=-∞;
 $k = 1$; $B_0 = E$; $g_0 = 0$;
 $\lambda_j^0 = \min_{i \in I \setminus K_0} c_{ij}$, $j = 1,...,m$;
 repeat
  Вычислить $F(\lambda^k)$, g_k;
  Ф= max{ $F(\lambda^k)$, Ф};
  $\xi_k = \dfrac{B_{k-1}^T (g_k - g_{k-1})}{\|B_{k-1}^T (g_k - g_{k-1})\|}$;
  $B_k = B_{k-1} + (1/\alpha - 1) B_{k-1} \xi_k \xi_k^T$;
  $p_k = B_k B_k^T g_k / \|B_k^T g_k\|$;
  $\lambda^{k+1} = \lambda^k + h_k p_k$;
  где h_k такое, что $(p_k, g_{k+1}) \le 0$;
  $\lambda_j^{k+1} = |\lambda_j^{k+1}|$, $j = 1,...,m$;
  $k = k + 1$;
 until
  $\|g_k\| \le \varepsilon_g$ или
  $\|\lambda^k - \lambda^{k-1}\| \le \varepsilon_\lambda$ или
  $k > k_{\max}$ или

$F(\lambda^k) \geq Z_{UB}$; | **end;**

При описании псевдокодов значение суперградиента в точке λ^k обозначено g_k, а значение целевой функции текущего наилучшего сгенерированного допустимого решение обозначено Z_{UB}. Описание всех обозначений приведено в [7].

Выбор и регулировка параметров «простого» субградиентного метода осуществлялись так же, как в [8]. Параметры r-алгоритма выбирались и регулировались согласно рекомендациям [7].

Вычислительные эксперименты. Для вычислительных экспериментов использовались исходные данные задач размещения из следующих тестовых библиотек: OR-Library [8] (http://mscmga.ms.ic.uk./info.html) и Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН [10] (http://www.math.nsc.ru/AP/ benchmarks). Скидки вводились путем коррекции данных.

Рассматривались два варианта постановки задачи. Исходная постановка в виде (1) - (5) и приведенная постановка, в которой выполнена замена по переменным x_{ij}. Условно можно сказать, что в постановке (1) - (5) ограничения (4) имеют вид ∑ Xij ≥ bj, а целевая функция – ∑(Fi + ∑ Cij·Xij). В приведенной постановке соответственно – ∑ Xij ≥ 1 и ∑(Fi + ∑ bj·Cij·Xij).

При сравнении работы методов решалась и задача без скидок, что эквивалентно простейшей задаче размещения (см., например [11]).

В табл. 1 приведены результаты решения трех простейших задач размещения Cap71, Cap101 и Cap131 из библиотеки OR-Library в двух постановках.

ТАБЛИЦА 1

Пример	"Простой" метод			r-алгоритм		
	Число ветвлений	Общее число итераций	Время, с	Число ветвлений	Общее число итераций	Время, с
Cap 71						
∑ Xij ≥ 1	4	94	3	2	211	6
∑ Xij ≥ bj	21	1240	12	2	166	5
Cap 101						
∑ Xij ≥ 1	6	43	4	2	201	7
∑ Xij ≥ bj	9	442	8	2	161	7
Cap 131						
∑ Xij ≥ 1	9	115	5	4	250	15
∑ Xij ≥ bj	31	886	27	2	201	13

Из табл. 1 видно, что "простой" субградиентный метод чувствителен к форме постановки задачи, в то время как r-алгоритм показывает устойчивость и незначительную зависимость от коэффициентов модели.

В табл. 2 приведены результаты решения задачи Cap131 в двух постановках двумя методами с различными вариантами скидок. Число потребителей равно 50, число исходных поставщиков – 50. Первоначальные фиксированные доплаты для всех исходных поставщиков, кроме одного, равны 7500. Диапазон изменения коэффициентов c_{ij} - от 1 до 1 415 639. Коэффициенты b_j изменяются от 31 до 12 912. Для всех поставщиков скидки начинали действовать при достижении величины заказа в 50 000 единиц. В первом столбце таблицы указаны вид скидки и процент скидки. Для скидок типа А – это уменьшение фиксированной доплаты, для скидок типа В – уменьшение стоимости единицы товара, для скидок типа А и В – уменьшение фиксированной доплаты при постоянной составляющей скидки типа В равной 10%.

ТАБЛИЦА 2

Вид и процент скидок	Приведенная постановка задачи ($\sum Xij \geq 1$)		Исходная постановка задачи ($\sum Xij \geq bj$)	
	"Простой" метод (время, с)	r-алгоритм (время, с)	"Простой" метод (время, с)	r-алгоритм (время, с)
Без скидок	1,4	3	1,8	2
Тип А, 25	62	147	191	133
Тип А, 40	325	666	548	545
Тип А, 50	755	2167	1413	2492
Тип А, 60	958	2246	1702	2231
Тип А, 75	316	645	1082	1037
Тип А, 100	36	151	275	110
Тип В, 10	3	3	3	4
Тип В, 15	2	3	6	4
Тип В, 20	5	3	13	4
ТипАиВ, 25	36	87	126	90
ТипАиВ, 50	44	46	106	43
ТипАиВ, 75	26	20	71	15
ТипАиВ, 100	6	7	50	7

Из табл. 2 видно, что задачи со скидками типа А являются более сложными, чем простейшая задача размещения и задачи со скидками типа В (которые сводятся к простейшей). "Простой" метод лучше справляется с задачей в приведенной постановке, при исходной постановке работа методов равнозначна. Отсюда можно сделать вывод, что при моделировании прайс-листов предпочтительны скидки типа В независимо от применения скидок типа А, что позволяет сделать вычисления более экономными.

В табл. 3 приведены результаты расчетов с использованием теста Uniform-123 из тестовой библиотеки Института математики. Число потребителей и исходных поставщиков равно 100. Фиксированные доплаты у всех исходных поставщиков равны 3000. Коэффициенты c_{ij} случайно распределены в диапазоне от 0 до 10 000, все b_j равны 1. Разрыв двойственности равен 5,51%. Скидки начинали действовать при достижении величин заказов в 7 000 единиц.

ТАБЛИЦА 3

Вид и процент скидок, точность решения	Время, с		Результат	
	“Простой" метод $\sum Xij \geq 1$	r-алгоритм $\sum Xij \geq 1$	"Простой" метод $\sum Xij \geq 1$	r-алгоритм $\sum Xij \geq 1$
Без скидок, 0	957	1379	71342	71342
Без скидок, 1	383	565	72034	71342
Без скидок, 2	147	314	72606	72080
Тип А-50, 5	292	411	70396	69476
Тип А-30, 3	293	1596	71716	71344
Тип В-20, 3	92	154	72282	71704

Из табл. 3 видно, что при приближенном решении задач в приведенной постановке r-алгоритм решает задачи несколько дольше, но более точно.

Эта же задача решалась двумя методами при изменении ее формулировки таким образом, что коэффициенты b_{ij} оказывались случайно распределенными в некотором диапазоне от 1 до N. Результат данных расчетов таков, что при N>4 работа "простого" субградиентного метода становится неустойчивой и существенно более медленной.

Заключение. Полученные результаты показывают конкурентоспособность r-алгоритма при решении задач размещения и, в частности, рассматриваемой задачи, по сравнению с традиционным "простым" субградиентным методом с регулировками параметров согласно [6, 8]. В случае постановок задачи в ненормированном виде со значительным разбросом коэффициентов модели r-алгоритм находит решения более быстро за счет более эффективного процесса решения задач (6).

Трактование рассматриваемых методов как простого и сложного для задач размещения является весьма условным. Если не учитывать затрат времени на вычисление значения функции и суперградиента, то сложность одной итерации "простого" метода оценивается как n, а сложность итерации r-алгоритма - как n^2, что связано с пересчетом матрицы B_k и вычислениями с использованием этой матрицы. Однако вычисление значения функции и суперградиента требует также относительно значительных затрат. Так решение рюкзачных задач по переменным x требует порядка $n \cdot m \cdot \ln(m)$ операций. Обычно в задачах размещения $m > n$, следовательно сложность одной итерации обоих методов принципиально не отличается, что подтверждается проведенными вычислительными экспериментами.

Развитие данной темы будет направлено на исследование и определение эффективности работы рассматриваемых методов в более сложных задачах размещения и, в частности, в задачах выбора и размещения агрегированных заказов энергораспределяющими компаниями.

В.М. Кузьменко, Б.І. Гольденгорін, М. Тсо, П.І. Стецюк

ПОРІВНЯННЯ ДВОХ СУБГРАДІЄНТНИХ МЕТОДІВ ПРИ ЗНАХОДЖЕННІ ОЦІНОК ДЛЯ ЗАДАЧ РОЗМІЩЕННЯ

Розглядається і порівнюється застосування двох методів субградієнтного типу ("простого" та r-алгоритму) для отримання оцінок в алгоритмі роз'язання дискретної задачі розміщення з новими видами знижок у цільовій функції. Наводяться модель та алгоритми розв'язку цієї задачі, а також результати обчислювальних експериментів.

V.N. Kuzmenko, B.I. Goldengorin, M. Tso, P.I. Stetsyuk

A COMPARISON OF TWO SUBGRADIENT METHODS FOR SOLVING ALLOCATION PROBLEM

We consider and compare two subgradient type methods ("simple' and r-algorithm) for finding lower bounds in branch-and-bound method while solving allocation type problem with new kinds of discounts in the objective function. We outline the model and algorithms for solving the allocation problems and report results of computational experiments.

1. *Revelle C.S., Laporte G.* The Plant Location Problem: New Models and Research Prospects // Operations Research. – 1996. – 44. – P. 864–874.
2. *Correia I., Captivo M.E.* A lagrangian heuristic for modular capacitated location problem // Annals of Operations Research. – 2003. – 122. – P. 141–161.
3. *Harkness J., ReVelle C.* Facility location with increasing production cost // European Journal of Operational Research. – 2003. – 145. – P. 1–13.
4. *Ebery J., Krishnamoorthy M., Ernst A., Boland B.* The capacitated multiple allocation hub location problem: Formulations and algorithms // European Journal of Operational Research. – 2000. – 120. – P. 614–631.
5. *Goldengorin B., Kuzmenko V., Stetsyuk P., Tso M.* Pricing by an allocation model with different types of discount // Combinatorial Optimization 2004, 28-31 March 2004, Book of Abstract. – Lancaster: Lancaster University, 2004. – P. 31.
6. *Held M., Wolfe P., Crowder H.* Validation of subgradient optimization // Mathemetical Programming. – 1974. – N 6. – P. 62–66.
7. *Шор Н.З.* Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1979. – 200 с.
8. *Beasley J.E.* Lagrangian heuristics for location problems // European Journal of Operational Research. – 1993. – 65. – P. 383-399.
9. *Михалевич В.С., Трубин В.А., Шор Н.З.* Оптимизационные задачи производственно-транспортного планирования. - М.: Наука, 1986. – 264 с.
10. *Kochetov Yu., Ivanenko D.* Computationally difficult instances for the uncapacitated facility location problem: Proceedings MIC'2003. – Kioto, 2003. – 6 p.
11. *Goldengorin B., Tijssen G.A., Ghosh D., Sierksma G.* A data correcting algorithm for the simple plant location problem // J. of Global Optimization. – 2003. – 25(4). – P. 377–406.

Получено 13.05.2004