УДК 519.1

Г.А. ДОНЕЦ,. АЛЬШАЛАМЕ САМЕР

ЗАДАЧА О ДИСКРЕТНОМ ПОСТРОЕНИИ ОБРАЗОВ

Рассматриваются задачи построения дискретных цветных изображений на прямоугольном поле зрения с помощью множества заданных шаблонов. Задачи сводятся к решению системы линейных алгебраических уравнений в конечных классах вычетов mod k. Приводится решение задачи для k = 2 и линейных шаблонов.

Введение. Эта задача в том или ином виде может встречаться в разных областях, где используется прямоугольная метрика. Пусть задано прямоугольное поле π, состоящее из $N = mn$ клеток, где m – число строк, а n – число столбцов. Имеется множество шаблонов $S = \{s_1, s_2,..., s_p\}$, где s_t $(t = 1, 2,..., p)$ – связная фигура из таких же клеток; $r(t)$ – количество таких фигур. Каждой клетке шаблона соответствует число, которое принадлежит множеству $Q = \{0, 1, 2,..., k\text{-}1\}$. Следует отметить, что каждая клетка шаблона окрашена цветом $q \in Q$. Задано множество раскрасок B поля π, которое называется множеством образов (мозаик). Если на поле наложить какой-либо шаблон, то цвета соответствующих клеток приобретут цвет, равный сумме прежнего цвета и цвета клеток шаблона по mod k. Можно накладывать несколько шаблонов на одно место. Задача состоит в том, чтобы на чистом поле (окрашенном в цвет 0) с помощью ограниченного мно- жества шаблонов получить любой заданный образ.

В каждом шаблоне типа s_t может быть выделена одна клетка, которая фиксирует положение шаблона на поле в горизонтальном (или вертикальном) положении. Если шаблон s_t зафиксирован λ раз на клетке $l = n(i - 1) + j$, $(i = 1,2,\dots,m,\ j = 1,2,\dots n)$, то обозначим $x_1^{(t)} = \lambda$, в противном случае $x_1^{(t)} = 0$. Если шаблон накладывается на поле в вертикальном состоянии, то ему будет соответствовать переменная $y_1^{(t)}$. Тогда задача сводится к решению таких mn уравнений:

$$\sum_{t=1}^{p}\left(x_l^{(t)} + y_l^{(t)}\right) \equiv b_l \,(\operatorname{mod} k)\ ,\ l = 1, 2,..., N. \tag{1}$$

В общем виде эта задача довольно сложная, так как число переменных в ней значительно превышает число уравнений. Поэтому возникают проблемы с определением ранга системы, что во многом зависит от типов шаблонов.

Здесь решается простая задача для набора двух типов прямолинейных шаблонов как последовательности клеток, окрашенных цветом 1, длиной s_t (t = 1, 2) и множества Q = {0, 1}. Будем считать выделенной клеткой в каждом шаблоне самую крайнюю левую клетку (самую крайнюю верхнюю в вертикальном положении). Кроме уравнения (1) можно вывести несколько зависимостей между шаблонами, если их накладывать на поле различными способами.

Нетрудно показать, что все вертикальные положения линейных шаблонов являются линейно зависимыми от горизонтальных шаблонов. Если взять α горизонтальных шаблонов длиной β, то это эквивалентно β вертикальным шаблонам длиной α. Если имеются горизонтальные шаблоны любой длины от 2 до n – 1, то можно всегда выразить с их помощью любую единицу в строке, начиная с первого и кончая последним столбцом. В качестве исходной будем всегда брать первую строку. Тогда любая клетка в ней имеет номер $l = 0 + j = j$.

Если сложить по mod 2 шаблон длиной d + 1 и $x_j = 1$ с шаблоном длиной d, $x_{j+1} = 1$, то получим единицу в j-й клетке. Многократно повторяя это в следующих строках, получаем вертикальный шаблон любой длины.

Следует отметить, что достаточно уметь получать единицу с помощью линейных горизонтальных шаблонов в любой клетке строки, чтобы построить любой образ на поле. Наименьший набор шаблонов, который позволяет представить единицу в любой клетке строки, называется базисом. Самым тривиальным базисом является один шаблон S = {1}. Для двух шаблонов длиной s_1 и s_2, как было указано, базис может составлять набор S = {d, d+1} (d > 0). Если один из шаблонов по длине больше чем $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$, то появляются ограничения на передвижение этого шаблона вдоль строки, и базис может не существовать для некоторых единиц. Поэтому для такого базиса необходимо, чтобы $2 < s_1, s_2 < \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$. На рис. 1 это показано для S = {4, 3}, а внизу указан номер соответствующей единицы.

Для s_1 = 2 в качестве второго шаблона можно взять $s_2 = 2k+1 \quad (k \geq 1)$. В этом случае сделать единицу для любого $l = j$ можно с помощью нескольких шаблонов первого типа и одного шаблона второго типа. Для а) $l = 2i+1 \quad (i \geq 0)$ –

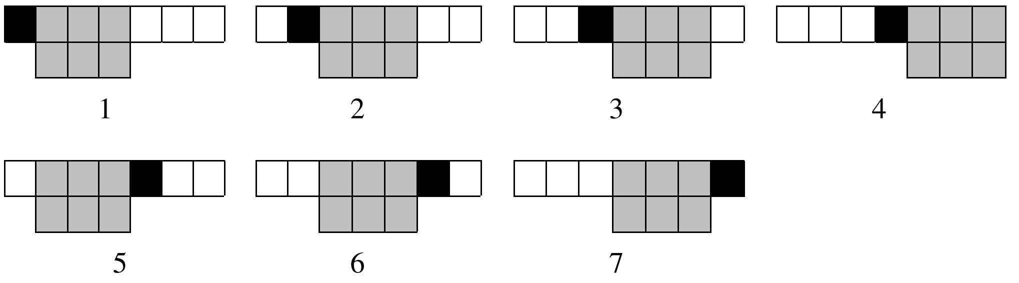

РИС. 1. Базис для шаблонов S = {4,3} и n = 7

это $x_p = 2p+1$ $(0 \le p < i)$ и $x_p = 2p$ $(i < p \le k)$; для б) $l = 2i$ – это $x_p = 2p+1$ $(0 \le p < i)$ и $x_p = 2p$ $(i \le p \le k)$. Если $2k+1 < n$, то используя сдвиг, можно построить единицы и для остальных клеток. Для произвольных двух типов шаблонов при $s_1 \ge 3$ такие зависимости выводятся сложнее. Можно сказать, что для любого n существет пороговое значение длин двух шаблонов, когда существует ровно один базис, а для других значений базис либо не существует, либо их несколько.

В качестве примера рассмотрим два шаблона s_1 = 5, s_2 = 13 и n = 16. Здесь $s_2 > \left\lfloor \frac{16}{2} \right\rfloor + 1 = 9$. Составим систему уравнений типа (1).

$$
\begin{array}{l}
x_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + x_{14} = b_1 \\
x_1 + x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + x_{14} + x_{15} = b_2 \\
x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + x_{14} + x_{15} + x_{16} = b_3 \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \ldots\ldots\ldots\ldots + x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17} = b_4 \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + \ldots\ldots\ldots\ldots + x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17} = b_5 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + \ldots\ldots\ldots\ldots + x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17} = b_9 \\
x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + \ldots\ldots + x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17} = b_{10} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} + \ldots\ldots + x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17} = b_{12} \\
x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} + \ldots\ldots + x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17} = b_{13} \\
x_{10} + x_{11} + x_{12} + \ldots\ldots\ldots\ldots + x_{15} + x_{16} + x_{17} = b_{14} \\
x_{11} + x_{12} + \ldots\ldots\ldots\ldots + x_{16} + x_{17} = b_{15} \\
x_{12} + \ldots\ldots\ldots\ldots + x_{17} = b_{16}
\end{array}
\qquad (2)
$$

При заданных параметрах первый шаблон может принимать значение $x_i^{(1)}=1$ для i = 1, 2,..., 12, а второй $x_i^{(2)}=1$ для i = 1, 2, 3, 4. Чтобы не иметь дело с верхними индексами, обозначим переменные для первого шаблона $x_1, x_2,..., x_{12}$, а переменные для второго шаблона – $x_{14}, x_{15}, x_{16}, x_{17}$. Здесь x_{13} пропущено из соображений, которые раскроются позже.

Систему данных уравнений можно решать, исходя из общих позиций, используя известные методы решения [1]. Однако можно воспользоваться тем, что имеем дело со специфической системой уравнений. Здесь правые части могут быть произвольными, но нас интересует вопрос о существовании базиса для этих шаблонов. Поэтому будем решать систему полагая, что в правых частях находятся все нули, кроме одного значения $b_j \equiv 1(\mathrm{mod}\, 2),\ 1 \le j \le n$. Очевидно, в таком случае правые части уравнений линейно независимы. Имеем систему уравнений с n уравнениями и n неизвестными. Важной особенностью этой системы есть условие $s_1 + s_2 = n + 2$. Так как число переменных для первого шаблона равно $n + 1 - s_1 = s_2 - 1$, то по аналогии число неизвестных для второго шаблона равно $s_1 - 1$. Поэтому в $(s_1 - 1)$-й и s_1-й строках система имеет одинаковые количество переменных второго шаблона, а для первого шаблона – разное, отличающееся на одно. Складывая эти уравнения, получаем решение $x_{s_1} \equiv \left(b_{s_1-1} + b_{s_1}\right)(\mathrm{mod}\, 2)$. В данной системе, складывая четвертое и пятое уравнения, получаем $x_5 \equiv \left(b_4 + b_5\right)(\mathrm{mod}\, 2)$. Если теперь подставить значение x_5 в самое нижнее уравнение (это будет 9-е), то, складывая его с десятым уравнением, получаем решение $x_{10} = x_5 + b_{10} + b_9$ $(b_4 + b_5 + b_9 + b_{10})$ (mod 2). Продолжая этот процесс дальше, получаем решение для x_{15}. Возвращаясь в самое верхнее уравнение (второе) и складывая его с первым, получаем решение для x_2. В общем случае, делая k шагов, находим значение

$$x_{ks_1} = \sum_{i=1}^{k} \left(b_{is_1} + b_{is_1-1}\right)(\mathrm{mod}\, 2), \tag{3}$$

где rs_1 - положительный вычет по mod $(s_1 + s_2)$, $r \ge 1$. Выражение ks_1 должно пробегать все значения индексов переменных от 1 до $n + 1$, если k пробегает последовательно все значения от 1 до $s_1 + s_2 \cdot 1$. Для последнего значения должны получить $s_1(s_1 + s_2 - 1) = -s_1 \equiv s_2\ (\mathrm{mod}\ s_1 + s_2)$. Это возможно только в случае, если НОД $(s_1, s_1 + s_2)$ = НОД (s_1, s_2) = 1. Если это не так, то найдется такое $d > 1$, что $s_1 = \alpha d$ и $s_2 = \beta d$. Тогда для $k = \beta + \alpha + 1$ получим $x_{s_1} = x_{s_1(\alpha+\beta+1)}$, что приведет к зависимости между значениями правых частей, а это недопустимо, то есть система не имеет решения. Тем самым доказана

Теорема 1. Два разных числа s_1 и s_2 с условием $s_1 + s_2 = n + 2$ $(n > 3)$ образуют базис, если НОД(s_1, s_2) = 1.

Пусть в правой части $b_j = 1\ (b_i = 0, i \neq j)$. Обозначим t_1 (соответственно t_2) наименьшее (соответственно наибольшее) решение из двух уравнений в положительных вычетах $xs_1 = j[\mathrm{mod}(s_1 + s_2)]$ или $xs_1 = (j+1)[\mathrm{mod}(s_1 + s_2)]$. Тогда получаем решение

$$x_k = \begin{cases} 1, & \text{если } t_1 \le t \le t_2\,; \\ 0, & \text{в остальных случаях}, \end{cases} \tag{4}$$

где $ts_1 = k[\mathrm{mod}(s_1 + s_2)]$

В данном примере пусть $b_3 = 1$. Тогда

$$\begin{array}{llllllllllllllllll} ts_1 = & 5, & 10, & 15, & 2, & 7, & 12, & 17, & 4, & 9, & 14, & 1, & 6, & 11, & 16, & 3, & 8, & 13. \\ t\ = & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, & 11, & 12, & 13, & 14, & 15, & 16, & 17. \\ x\ = & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & 1, & 1, & 1, & 1, & 1, & 1, & 0, & 0, & 0. \end{array} \tag{5}$$

Здесь $t_1 = 8$, $t_2 = 15$. Соответственно для $8 < t < 15$ получаем $x_4 = x_9 = x_{14} = x_1 =$ $= x_{11} = x_{16} = 1$. Остальные $x_i = 0$. Это решение показано на рис.2. При этом предполагалось, что для всех переменных, начиная с x_{14}, место положения левой клетки на 13 значений переменных меньше индекса.

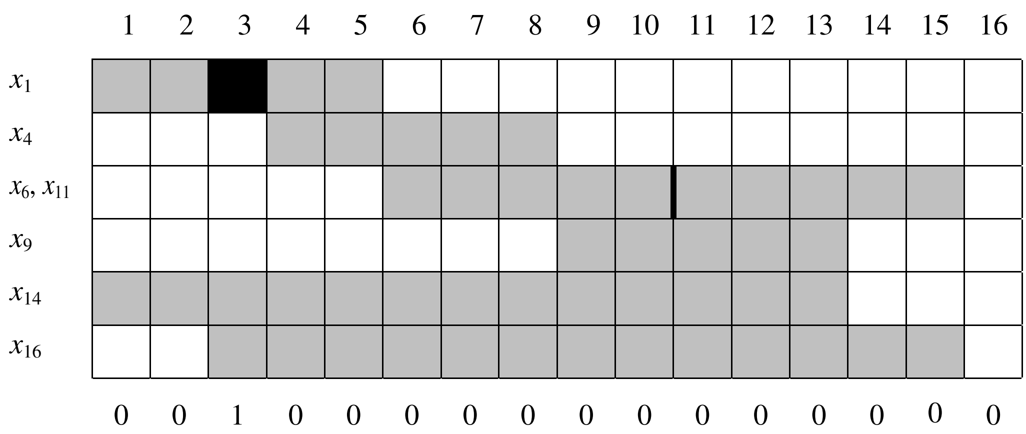

РИС. 2. Решение системы для $b_3 = 1$

Если $s_1 + s_2 > n + 2$, то число уравнений будет больше числа переменных и система не всегда имеет решения. Если $s_1 + s_2 < n + 2$, то число переменных будет больше числа уравнений и система может иметь много решений. В этом случае n можно уменьшить до необходимого, чтобы применить условие теоремы 1, а решения для новых правых клеток поля можно получить путем сдвига решений, полученных для левой части поля.

Если в правой части системы (2) стоят произвольные значения b_j, то решение можно получать, складывая решения для каждого $b_j = 1$. После этого удалить из решения лишние значения, чтобы $x_i = 0 \vee 1$. То же самое можно сделать, используя полученные общие результаты (5) для всех значений $b_j = 1$.

Г.А. Донець, Альшаламе Самер

ЗАДАЧА О ДИСКРЕТНІЙ ПОБУДОВІ ОБРАЗІВ

Розглядаються задачі побудови дискретних кольорових зображень на прямокутному полі зору за допомогою множини заданих шаблонів. Задачі зводяться до розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь в скінченних класах лишків за mod k. Наводиться розв'язок для $k = 2$ та лінійних шаблонов.

G.A. Donets, Sammer Al'shallamme

PROBLEM OF DISCRETE IMAGARY CONSTRUCTION

In this paper the problem of sample-aided discrete color imagary construction within rectangular field of vision in studied. It is shown that this problem can be reduced to solution of the modulo k residual system of linear algebraic eqations. Here solution is offered for the case of $k = 2$ and linear samples.

1. *Кривый С. Л.* О некоторых методах решения и критериях совместности систем линейных диофантовых уравнений в области натуральных чисел // Кибернетика и системный анализ. – 1999. – № 4. – С. 12–36.

Получено 03.06.2004