УДК 519.1

Г.А. ДОНЕЦ , И.Э. ШУЛИНОК

ОБ ОБЩЕМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ЧИСЛОВЫХ ГРАФОВ

Рассматриваются числовые графы и способы их представления. Предлагается новый подход, позволяющий многие графы, которые используются в практических задачах, представлять как числовые. Приводятся примеры такого представления.

Существует огромный перечень литературы, в которой исследовались числовые графы [1–5]. Из всех числовых графов натуральные арифметические (*NA*-графы) и натуральные модульные (*NM*-графы) по способу задания – самые простые. Но уже обычные арифметические (*A*-графы) и модульные (*M*-графы) требуют задания способа (функции), по которому из натурального ряда чисел изымаются те, которые соответствуют вершинам, не принадлежащим множеству X В общем случае, в зависимости от вида числового графа, существуют два принципиально различных их задания.

Первый, наиболее общий способ, предлагается в данной работе.

Числовым графом $G=(X,U,F,g)$ называется n-вершинный граф, представленный двумя множествами $X=\{1,2,\dots,n\}=N_n$ – множеством вершин и $U\in N$ – множеством образующих, функцией смежности $F(x_i,x_j)$ и функцией исключения $g(x)$. В нем вершина $x_k\notin X$ **,** если $g(x_k)=0$, а вершины $x_i,x_j\in X$ смежны, если $F(x_i,x_j)\in U$.

Если $F(x_i,x_j)=x_i+x_j$, то такой числовой граф называется арифметическим, если же $F(x_i,x_j)=|x_i-x_j|$, то соответственно – модульным. Относительно функции $g(x)$ никаких определенных свойств не предполагается, она может просто перечислять множество вершин, не принадлежащих X .

В большинстве случаев, когда заданный граф имеет определенную структуру, имеющую несколько осей симметрии, или периодически повторяющиеся части, задание функций $F(x_i, x_j)$ и $g(x)$ не представляет труда.

Применение теории графов в различных областях практической деятельности человека показало, что подавляющее большинство графов, которые при этом использовались, носили именно такую специфическую структуру. Можно перечислить множество солидных монографий из области распознавания образов, математического моделирования параллельных процессов, теоретических основ создания информационных технологий и других, где рассматриваются графы, ко- торые можно представить в виде числовых графов выше указанным способом.

Рассмотрим в качестве примера [6, рис. 2. 4, с. 42], где сравнение распознаваемой реализации сигнала x_i с эталоном слова производилось с помощью графа, представленного (в уменьшенном виде) на рис.1.

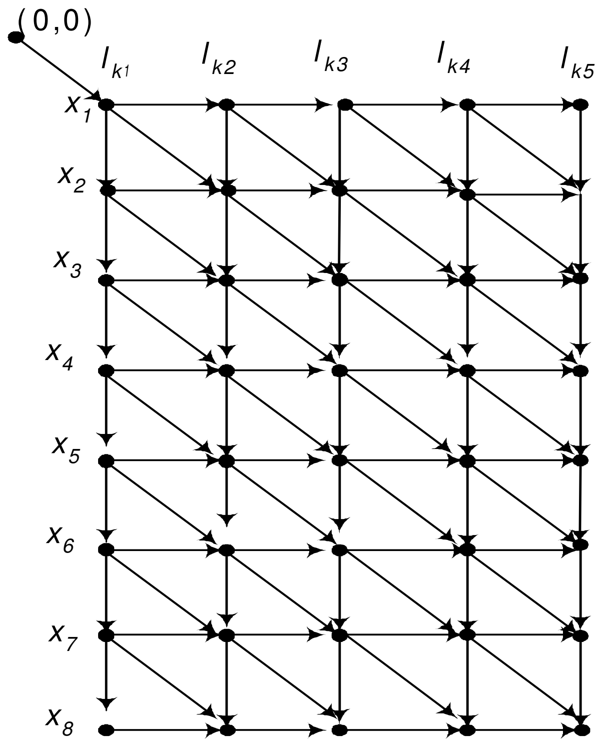

РИС. 1. Часто используемый развернутый граф слова

По своей структуре это довольно простой граф, который можно представить в виде числового графа следующим образом (рис.2).

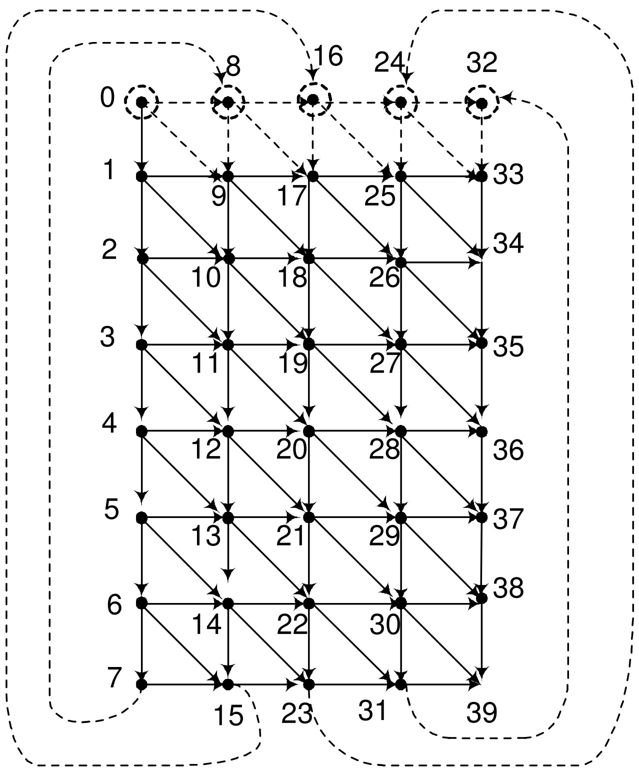

РИС. 2. Реализация предыдущего графа в виде числового

В результате получаем граф с числом вершин $n = 39$, т. е. $X = \{1,2,\ldots,39\}$, $F(x_i, x_j) = x_j - x_i$, $g(x) \equiv 0(\mathrm{mod}\, 8)$, а $U = \{1,8,9\}$. Таким образом, информация о графе укладывается в 6 чисел. В работе [6] граф по размерам значительно больше, он по вертикали имеет 21 вершину, по горизонтали – 14 вершин, т. е. всего – 294 вершины. Числовой граф, (с учетом добавленных фиктивных вершин) будет иметь $n = 308$ вершин и будет представляться следующим образом:

$$X = \{1,2,\ldots,308\},\ F(x_i, x_j) = x_j - x_i,\quad g(x) \equiv 0(\mathrm{mod}\, 22),\quad U = \{1,22,23\}.$$

Аналогичное представление допускает и граф, представленный на рис.3, взятый из [6 , рис. 9. 6, с.185].

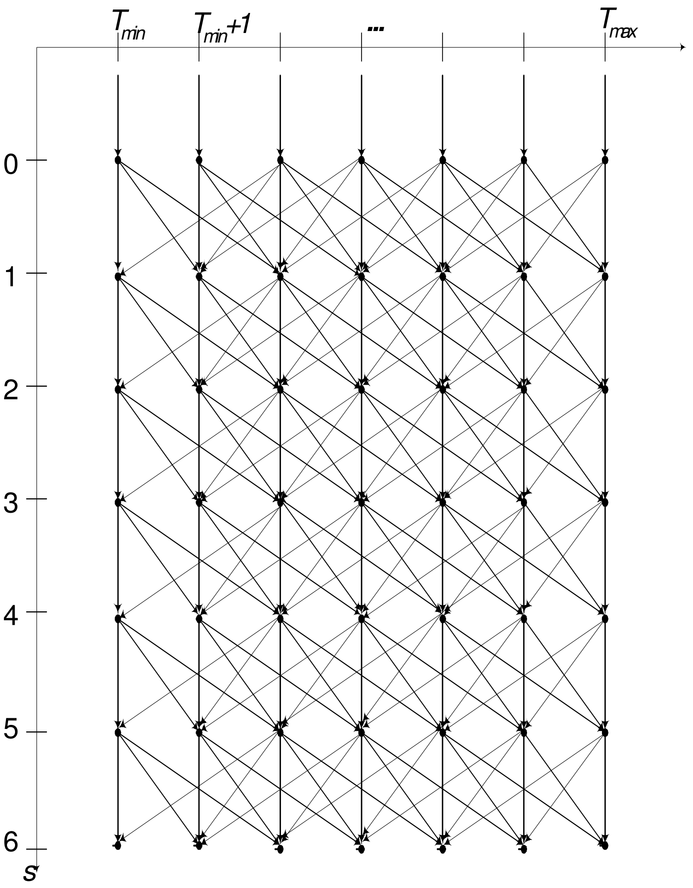

РИС.3. Граф решения задачи о мгновенном периоде основного тона

Этот граф можно представить в виде числового графа с той же порождающей функцией, что и в предыдущем примере, т. е. $F(x_i, x_j) = x_j - x_i$, но с другим множеством образующих. Этот граф представлен на рис.4.

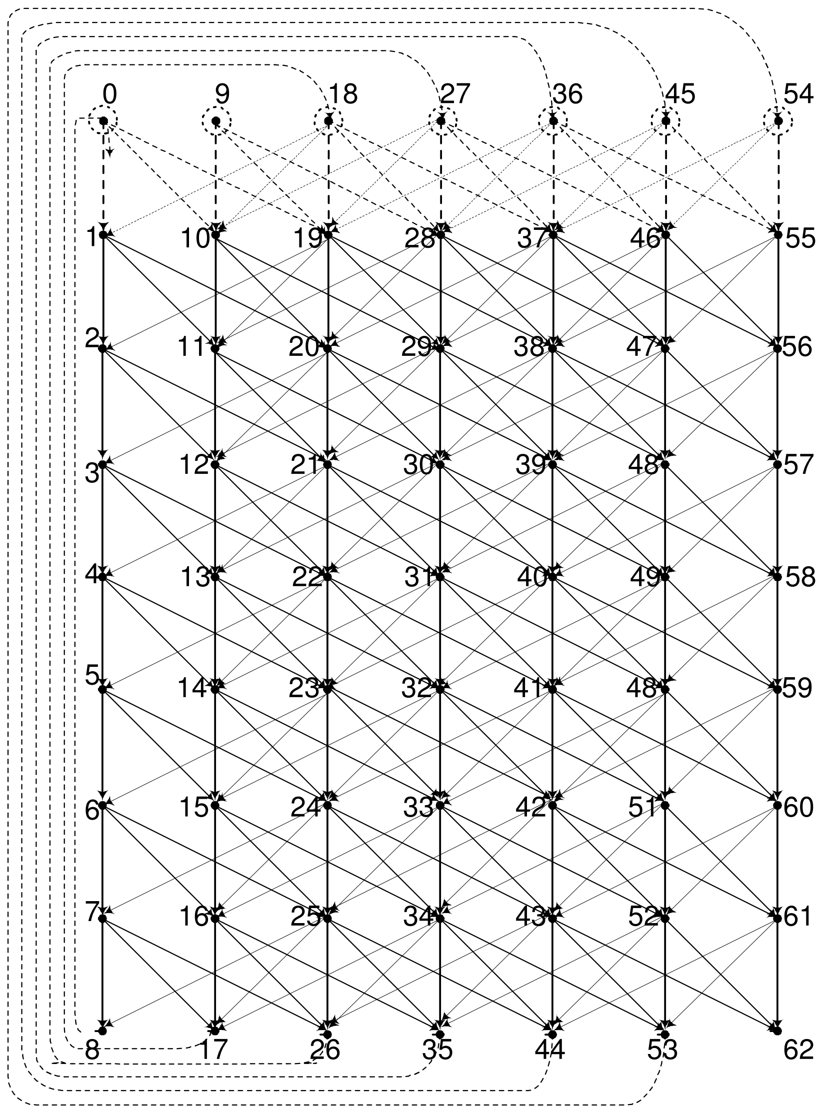

РИС. 4. Реализация предыдущего графа в виде числового

Здесь на рис. 4 сохраняются все стрелки, что и на основном рис.3, но для удобства они лишь обозначены. Сам граф представляется в виде $n = 62$, т. е. $X = \{1,2,\ldots,62\}$, $F(x_i, x_j) = x_j - x_i$, $g(x) \equiv 0(\text{mod } 9)$, $U = \{-17,-8,1,10,19\}$. Так как $F(x_i, x_j)$ – функция несимметричная, то граф ориентирован. Если бы он не был ориентированным, то его можно было бы представить и другой функцией – $F_1(x_i, x_j) = | x_j - x_i - 1 |$, а $U = \{0,9,18\}$.

Рассмотрим еще один пример из [6], где функция смежности уже не является элементарной (рис. 5)

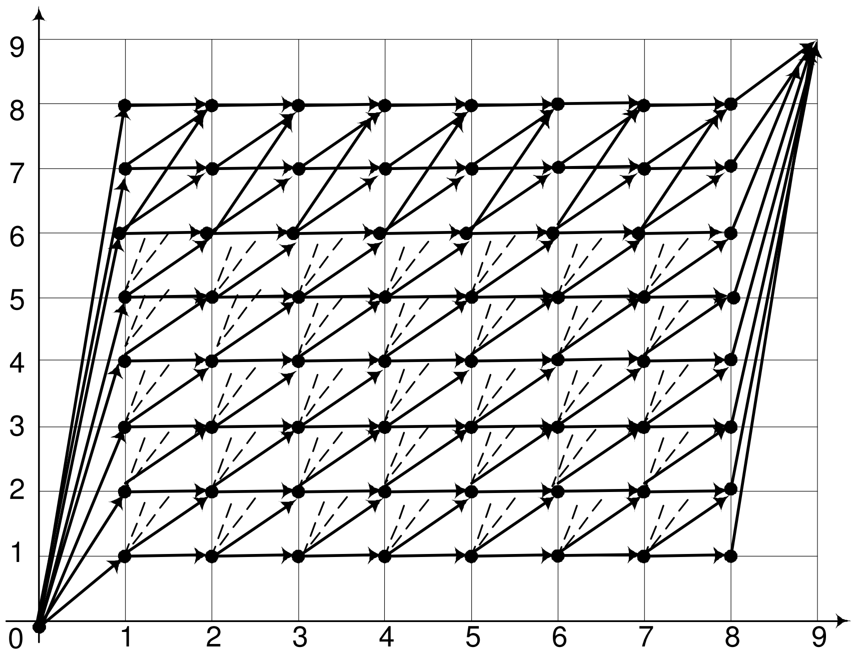

РИС. 5. Граф для оценивания оператора настройки

Этот граф соответствует графу [6] на рис. 8.1, с. 159. На нем нанесены пунктиром стрелки, которые соединяют вершины целочисленной решетки по правилам:

а) вершину $(0,0)$ с вершинами $(1,i)$, $1 \le i \le 8$;

б) вершину (i, j) с вершинами $(i+1,k)$, $8 \ge k \ge j \ge 1$;

в) вершины $(8, j)$, с вершиной $(9,9)$.

Чтобы реализовать этот граф в виде числового графа, рассмотрим следующий граф из 80 вершин, который представляет собой 10 колонок по 8 вершин в каждой. Нумерация вершин начинается с нуля до 79, идет снизу вверх. Вершины $\{1,2,\ldots,7\}$ и $\{72,73,\ldots,78\}$ будут фиктивными. Вершина 0 соответствует вершине $(0,0)$ на рис.5, а вершина 79 – вершине $(9,9)$. Остальные связи легко переносятся на новый граф. В результате получаем граф на рис.6.

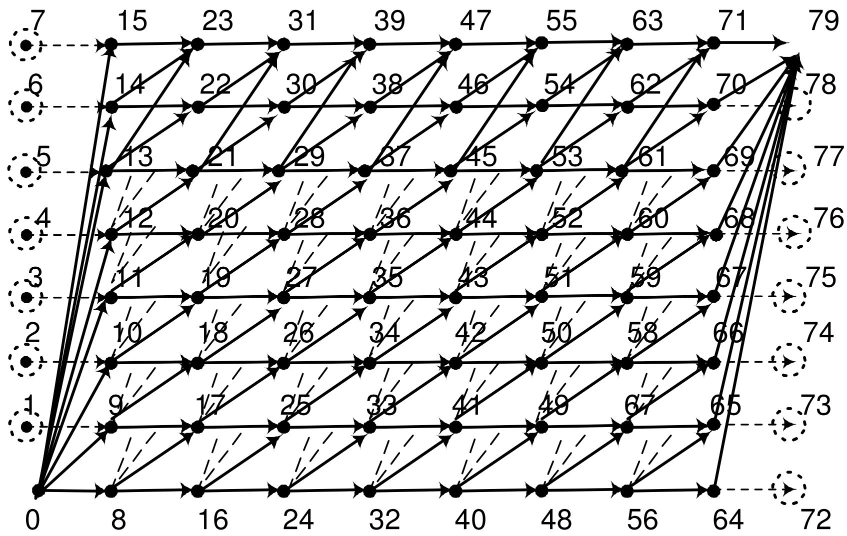

РИС.6. Числовой граф, эквивалентный графу на рис.5

Граф представляется следующим образом:

$n = 79$, $X = \{0,1,\ldots,79\}$, $F(x_i, x_j) = \left(\left\lfloor \frac{x_j}{8} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x_i}{8} \right\rfloor \right) (x_j - x_i)$,

$g(x) = \{1,2,\ldots,7;\ 72,73,\ldots,78\}$, $U = \{8,9,10,11,12,13,14,15\}$.

Покажем, что любой подобный граф, у которого $n = st$, можно реализовать в виде числового графа со следующими параметрами:

$$n = st - 1,\ X = \{0,1,\ldots,st-1\},\ F(x_i, x_j) = \left(\left\lfloor \frac{x_j}{s} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x_i}{s} \right\rfloor \right) (x_j - x_i),$$

$$g(x) = \{1,2,\ldots,s-1;\ (s-1)t, (s-1)t+1,\ldots,st-1\},\ U = \{s, s+1,\ldots,2s-1\}.$$

Действительно, U представляет собой образующие, которые связывают вершины двух соседних столбцов, минимальная разность кодов которых есть s . Номер каждого столбца, в котором находится вершина x_i , равен $\left\lfloor \frac{x_i}{s} \right\rfloor$ (номера начинаются с нуля). Поэтому, если найдутся две вершины x_i и x_j , разность которых принадлежит U , но они находятся не в соседних столбцах, то множитель

$\left\lfloor \frac{x_j}{s} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x_i}{s} \right\rfloor$ будет больше 1, и тогда $\left| F(x_j, x_i) \right| \geq 2s$, то есть вершины графа x_i и x_j будут несмежными.

Г.А. Донець, І.Е. Шулінок

ПРО ЗАГАЛЬНЕ ПРЕДСТАВЛЕННЯ ЧИСЛОВИХ ГРАФІВ

Розглядаються числові графи та способи їх представлення. Пропонується новий підхід, що дозволяє багато графів, які використовуються у практичних задачах, представляти як числові. Наводяться приклади такого представлення.

G.A. Donets, I.E. Shoolinock

ABOUT GENERAL REPRESENTATION OF NUMERICAL GRAPHS

Here we suggest a new approach to present major graphs of practical use as numerical. Examples of such representation are provided.

1. *Донец Г.А.* О графах, задаваемых аналитическим способом // Теория оптимальных решений.– Киев: Ин-т кибернетики им.В.М. Глушкова АН УССР, 1987. – С. 20 – 27.
2. *Донец Г.А.* Об оптимальном кодировании однородных деревьев в арифметических графах // Методы решения экстремальных задач и смежные вопросы. – Киев: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова АН УССР, 1987. – С. 72 – 77.
3. *Донець Г.О., Неженцев Ю.І.* Арифметичні графи та їх представлення // Доп. АН УРСР. Сер.А. – 1990. – № 11. – С. 5 – 8.
4. *Шулинок И.Э.* О связности натуральных модульных графов // Кибернетика и системный анализ. – 1998 – № 5. – С. 50 – 53.
5. *Шулинок И.Э.* О связности и цикломатическом числе натуральных модульных графов // Теория оптимальных решений. – Киев: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины. – 1999. – С. 51 – 57.
6. *Винцюк Т.К.* Анализ, распознавание и интерпретация речевых сигналов. – Киев: Наук. думка, 1987. – 264 с.

Получено 16.06.2004