УДК 519.175

В.В. СТРОК, А.В. ЧАГАРНЫЙ

УНИЦИКЛИЧЕСКИЕ ФАКТОРИЗАЦИИ СЕТИ ТИПА СВЕРНУТОЙ БАБОЧКИ

В работе доказано, что структурный граф сети типа свернутой бабочки $M(k,n)$ степени k и размерностью n содержит k непересекающихся по рёбрам изоморфных унициклических остовных подграфов (с циклом длины n в каждом) и является объединением данных k подграфов.

Введение. Среди многих типов сетей внешних связей, предлагаемых в качестве подходящих топологий для выполнения сортировки, быстрого преобразования Фурье и других применений, особенно удобны сети в виде бабочки. Рассматриваемая структура связей принадлежит к числу наиболее удобных для разработки сетей, предназначенных для максимально параллельного решения задач (см., напр., [1]). При этом возникает необходимость в построении определённых преобразований структурного графа сети вычислительной системы, обеспечивающих реализацию распределённых алгоритмов. Одним из таких преобразований графа является разложение его на непересекающиеся по рёбрам остовные подграфы (задача факторизации графа [2]).

Сеть типа свёрнутой бабочки (бинарный случай) можно рассматривать как сеть быстрого преобразования Фурье, в которой входные вершины отождествлены с соответствующими вершинами выхода. В данной работе исследуется разложение ориентированной сети типа свернутой бабочки, основанное на существенном использовании тех её свойств, которые следуют из математической модели представления этой сети как некоторого обобщённого графа де Брёйна $M(k,n)$. Частный случай такого обобщения графа де Брёйна $B(k,n)$ малого порядка впервые был предложен в [3] (построение $C1$) в связи с задачей максимизации порядка графа при заданных степени и диаметре. В результате исследования подхода, используемого в [4] при построении обобщённого графа $M(k,n)$, в [5] предложено представление этого обобщения как произведение ([6]) $\vec{C}\times B(k,n)$ контура $\vec{C}$ длины n и орграфа $B(k,n)$ порядка k^n. Случай разложения структурного графа бинарной ориентированной сети $M(2,n)$ типа свернутой бабочки на минимально возможное число униконтурных изоморфных остовных подграфов впервые изучен в [7]. Здесь решается задача такого разложения сети $M(k,n)$, заданной на произвольном конечном алфавите, и тем самым обобщаются соответствующие утверждения, содержащиеся в предыдущей работе. Полученные результаты справедливы и для неориентированных сетей этого типа. Сеть $M(k,n)$ иногда называют также графом типа „бабочки на цилиндре". Вопросы разложения этого типа сильносвязной сети на непересекающиеся по дугам гамильтоновы циклы подробно рассматривались в [8]. При том, что структурный граф сети типа свернутой бабочки в действительности является ориентированным графом, иногда эти сети полагают ненаправленными. Мы всегда будем считать их ориентированными.

Унициклические факторизации. В данной работе используем следующие определения и обозначения, где Z_k – множество целых неотрицательных чисел по модулю k.

Определение 1. Орграфом сети типа бабочки $BF(k,n)$ степени k и размерностью n называется орграф, вершинами которого являются упорядоченные пары $(l;x)$, где $x=\beta_0\beta_1...\beta_{n-1}$ $\left(x\in Z_k^n, \beta_i\in Z_k\right)$, а l - номер яруса $(0\le l\le n)$. Для $l<n$ вершина $(l;\beta_0\beta_1...\beta_{l-1}\alpha\beta_{l+1}...\beta_{n-1})$ l-го яруса соединена дугами с k вершинами соседнего яруса вида $(l+1;\beta_0\beta_1...\beta_{l-1}\omega\beta_{l+1}...\beta_{n-1})$, где $\alpha,\omega\in Z_k$.

Таким образом, орграф $BF(k,n)$ состоит из $(n+1)k^n$ вершин, организованных в виде $n+1$ ярусов из k^n вершин в каждом.

Определение 2. Орграфом сети типа свернутой бабочки $M(k,n)$ называется орграф, полученный из орграфа $BF(k,n)$ в результате отождествления вершин последнего и первого ярусов, а именно: вершины $(n;x_i)$ с вершиной $(0;x_i)$, $x_i\in Z_k^n$.

Следовательно, орграф $M(k,n)$ является k-регулярным орграфом с nk^n вершинами, в котором любая вершина $(l;\beta_0\beta_1...\beta_{l-1}\alpha\beta_{l+1}...\beta_{n-1})$ l-го яруса соединена дугами с k вершинами соседнего яруса вида $\left(l+1 \pmod n;\beta_0\beta_1...\beta_{l-1}\omega\beta_{l+1}...\beta_{n-1}\right)$, где $\alpha,\omega\in Z_k$.

Определение 3. Орграфом де Брёйна $B(k,n)$ порядка k^n называется орграф, множество вершин которого является множеством слов длины n на алфавите $Z_k = \{0,1,2,...,k-1\}$. Дуги орграфа идут с вершины $\alpha x \in Z_k^n \left(\alpha \in Z_k, x \in Z_k^{n-1}\right)$ в каждую вершину $x\beta \in Z_k^n$ $(\beta \in Z_k)$.

Матрицей смежностей орграфа $B(k,n)$ является k-циркулянт порядка k^n с первой строкой вида $(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_k, 0, ..., 0)$, в которой $\beta_1 = ... = \beta_k = 1$.

Пусть H - несвязный орграф, компонентами связности которого являются $k-1$ копий ориентированного с корневой вершины x полного k-арного дерева S_x высоты $n-1$ и одна изолированная вершина y. Орграф, полученный в результате соединения дугой вершины y с вершиной x каждой компоненты S_x орграфа H, будем называть деревом де Брёйна T (с корневой вершиной y). Семейство подграфов $G_1, ..., G_m$ графа (орграфа) $G = (V, E)$ называется разложением графа G на компоненты G_i, если множества $E(G_i)$, $i = 1,2,...,m$ образуют разбиение множества ребер (дуг) $E(G)$.

В дальнейшем нам понадобиться следующее утверждение, доказательство которого содержится в [9].

Лемма 1. Существует разложение орграфа $B(k,n)$ на взаимно изоморфные непересекающиеся по дугам униконтурные связные компоненты $U_i^{(1)} = T_i + yy$, $T_i \cong T$ $(i = 1,2,...,k)$, где T – дерево де Брёйна, а yy – контур длины 1 (петля) при корневой вершине y этого дерева.

Здесь исследование сети $M(k,n)$ основано на существенном использовании свойств матричного представления произведения $G_1 \times G_2$ орграфов G_1 и G_2, которому соответствует кронекерово произведение их матриц смежностей $A(G_1) \otimes A(G_2)$ (см. в [10]). Поэтому воспользуемся введенной в [5] формой представления матрицы смежностей обобщенного графа де Брёйна и зададим матрицу смежностей сети $M(k,n)$ в виде

$$M = C \otimes B, \tag{1}$$

где C – матрица смежностей контура длины n, а B – матрица смежностей орграфа де Брёйна $B(k,n)$ (доказательство изоморфности орграфов $\vec{C} \times B(k,n)$ и $M(k,n)$ (см. в [8]).

Пусть $\vec{C}$ – контур длины $n \ge 1$, а $\mathcal{T}$ – несвязный орграф, компонентами которого являются n копий дерева де Брёйна T порядка k^n. Рассмотрим униконтурный связный орграф $U^{(n)}$, образованный отождествлением каждой из n вершин контура $\vec{C}$ с корневой вершиной одной из компонент орграфа T. Не трудно убедиться в том, что матрица смежностей орграфа $U^{(n)}$ имеет вид

$$A\left(U^{(n)}\right) = C \otimes A\left(U^{(1)}\right), \tag{2}$$

где $U^{(1)} = T + yy$, T – дерево де Брёйна порядка k^n с корневой вершиной y, а C – матрица смежностей контура $\vec{C}$ длины n.

Теорема 1. Пусть $M(k,n)$ – орграф сети типа свернутой бабочки порядка nk^n, заданный на алфавите Z_k. Орграф $M(k,n)$ можно представить в виде суммы k непересекающихся по дугам остовных униконтурных подграфов, содержащих контур $\vec{C}$ длины n и изоморфных такому орграфу $U^{(n)}$, что компонентами леса $U^n - E(\vec{C})$ являются n копий полного k-арного корневого ордерева без одной главной ветви (дерево де Брёйна).

Доказательство. Согласно леммы 1 орграф де Брёйна

$$B(k,n) = \bigcup_{i=1}^{k} U_i^{(1)}, \quad U_i^{(1)} \cong U^{(1)} \ (i = 1,2,...,k). \tag{3}$$

При этом матрица смежностей $A\left(U_i^{(1)}\right)$ остовного униконтурного орграфа $U_i^{(1)}$, как показано в [5, 9], может быть представлена в блочной форме вида

$$A\left(U_i^{(1)}\right) = [\, O \ldots O \ F_i \ O \ldots O \,]', \ F_i = F, \tag{4}$$

с блочными размерами $k \times 1$. Здесь $F = I_{k^{n-1}} \otimes [11...1]$ – матрица с размерами $k^{n-1} \times k$, $I_{k^{n-1}}$ – единичная матрица порядка k^{n-1}, O – нулевая матрица того же порядка, а $[11...1]$ – строчная $(1 \times k)$ – матрица. Разложению (3) и форме представления (4) матрицы $A\left(U_i^{(1)}\right)$ соответствует матричное представление орграфа де Брёйна

$$\begin{aligned} B &= [F_1 \ O \ldots O\,] + [\, O \ F_2 \ O \ldots O\,] + \ldots + [\, O \ldots O \ F_k\,] = \\ &= A\left(U_1^{(1)}\right) + A\left(U_2^{(1)}\right) + \ldots + A\left(U_k^{(1)}\right), \end{aligned} \tag{5}$$

где $U_i^{(1)}$ – остовный подграф графа $B(k,n)$, изоморфный ордереву де Брёйна с петлёй y корня.

В соответствии с разложением (5) матрицу смежностей орграфа сети $M(k,n)$ представим в виде

$$M = C \otimes B = \sum_{i=1}^{k} A\left(U_i^{(n)}\right), \ A(U_i^{(n)}) = C \times A(U_i^{(1)}). \tag{6}$$

Изоморфность $U_i^{(n)} \cong U_1^{(n)}$ следует из того, что $U_i^{(1)} \cong U_1^{(1)}$, $i = 1,2,...,k$. Покажем это, используя свойства кронекерового произведения и подобия квадратных матриц.

Поскольку $U_i^{(1)} \cong U_1^{(1)}$, то существует такая матрица перестановок P порядка k^n, что $A\left(U_i^{(1)}\right) = P'A\left(U_1^{(1)}\right)P$.

Тогда

$$\begin{aligned} A\left(U_1^{(n)}\right) &= C \otimes A\left(U_1^{(1)}\right) = C \otimes P' A\left(U_i^{(1)}\right)\ P = \\ &= \left(I_n \otimes P'\right)\ \left(C \otimes A\left(U_i^{(n)}\right)\right)\ \left(I_n \otimes P\right) = \\ &= Q'\left(C_n \otimes A\left(U_i^{(1)}\right)\right)\ Q = Q' A\left(U_i^{(n)}\right)\ Q, \end{aligned} \tag{7}$$

где $Q = I_n \otimes P$ – матрица перестановок порядка nk^n , а I_n – единичная матрица порядка *n*.

Таким образом, матрицы $A\left(U_1^{(n)}\right)$ и $A\left(U_i^{(n)}\right)$ подобны. Следовательно, представленные этими матрицами орграфы $U_i^{(n)}$ и $U_1^{(n)}$ изоморфны. Далее, из (5) следует, что орграф сети

$$M(k,n) = \bigcup\nolimits_{i=1}^{k} U_i^{(n)},\ U_i^{(n)} \cong U^{(n)}\ ,\ i = 1,2,...,k\ , \tag{8}$$

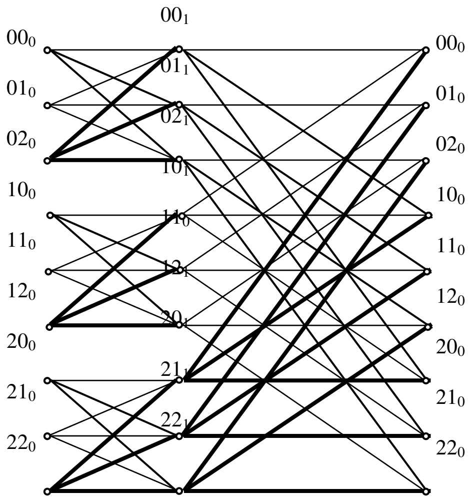
что и завершает доказательство теоремы.

Обозначим T_n – дерево де Брейна порядка k^n и высоты *n*, а S_n – полное *k*-арное ордерево высоты *n*.

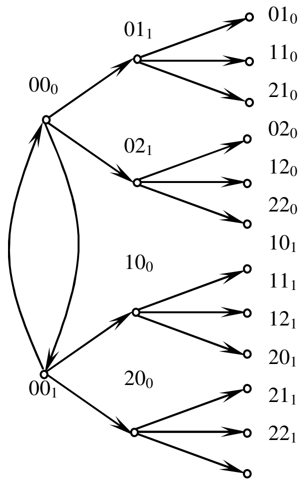
Следствие 1. Орграф сети типа свернутой бабочки $M(k,n)$ порядка nk^n содержит: а) nk непересекающихся по дугам копий дерева T_n ; б) *n* копий дерева T_n , не имеющих общих вершин; в) $n(k-1)$ непересекающихся по вершинам ордеревьев S_{n-1} высоты $n-1$.

Эти утверждения получаются непосредственно из теоремы 1. Результат работы [10, следствие 3], следует из вышеприведённых общих утверждений, поскольку S_{n-1} содержиться в T_n . На рисунке показано разложение структурного орграфа сети $M(3,2)$ на унициклические непересекающиеся по дугам остовные изоморфные подграфы $U_1^{(2)}$, $U_2^{(2)}$ и $U_3^{(2)}$ (с 2-циклом в каждом). При этом дуги в $M(3,2)$ ориентированы слева направо и (для наглядности) 0-й ярус повторен дважды – одинаково обозначенные вершины отождествляются. В сети $M(3,2)$ жирными линиями обозначены дуги факторграфа $U_2^{(2)}$

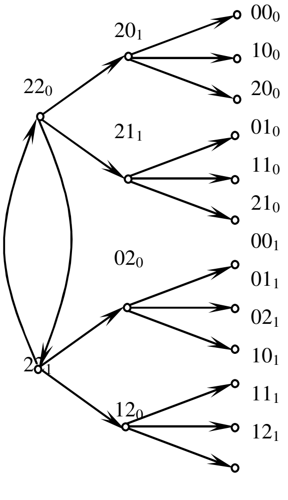
Заключение. Результаты исследования показывают, что сеть типа свернутой бабочки $M(k,n)$ является $U^{(n)}$-факторизуемой, т.е. структурный граф этой сети всегда может быть представлен как объединение k унициклических изоморфных (n)-факторов $U^{(n)}$, содержащих цикл C длины *n*, при этом компонентами леса $U^{(n)} - E(C)$ являются n копий дерева де Брёйна высоты n. Отметим, что рассмотренный в [6] граф $U(\Gamma_{k,n,m})$ при $m = n$ является структурным графом неориентированной сети типа свернутой бабочки. Там же определены число остовных деревьев, содержащихся в такой сети, и спектры ее структурных ориентированных графов.



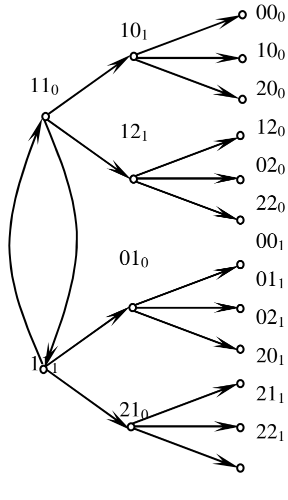
$M(3,2$



$U_1^{(2)}$



$U_2^{(2)}$



$U_3^{(2)}$

РИСУНОК

В.В. Строк, А.В. Чагарний

УНІЦИКЛІЧНІ ФАКТОРИЗАЦІЇ МЕРЕЖІ ТИПУ ЗГОРНУТОГО МЕТЕЛИКА

У роботі доведено, що структурний граф мережі типу згорнутого метелика $M(k,n)$ степеню k і розмірності n містить k взаємно ізоморфних уніциклічних факторграфів, які не перетинаються по ребрах (з циклом довжини n у кожному). Мережа $M(k,n)$ є об'єднанням цих факторграфів.

V.V. Strok, O.V. Chagarnyi

ON UNICYCLIC FACTORIZATIONS OF THE WRAPPED BUTTERFLY NETWORK

In this paper, we prove that the wrapped Butterfly graph $M(k,n)$ of degree k and dimention n is decomposable into k edge-disjoint mutually isomorphic unicyclic factors with n-cycle each and is the union of these factors.

1. *Ульман Дж. Д.* Вычислительные аспекты СБИС..– М: Радио и связь, 1990. – 480 с.
2. *Харари Ф.* Теория графов. – М: Мир, 1973. – 324 с.
3. *Memmi G., Raillard Y.* Some new results about the (d,k) graph problem // IEEE Trans. Comput. – 1982. – C 31, N8. – P. 784 – 791.
4. *Kim Y.S., Kim M.* A generalization of the de Bruijn graph for dense symmetric intercon – nection networks in multicomputer systems // Trans. IEICE. – 1989. – E 72, N6. – P. 691 – 694.
5. *Строк В.В.* Характеристические многочлены и спектры обобщенных графов де Брёйна // Интеллектуализация систем обработки информационных сообщений.– Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. – С. 180 – 190.
6. *Цветкович Д., Дуб М., Захс Х.* Спектры графов. Теория и применение. – Киев: Наук. думка, 1984. – 384 с.
7. *Строк В.В., Шлепаков Л.М.* Уніконтурні факторграфи в орієнтованих мережах типу згорнутого метелика // Доп. Національної академії наук України. – 2002. – № 10.– С. 27 – 31.
8. *Bermond J.C., Darrot E., Delmas O., Perrenes S.* Hamilton circuits in the directed wrapped Butterfly network // Discrete Applied Mathematics.– 1998.– 84.– P. 21 – 42.
9. *Строк В.В.* Униконтурные изоморфные факторизации орграфов де Брейна и Каутца // Кибернетика и системный анализ. – 2004. – № 4. – С. 17 – 26.
10. *Annexstein F., Baumschlag M., Rosenberg A.L.* Group action graphs and parallel architectures. COINS Technical Report 87 – 133.– Massachusetts: Computer and Information Sci. Departament. Univ. of Massachusetts, 1987.– 23 p.

Получено 09.06.2004